

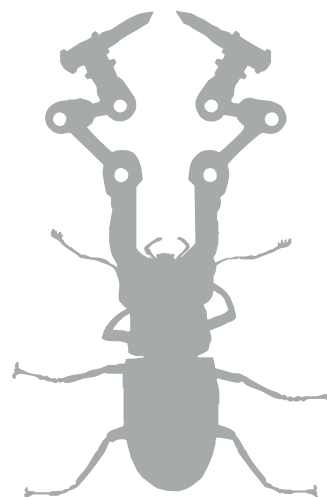


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPC**GRAU

Dinàmica de gases →

Luís Virto Albert



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Dinàmica de gases →

Luís Virto Albert

Primera edición: diciembre de 2017

© Luís Virto Albert, 2017

© Iniciativa Digital Politècnica, 2017
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona, 31
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Depósito legal: B 30188-2017
ISBN: 978-84-9880-692-2

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.

Dedicado a mi padre, Saturnino Virto Anguiano, asesinado vilmente en Huesca el 23 de agosto de 1936 por sediciosos, unos con camisa azul y otros de rojo, togada la cabeza, con la anuencia silenciosa, cuando no la bendición de algunos vestidos de hábito negro.

In memoriam

*Poco conocí a mi padre, pronto le mataron.
De noche, una horda ebria de bajas pasiones
por camino de Caronte le llevaron.*

*Silencio..., sus manos atadas y el cuerpo enhiesto espera sereno el momento.
Sin espera, pinceles de fuego con sangre pintaron un cuadro en los adobes de barro;
de azul, rojo y negro la paleta de quienes le fusilaron.
Pared del cementerio, cuneta sin nombre, cuerpo abandonado.
Canallas, cobardes, ¿por qué le asesinaron?*





Prólogo

Es un gran placer y un honor escribir este prólogo para un libro, *Dinámica de gases*, que refleja la ingente labor docente e investigadora del profesor Luis Virto, desarrollada en la ETSEIT. Por ello, empiezo felicitándole por ella y agradeciéndole que nos haya dejado esta excelente muestra de los aspectos básicos y de las aplicaciones prácticas de la dinámica de gases, que refleja las inquietudes que la motivaron.

Durante los más de cuarenta y cinco años que he tenido el privilegio de conocerle y de disfrutar de su amistad, tan valiosa y entrañable para mí, he podido seguir de cerca su actividad investigadora, junto con sus estudiantes y colaboradores. Esta actividad, sin descuidar los aspectos fundamentales, se ha centrado y fundamentado en los variadísimos problemas y en las necesidades del amplio y fértil ámbito industrial de la UPC. Su motivación principal ha estado ligada a la amplia labor de consultoría que el profesor Virto ha desarrollado en este sector, en que tantos han buscado su ayuda para solucionar problemas técnicos, acudiendo a él como a un acreditado médico de cabecera. Y él siempre respondió con sus reconocidos conocimientos técnicos y con el desarrollo de nuevas técnicas experimentales y de diseño.

La motivación que impulsó su labor de consultoría también guió su admirable labor como organizador o promotor de numerosos cursos cortos de extensión universitaria, dirigidos a la formación permanente de los ingenieros de las industrias de Catalunya. Siempre me impresionó la calidad de su trabajo investigador sobre el flujo y la transferencia de calor en medios porosos y fibrosos, y también sobre los aspectos básicos y prácticos de los procesos de secado, teniendo en cuenta la gran variedad de problemas industriales en que su investigación ha desempeñado un papel más relevante. También es de agradecer la aportación tan significativa de sus libros de texto y de sus monografías, que contribuyeron a aumentar la entonces todavía escasa literatura técnica en castellano.

La ingente labor realizada por el profesor Luis Virto no solo es bien reconocida en España, sino también internacionalmente. Así, en el año 2000, fue nombrado fellow de la American Society of Mechanical Engineers.

No quisiera concluir sin reiterarle mi agradecimiento por los muchos años de colaboración fructífera, regada por una amistad entrañable, así como su apadrinamiento como doctor honoris causa por la UPC.

Amable Liñán
Miembro de la Real Academia de Ingeniería





Advertencias y agradecimientos del escritor

De entrada, he de confesarte, querido lector, que quien escribe esta nota se ha atribuido la condición de escritor no solo por el hecho de considerarse un “mal escritor prolífico” –según definición del DRAE–, sino también a modo de reconocimiento explícito de que su aportación a los contenidos de este libro no merece el título de autor, condición que me atribuyen en la portada por particular benevolencia del editor.

Como podrás comprobar, el libro se ha elaborado a partir de aquellos conocimientos que el escritor se ha “embebido” de las obras consideradas seminales sobre cada tema, así como de las publicaciones técnico-científicas de indudable relevancia, procurando mantener el rigor científico del texto original y no caer en el error que anuncia el proverbio italiano “traduttore, traditore”. Por ello, y para que el lector pueda completar sus conocimientos sobre los temas que puedan interesarle, cada capítulo y apartado del libro incluye las referencias de las publicaciones, los libros y artículos de donde se han extraído los conocimientos que en ellos se han vertido.

El propósito que se persigue con la edición de *Dinámica de gases* es que sirva de orientación y primera aproximación a los conocimientos que el ingeniero o el técnico, en sus inicios profesionales, así como los estudiantes de grado o de doctorado, puedan necesitar para enfocar correctamente sus proyectos, o bien para orientar y apoyar sus estudios.

El lector ha de comprender que este libro no agota todos los posibles aspectos de la dinámica de gases, un campo de conocimiento muy extenso e importante en ciencia y tecnología. Y, por supuesto, no incluye nada sobre la dinámica atmosférica, un área de conocimiento de importancia creciente de la cual este escritor es un ignorante.

Aprovecho estas breves líneas para dejar constancia explícita del agradecimiento a mi familia, que tanta ausencia de compañía, que no de afecto, me ha tolerado. Demasiadas horas dedicadas al estudio y a los compromisos profesionales me han mantenido “atrapado”, sin ser consciente de lo que me “perdía”.



Un agradecimiento que también quisiera hacer extensivo a todos cuantos, directa o indirectamente, han sido llama y faro de mi interés por el conocimiento de la ciencia aplicada, desde los profesores Francisco Cebrián y Ramón Martín Blesa en el instituto, hasta el profesor Amable Liñán, de reconocido prestigio mundial en la termofluidodinámica de la combustión, adalid de la mecánica de fluidos en España, cuya amistad me honra.

Gracias también a todos mis colaboradores y amigos, tanto en mi carrera académica como en el ejercicio profesional, por el apoyo que he recibido de ellos; en particular, al profesor Esteve Codina, por su valiosa colaboración y ejemplar dedicación, y a los profesores Montse Carbonell Ventura y Pedro Javier Gámez Montero, por la ayuda que me dispensaron en la elaboración previa de algún capítulo del libro. También a Jordi Prats, director de Iniciativa Digital Politécnica, entidad editora del libro, y a Ana Latorre, responsable de coordinar las tareas de edición, por su interés y dedicación para mejorar el original.

Amigo lector, gracias por tu interés. Deseo que esta lectura pueda serte estimulante y útil.
Saturnino Luís Virto Albert



Índice

1. Gases ideales, gases perfectos y gases reales	13
1.1 ¿Qué se entiende por gas?	13
1.2 Fluido ideal, gas ideal y gas perfecto	14
1.3 Leyes de los gases perfectos para una masa finita de gas	17
1.4 Coeficientes de expansión y de compresibilidad	18
1.5 Ecuación calórica de estado	19
1.6 Relación entre calores específicos	20
1.7 Los efectos del gas real	21
1.8 Límites de utilización de la teoría de los gases calóricamente perfectos	25
1.9 Gases reales	26
1.10 Estados correspondientes	29
1.11 Mezcla de gases	31
1.12 Tablas de gas	38
Ejercicios	42
2. Fenómenos de transporte a nivel molecular: coeficientes de transporte	51
2.1 Introducción	51
2.2 Propiedades del transporte a nivel molecular: coeficientes de transporte	52
2.3 Mezcla de gases	62
2.4 Propiedades termodinámicas y de transporte del aire a altas temperaturas	69
Ejercicios	73
3. Nociones de termodinámica	79
3.1 Sistema termodinámico	79
3.2 Procesos termodinámicos reversibles e irreversibles	81
3.3 Principios termodinámicos o leyes termodinámicas	82
3.4 Propiedades termodinámicas del gas perfecto	84
3.5 Cambios de entalpía y de entropía en un gas perfecto	93
3.6 Diagrama de entalpía-entropía	96
3.7 Velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones	97
Ejercicios	100
4. Flujo, tipos y ecuaciones fundamentales	107
4.1 Introducción	107



4.2 Las ecuaciones fundamentales del movimiento de los gases.....	109
4.3 El flujo estacionario unidimensional con rozamiento de gases perfectos en conductos de área transversal constante y los efectos de compresibilidad despreciables.....	114
4.4 Los movimientos isoentrópicos y homioentrópicos. La ecuación de Euler- Bernoulli para gases.....	121
4.5 La capa límite: parámetros y ecuaciones básicas.....	123
Ejercicios.....	133
5. Flujo subsónico de fluidos compresibles por tuberías	139
5.1 Introducción	139
5.2 Flujo con pequeñas variaciones de densidad.....	139
5.3 Flujo de gases combustibles por tubería	144
5.4 Fundamentos del proyecto de sistemas de conductos y tuberías para el transporte y la distribución de fluidos compresibles	149
5.5 Flujo estacionario de gas en redes de tuberías	156
5.6 Métodos de simulación de redes de conductos de transporte y distribución de gases en régimen no estacionario	167
Ejercicios.....	170
6. Efectos de la compresibilidad sobre el flujo. Perturbaciones de presión: su propagación.Ondas de choque y ondas de expansión	181
6.1 Introducción	181
6.2 Relación entre la velocidad del foco que produce la perturbación de presión y la velocidad de la onda acústica. Número de Mach y Onda de Mach.....	181
6.3 Movimiento unidireccional no estacionario.....	183
6.4 Movimiento de onda unidimensional.....	189
6.5 Discontinuidades de velocidad.....	191
6.6 Ondas de choque	192
6.7. Ondas de expansión.....	207
Ejercicios.....	212
7. El tubo de choque. Ondas de detonación y de deflagración.....	217
7.1 Introducción.....	217
7.2 El tubo de choque	218
7.3 Limitaciones tecnológicas	223
7.4 Aplicaciones	226
7.5 Ondas de combustión, de detonación y de deflagración.....	227
7.6 Velocidades de propagación de las ondas y de los productos de combustión: su dirección	233
Ejercicios.....	235
8. Flujo cuasiestacionario y estacionario unidimensional y cuasiunidimensional iso-entrópico.....	245
8.1 Introducción	245
8.2 Movimientos cuasiestacionarios	246
8.3 Flujo estacionario	247



8.4 Flujo adiabático de gases.....	252
8.5 Flujo estacionario cuasiunidimensional	255
8.6 Flujo estacionario, unidimensional, isoentrópico de gases en conductos de sección recta variable.....	257
Ejercicios.....	267
9. Flujo estacionario unidimensional con fricción. Línea de Fanno para gases perfectos. Flujo isoterma	273
9.1 Introducción	273
9.2 Línea de Fanno	274
9.3 Relaciones entre los valores de las propiedades del fluido y del flujo a lo largo de la línea de Fanno para un gas perfecto	278
9.4 Dinámica del flujo estacionario unidimensional adiabático con fricción en un conducto de sección recta constante	280
9.5 El coeficiente de fricción.....	283
9.6 Procedimiento simplificado de cálculo de flujo adiabático teniendo en cuenta las pérdidas en accesorios	285
Ejercicios.....	294
10. Flujo estacionario unidimensional con transferencia de calor. Línea de Rayleigh. Flujo con adición de masa. Flujo de gases reactivos	301
10.1 Introducción	301
10.2 Ecuaciones básicas y línea de Rayleigh	301
10.3 Descarga de un depósito por un tubo de fricción despreciable y adición de calor	305
10.4 Flujo por un tubo de sección recta constante, alimentado desde un depósito, con fricción y adición de calor	308
10.5 Descarga de gas de un depósito por un conducto térmicamente aislado de sección recta constante con fricción	309
10.6 Flujo estacionario unidimensional con adición de masa	313
10.7 Aplicación del proceso de flujo con adición de masa: propulsión de cohetes por combustibles sólidos.....	320
10.8 Dinámica de flujos reactivos	323
Ejercicios.....	327
11. Chorros turbulentos circulares, planos y de pared	333
11.1 Introducción.....	333
11.2 Chorros turbulentos circulares y planos	334
11.3 Chorros turbulentos planos de pared.....	360
11.4 Chorro paralelo en una corriente coaxial	364
12. Chorros turbulentos confinados, coaxiales, transversales.....	371
12.1 Introducción	371
12.2 Chorros confinados.....	374
12.3 Chorros coaxiales y chorros transversales	393
12.4 Chorros inyectados en una corriente paralela. Chorros coaxiales.....	393
12.5 Chorros anulares.....	401



12.6 Chorros turbulentos anulares con remolino	404
12.7 Interacción, en cámaras de combustión, de chorros turbulentos de aire	412
13. Penachos turbulentos. Chorros boyantes y penachos forzados	423
13.1 Penachos turbulentos.....	423
13.2 Chorros turbulentos boyantes. Penachos forzados.....	430
13.3 Cálculo de los chorros boyantes verticales	437
14. Licuefacción de gases	451
14.1 Introducción	451
14.2 Fundamentos	452
14.3 Ciclos.....	455
15. Tubo de vórtice de Ranque-Hilsch.....	461
15.1 Introducción	461
15.2 Historia.....	462
15.3 Diseño básico del tubo	463
15.4 Prestaciones	467
15.5 Aproximación teórica de las prestaciones del tubo de vórtice	469
15.6 El modelo de la “rueda de paletas”	478
15.7 Optimización del tubo de vórtice	480
15.8 Simulación numérica.....	483
15.9 Aplicaciones	484
16. Cortinas de aire	487
16.1 Introducción	487
16.2 Condiciones de trabajo	488
16.3 Dimensionamiento técnico básico de una cortina de aire	488
16.4 Consideraciones térmicas.....	498
16.5 Rendimiento térmico	503
16.6 Procedimiento de dimensionamiento de cortinas de aire por el método de Siren	506
16.7 Conclusiones	507
17. Eyectores	511
17.1 Introducción	511
17.2 Características	513
17.3 Modelos matemáticos.....	514
17.4 Eyectores de flujo supersónico, supersónico saturado y mixto.....	515
17.5 Cálculo de un eyector de mezclador cilíndrico	517
17.6 Influencia de los diversos parámetros de funcionamiento	522
17.7 Caso de un mezclador de forma cualquiera	523
18. Toberas	527
18.1 Introducción	527
18.2 Ecuaciones básicas	528
18.3 Formulación del problema	529

18.4 Flujo homentrópico unidimensional en toberas De Laval	530
18.5 Comportamiento de una tobera en el vacío.....	540
18.6 Comportamiento de una tobera en la atmósfera.....	544
18.7 Pérdidas en toberas.....	546
18.8 Flujo másico real de una tobera.....	550
18.9 Tipos de tobera	558
18.10 Toberas no convencionales.....	562
18.11 Empuje de tobera.....	573
18.12 Cálculo del empuje real de tobera.....	578
19. Aplicación del método de características al proyecto y al análisis del flujo en toberas	583
19.1 Introducción	583
19.2 El método de Sauer para la determinación del campo de flujo en la región de la garganta de una tobera convergente-divergente bloqueada	583
19.3 Procedimiento de aplicación del método de las características a las toberas.....	587
20. Ventilación	597
20.1 Introducción	597
20.2 Los contaminantes y su origen.....	597
20.3 Las modalidades de ventilación	599
20.4 La circulación del aire en el interior de un recinto con fuentes de calor.....	609
20.5 Cálculo de la renovación de aire en un taller de una sola nave.....	610
20.6 Ventilación forzada.....	617
21. Chimeneas: altura y dispersión del penacho	625
21.1 Chimeneas	625
21.2 Dispersión del penacho en la atmósfera.....	627
ANEXO I. Tablas de propiedades y datos de flujo de gases.....	633
ANEXO II. Capa límite: parámetros y ecuaciones básicas.....	653
II.1 Parámetros	653
II.2 Métodos de cálculo.....	656
II.3 Efectos de la capa límite sobre el campo de flujo.....	659
II.4 Interacción onda de choque-capa límite	661
II.5 Separación de la capa límite	662
ANEXO III. El método de las características y método de la hodógrafa	667
III.1 Fundamentos	667
III.2 El método de cálculo.....	669
III.3 Desarrollo simplificado del método de las características	676
III.4 Hodógrafa.....	681
III.5 Estudio del flujo con ondas de dos familias	683
Bibliografía	691

→ 1



Gases ideales, gases perfectos y gases reales

1.1 ¿Qué se entiende por gas?

Por gas entendemos, en el caso de mayor complejidad, un estado de agregación de la materia compuesto de moléculas, átomos e iones, caracterizado por su muy débil interacción molecular, su baja densidad, la facilidad con que pueden ser comprimidos y la propiedad singular de ocupar por completo el volumen del recipiente que los contiene.

Un gas no tiene volumen ni presión definidos. Su volumen depende del recipiente que lo contiene y su presión está determinada por su ecuación de estado:

$$f(P, v, T) = 0 \quad (1.1)$$

A temperatura y a presión ambiente, los gases pueden ser elementos químicos, como el hidrógeno, el oxígeno, el nitrógeno, el cloro, el flúor y los gases nobles; compuestos, como el dióxido de carbono o el propano, o mezclas, como el aire. En condiciones extremas de alta temperatura y baja presión, el gas experimenta disociación, incluso ionización, y da lugar a una mezcla de moléculas, átomos e iones. En este estado, las propiedades del gas se desvían considerablemente de las que corresponden a su estado normal de presión y temperatura.¹

En relación con las leyes que relacionan las magnitudes de estado del gas (ρ , P , T) y su evolución termodinámica, se ha establecido una subdivisión en clases: gas ideal o perfecto, y gas imperfecto o real. En la literatura sobre el tema, no parece que se haga distinción alguna entre gas ideal y gas perfecto; sin embargo, considerando qué se entiende por fluido ideal, cabe concluir que no deberían confundirse.

(Ver [Ta91])



1.2 Fluido ideal, gas ideal y gas perfecto

Un fluido ideal, que es una pura abstracción, se define como una sustancia perfecta que posee elasticidad de volumen pero no rigidez. Dado que el fluido ideal no puede resistir una tensión tangencial, por muy pequeña que sea, las únicas fuerzas que puede resistir son fuerzas normales, o sea, de presión. El fluido ideal presenta las tres características siguientes:

- Solo puede transmitir fuerzas de presión.
- La presión en un punto es la misma en todas las direcciones.
- Carece de viscosidad, pues no es capaz de transmitir fuerzas tangenciales, de cortadura.

Los fluidos ideales se subdividen en líquidos ideales y gases ideales. Un gas ideal es un medio material homogéneo, isótropo, compresible, cuyas moléculas interactúan únicamente por colisión elástica. Desde el punto de vista de su módulo elástico, un gas ideal puede definirse como un fluido ideal, pues carece de viscosidad y tiene un módulo volumétrico isoterma k_T , que es igual a su presión estática p .

La mayoría de los gases en condiciones próximas a la presión atmosférica y a temperatura ambiente se tratan como un gas ideal. El modelo del gas ideal consta de dos ecuaciones: la ecuación del estado térmico, que relaciona P, v y T y la ecuación del estado energético, que relaciona u, v y T . Las propiedades energéticas de los gases ideales suelen expresarse de dos maneras alternativas:

- Como tabla de $u = u(T)$ para cada gas.
- En función de los calores específicos de cada gas, cuyos valores se pueden ajustar habitualmente a una expresión del tipo:

$$c_p = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (1.2)$$

Todas las relaciones entre las variables de estado termodinámico P, v y T establecidas a partir de resultados experimentales, tales como las de Boyle-Mariotte, Charles y Gay-Lussac, y la ley general que se deriva de ellas, se establecieron en procesos cuasiestacionarios, de modo que en ellos no podía aparecer la influencia de la viscosidad.

Se ha demostrado experimentalmente que, para un sistema homogéneo, compuesto por una especie química simple de gas, de masa molecular \tilde{M} , la presión P , el volumen específico v y la temperatura T están relacionados por:

$$\lim_{P \rightarrow 0} \left(\frac{Pv}{T} \right) = R (\text{constante del gas}) \quad (1.3)$$

La constante de gas R depende solo de la clase de gas considerado. Un gas para el cual R es una constante, o muy aproximadamente, y que satisface la ecuación de estado térmico $Pv = RT$ se denomina *gas térmicamente perfecto*.

1.2.1 Gas perfecto

El gas perfecto, que también tiene las propiedades del gas ideal, es, por el contrario, un gas viscoso con calores específicos constantes. Desde el punto de vista termodinámico, el gas perfecto obedece ciertas leyes generales simples, conocidas como “leyes de los gases”, que se pueden combinar en una sola que afirme que, para una cantidad dada de gas, el producto de su volumen, V , por la presión, P , es proporcional a la temperatura absoluta T .

Las medidas de las propiedades térmicas de los gases muestran que, para densidades bajas, la ecuación del estado térmico presenta la misma forma para todos los gases:

$$P \cdot v = R (t + t_0) \quad (1.4)$$

o bien, en términos de la densidad:

$$\rho = 1/v, \quad P = \rho R (t + t_0)$$

En la ecuación 1.4, t_0 es una temperatura característica, que resulta ser la misma para todos los gases, y R es una constante característica para cada gas en particular. Más concretamente, la ecuación 1.4 define una “familia” de gases perfectos, una para cada valor de R . Se ha encontrado que el valor de t_0 en la escala centígrada es de $273,16^\circ\text{C}$, de modo que $t + t_0$ define la temperatura absoluta T a que se encuentra el gas. Por consiguiente, la ecuación 1.4 se expresa:

$$P = \rho R T \quad (1.5)$$

El gas perfecto termodinámico clásico es el definido por la teoría cinética de Maxwell y Boltzmann. Uno de los objetivos de la teoría cinética de gases es la interpretación de la ecuación del estado térmico para el gas perfecto. De acuerdo con la teoría cinética, un gas se puede concebir como compuesto por un gran número de moléculas, dado por el número de Avogadro, que se mueven aleatoriamente a velocidades que pueden ser muy lentas o sumamente rápidas, dependiendo de su energía, y que colisionan continuamente con sus vecinas o con las paredes del recipiente que las contiene. El proceso de colisión se supone elástico y se produce en un tiempo muy corto.

En este proceso de colisión molecular, unas moléculas transmiten por choque energía a otras, que pueden alcanzar velocidades muy altas, mientras que la velocidad de las primeras tiende prácticamente a cero. Las demás moléculas alcanzan, lógicamente, una velocidad cuyo valor se sitúa entre ambos extremos. Maxwell y Boltzmann derivaron, aplicando los métodos de la mecánica estadística, funciones que representan la distribución de velocidad al equilibrio de las moléculas. De esta teoría, se derivan resultados para las propiedades termodinámicas de un gas, como la temperatura, la presión, la energía cinética, etc., y también para las propiedades de transporte de un gas perfecto, como la viscosidad, la conductividad térmica, y la difusión de masa.

Desde el punto de vista macroscópico de la termodinámica clásica, el estado termodinámico de un gas perfecto se describe mediante las propiedades siguientes: P , v , T , u , h y s .

Cuando se acuerda con el punto de vista microscópico de la teoría cinética de gases, aporta una percepción clara de alguna de las importantes características del gas perfecto que no pueden obtenerse únicamente a partir de consideraciones termodinámicas.



Un gas perfecto es, por supuesto, un “gas ficticio, ideal”, pero su consideración conlleva conocer, por una descripción matemática más o menos sencilla, información importante que describe, al menos en una primera aproximación, el comportamiento del “gas real” correspondiente. Así, por ejemplo, las ecuaciones derivadas para el comportamiento del “gas perfecto” se modifican posteriormente para aplicarlas al “gas real”, incorporando coeficientes de corrección determinados experimentalmente.

En definitiva, un gas perfecto es una sustancia de composición homogénea y de naturaleza isotrópica, que presenta dos características fundamentales:

1. Sus propiedades elásticas están completamente definidas, o especificadas, por dos módulos elásticos:
 - a) el módulo de cortadura o de rigidez, que se refleja como viscosidad, y
 - b) el módulo volumétrico isoterma, igual a la presión P .

$$k_T = -v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = P \quad (1.6)$$

2. Su estado termodinámico está completamente definido por sus propiedades macroscópicas, también denominadas *coordenadas termodinámicas*, P , v , T , de las cuales solo dos son independientes.

En condiciones normales de presión y de temperatura, la mayoría de los gases reales se comportan, dentro de una tolerancia razonable, como gases perfectos. Así es para el nitrógeno, el oxígeno, el hidrógeno, los gases nobles y algún otro de molécula más compleja, como el dióxido de carbono. De hecho, el comportamiento de un gas suele concordar más con el del gas perfecto cuanto más sencilla es su fórmula química y cuanto menor es su reactividad.

El modelo de gas perfecto tiende a fallar a bajas temperaturas o a presiones elevadas, cuando las fuerzas intermoleculares son importantes. En la dinámica de gases, la consideración de gas ideal o perfecto es muy importante, ya que trata casi exclusivamente con gases en unas condiciones en que pueden considerarse aproximadamente perfectos.

1.2.2 Otras formas de la ecuación de estado térmico

La ecuación 1.5 puede expresarse de otras maneras, por ejemplo introduciendo la masa de gas m que ocupa un volumen V . Entonces, dado que $\rho = m/V$, la ecuación se escribe:

$$PV = mRT \quad (1.7)$$

A su vez, esta ecuación puede expresarse en términos de una relación adimensional de masa $n = m/\tilde{M}$, en que \tilde{M} representa la masa molecular y n el número de moles de gas contenidos en la masa m , con lo cual la ecuación 1.7 se convierte en:

$$PV = n\tilde{M}RT \rightarrow PV = mRT \quad (1.8)$$

En la ecuación 1.8, el producto $\tilde{M}R$ tiene un significado muy importante. Cotejando los resultados experimentales, se encontró que su valor, representado por el símbolo



\tilde{R} , era el mismo para todos los gases, independientemente de su naturaleza. Por ello, fue denominado *constante universal de los gases*, también conocida como *constante molar de los gases*. Esta relación experimental fue avanzada primero por Avogadro, que expresó su hipótesis del modo siguiente: volúmenes iguales de gases a la misma presión y temperatura contienen el mismo número de moléculas.

Por consiguiente, una forma de expresar la ecuación 1.8 para una masa de n moles de gas que ocupa un volumen V es:

$$PV = n\tilde{R}T \quad (1.9)$$

Otra forma de expresar la ecuación 1.9 es:

$$Pv = (\tilde{R} / \tilde{M})T \quad (1.10)$$

Las unidades de R son $J/kg.K$, de valor diferente para cada gas, mientras que las de \tilde{R} son $J/kmol.K$, de valor 8314,3, el mismo para todos los gases perfectos.

(Ver [LR57] y [SC73])

1.3 Leyes de los gases perfectos para una masa finita de gas

En un apartado anterior, se ha mencionado que empíricamente se observan una serie de relaciones de proporcionalidad entre la temperatura, la presión y el volumen, que han dado lugar a las denominadas *leyes de los gases*, entre las cuales destaca la Ley de los gases perfectos, que en su forma más general se expresa matemáticamente por la ecuación $(PV/T) = Cte$, forma simple deducida por primera vez, como una combinación de las leyes de Boyle y de Charles, por Émile Clapeyron en 1834.

Las leyes que rigen procesos particulares en una masa finita de gases son:

- Ley de Boyle-Mariotte, que enuncia que, en una masa de gas dada a temperatura constante, el producto de su volumen y la presión a que se encuentra es constante: $PV = Cte$
- Ley de Charles, que enuncia que, para una masa de gas dada, si la presión se mantiene constante, el volumen aumenta linealmente con la temperatura: $V = V_0(1 + \alpha t)$

Si la temperatura t se mide en $^{\circ}C$ y el volumen V_0 a cero grados centígrados, entonces:

$$\alpha = \frac{1}{273}, \text{ luego: } \frac{V}{V_0} = \frac{T}{273} \text{ y,}$$

en general:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (1.11)$$

- Ley de Gay-Lussac, que enuncia que, si se mantiene constante el volumen de una masa de gas, la presión aumenta linealmente con la temperatura, o sea:



$P = P_0(1 + \beta t)$, donde el valor de la constante β es, como antes, $1/273$. Por consiguiente:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (1.12)$$

- Ley general del gas perfecto, que, como es sabido, se escribe $PV = n\tilde{R}T$
- Ley de Avogadro, que enuncia que, volúmenes iguales de gas para todos los gases que se mantienen a la misma presión y temperatura contienen el mismo número de moléculas $N_A = 6,02252 \cdot 10^{(-23)}$ moléculas/mol. La constante molar de los gases \tilde{R} y el número de Avogadro son constantes universales cuyo cociente es la constante de Boltzmann, que no es otra cosa que la constante de gas de una sola molécula. $k = (\tilde{R} / N_A) = 1,38054 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$
- Para la mezcla de gases, la Ley de Dalton enuncia que, a una temperatura dada, la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de cada gas componente, que son la presión que cada gas ejercería si ocupase, por sí solo, todo el volumen de la mezcla, o sea $p = \sum_{i=1}^n p_i$, donde n es el número de gases distintos que componen la mezcla.

(Ver [LR57])

1.4 Coeficientes de expansión y de compresibilidad

Habida cuenta de que, en un gas que se comporta como perfecto, el volumen específico es una función de la presión y de la temperatura a que se encuentra, se pueden definir dos coeficientes: el coeficiente de expansión y el coeficiente de compresibilidad. En efecto, diferenciando la ecuación $v = v(T, P)$, obtenemos:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP \quad (1.13)$$

La variación relativa elemental del volumen específico viene dada por $\frac{dv}{v}$; así pues, la ecuación 1.13 se escribe:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP \quad (1.14)$$

Por consiguiente, resulta:

- Coeficiente de expansión térmica:



$$\left(\frac{dv^+}{v}\right) = \alpha \rightarrow \alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (1.15)$$

– Coeficiente de compresibilidad isoterma:

$$\left(\frac{dv^-}{v}\right) = \beta_T \rightarrow \beta_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \quad (1.16)$$

Este coeficiente de compresibilidad no hay que confundirlo con el que se aplica a la ecuación de estado de los gases perfectos para describir el comportamiento de un gas real, denotado por Z . Cuando se trata de problemas de dinámica de gases reales, hay que tener en cuenta que las relaciones termodinámicas quedan afectadas por el valor de Z . Así, por ejemplo, en un proceso isoentrópico de un gas perfecto, se cumple la relación $Pv^\gamma = Cte$, mientras que, en un gas real, se ha de substituir γ por

$$n = -\frac{v}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln v}\right)_s$$

1.5 Ecuación calórica de estado

La energía interna de cualquier gas puede expresarse por el funcional conocido como *ecuación calórica de estado*:

$$u = u(T, v) \quad (1.17)$$

Diferenciando la ecuación 1.17, obtenemos: $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$

En el caso de un gas térmicamente perfecto, $PV = RT$, se demuestra que $\left(\frac{du}{dv}\right)_T = 0$

por tanto, resulta $u = u(T)$. Es decir, la energía interna de un gas térmicamente perfecto depende solo de su temperatura, conclusión acorde con el resultado de la teoría cinética de los gases.²

Por definición de calor específico, en este caso podemos escribir $du = c_v dT$, e integrando se obtiene:

$$u = u_0 + \int_{T_0}^T c_v(T) dT \quad (1.18)$$

En la ecuación 1.18, u_0 es la energía interna a una temperatura arbitraria de referencia T_0 . Elegidos T_0 y u_0 de valor cero, obtenemos:

$$u = c_v \cdot T \quad (1.19)$$



Un gas que tiene un valor de c_v constante se denomina *gas calóricamente perfecto*, y la ecuación 1.19 es una forma de la ecuación calórica de estado para tal gas. En adelante, diremos que un gas es perfecto solo si es, a la vez, térmica y calóricamente perfecto. En caso contrario, se denomina *gas imperfecto*. Otra forma de ecuación calórica de estado es la *ecuación de la entalpía*, que se escribe:

$$h = \int_{T_0}^T c_p dT + h_0 \quad (1.20)$$

en que h es la entalpía del gas por unidad de masa a la temperatura T , y c_p es el calor específico a presión constante.

1.6 Relación entre calores específicos

Aunque en otros capítulos se trata de la magnitud termodinámica *calor específico*, conviene ahora avanzar una interpretación de ella en el contexto de la teoría cinética de los gases.² En dicha teoría, el calor δQ requerido para elevar la temperatura de un gas una cantidad dT es almacenado en él como energía cinética de sus moléculas.

Para un gas monoatómico, la teoría deduce, para la energía cinética en términos moleculares, la ecuación $(\tilde{E})_{c,tr} = \frac{3}{2} \tilde{R}T$. Diferenciando, se obtiene $d(\tilde{E}_{c,tr}) = \frac{3}{2} \tilde{R}dT$.

Ahora bien, $d(\tilde{E})_{c,tr} = \tilde{M} \delta Q$; por tanto, si denotamos \tilde{c}_v la capacidad molar de calor del gas a volumen constante, que representa el incremento de energía cinética interna por mol de gas y cambio por unidad de temperatura, resulta $\tilde{c}_v dT = (3/2) \tilde{R}dT$; luego:

$$\tilde{c}_v = (3/2) \tilde{R} \quad (1.21)$$

La ecuación 1.21 indica que, para un gas perfecto, el calor específico es independiente de la presión y de la temperatura del gas. Dicha ecuación da valores para el calor específico de los gases monoatómicos que difieren poco de los obtenidos experimentalmente.

El valor del factor numérico de la ecuación 1.21 es distinto según sea el tamaño molecular del gas y, por consiguiente, sus grados de libertad, pues el teorema de equipartición de Maxwell enuncia que la energía cinética de una molécula se reparte igual entre todos sus grados de libertad. Los resultados que aporta la teoría son:

Molécula diatómica rígida $\tilde{c}_v = \frac{5}{2} \tilde{R}$; molécula poliatómica rígida, $\tilde{c}_v = \frac{6}{2} \tilde{R}$

Un segundo calor específico de los gases térmicamente perfectos es el que resulta del proceso energético a presión constante. En efecto, de conformidad con la primera ley de la termodinámica, en un proceso reversible se cumple la ecuación siguiente:

$$\delta Q = c_v dT + P dv \quad (1.22)$$

Diferenciando la ecuación $Pv = RT$, obtenemos:

$$Pdv + vdP = RdT \quad (1.23)$$

Combinando las ecuaciones 1.22 y 1.23, resulta: $\frac{\delta Q}{dT} = c_v + R - v \frac{dP}{dT}$

Al ser un proceso isobárico, $P = Cte$; luego:

$$v \frac{dP}{dT} = 0 \text{ y } \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_P = c_v + R \quad (1.24)$$

Por consiguiente, $\left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_P$ representa un nuevo calor específico a presión constante, que denotamos c_p , de modo que la ecuación 1.24 resulta:

$$c_p - c_v = R \quad (1.25)$$

Sea $\gamma = c_p/c_v$ la relación de calores específicos para un gas perfecto. Entonces, a partir de la ecuación 1.25, se obtiene:

$$c_v = R/(\gamma - 1); \quad c_p = \gamma R/(\gamma - 1) \quad (1.26)$$

Los valores de γ para varias clases de gases perfectos son, conforme a la teoría cinética, los siguientes:

- Gases monoatómicos: $\gamma = 5/3$, exacto
- Gases diatómicos: $\gamma = 7/5 = 1,40$, aproximado
- Gases poliatómicos: $\gamma = 8/6 \cong 1,33$, aproximado

Para gases imperfectos (reales), los calores específicos c_p y c_v varían significativamente con la temperatura del gas y, en mucha menor medida, con la presión. Sus valores se encuentran en las tablas [KK45].

1.7 Los efectos del gas real

Entendemos por *propiedades termodinámicas* aquellas que dependen únicamente del estado del gas en un punto particular; por ejemplo: energía interna, entalpía y calor específico. Por *propiedades de transporte*, entendemos aquellas que describen el desplazamiento de masa, cantidad de movimiento y energía a través del gas como consecuencia del movimiento a escala molecular, atómica, iónica, etc. (por ejemplo, la viscosidad y la conductividad térmica).

Recordemos que la temperatura de un gas es, de acuerdo con la teoría cinética, una medida de la energía cinética de traslación media del movimiento aleatorio de las moléculas. Cuando se añade calor a un gas sin que este realice trabajo, la energía del gas aumenta. A bajas temperaturas, la mayor parte de este incremento de energía aparece como un aumento de la energía cinética de traslación, o sea, de temperatura. Sin embargo, a medida que la temperatura se eleva, una adición ulterior de calor aumenta la energía de las moléculas por otras vías: un aumento de la energía cinética de rotación,



de la energía cinética de vibración y de la energía del electrón (en este caso, en cantidades discretas, denominadas *quanta*). Si la temperatura es suficientemente alta, algunas de las moléculas se escinden en átomos separados absorbiendo una cantidad de energía denominada *energía de enlace*. A temperaturas todavía más elevadas, los electrones se separan de los átomos y provocan una mezcla de iones y de electrones libres. El gas totalmente ionizado recibe el nombre de *plasma*.

Cuando la temperatura a que se encuentra un gas cambia bruscamente, el gas necesita un tiempo para alcanzar su nuevo estado de equilibrio. Este tiempo es, en general, muy corto y recibe el nombre de *tiempo de relajación*. Si el tiempo de relajación es largo en comparación con el que se requiere para el cambio de temperatura, cabe suponer en algunos casos que el gas retiene su distribución original de energía, incluso después de haber cambiado de temperatura. En tal caso, se dice que el gas está “congelado”.

La proporción de cada forma de energía en un gas viene determinada por las *funciones de partición*.

La función de partición de un gas puro se puede expresar como el producto de las funciones de partición de cada modo de energía.

$$F_{pt} = F_t F_r F_v F_e \quad (1.27)$$

En la ecuación anterior, F_{pt} es la función de partición total. Las otras funciones de partición están definidas para un gas diatómico por las expresiones siguientes:

Función de partición traslacional:

$$F_t = \left(\frac{2\pi \tilde{M} KT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\tilde{R}T}{P} \quad (1.28)$$

Función de partición rotacional:

$$F_r = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp \left\{ -\frac{h^2 j(j+1)}{8\pi^2 IKT} \right\} \quad (1.29)$$

Función de partición vibracional:

$$F_v = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/KT} = \left(1 - e^{-h\nu/KT} \right)^{-1} \quad (1.30)$$

Función de partición electrónica:

$$F_e = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-\varepsilon_n/KT} \quad (1.31)$$

En las ecuaciones anteriores, \tilde{M} es la masa molecular, k es la constante de Boltzmann, h es la constante de Planck, I es el momento de inercia molecular, ν es la frecuencia vibracional, g_n es el número de estados que tienen el mismo nivel de energía y ε_n es la energía del n -ésimo estado electrónico.



La energía y la entalpía del gas están relacionadas con la función de partición por las fórmulas:

$$\frac{\tilde{E} - \tilde{E}_0}{\tilde{R}T} = T \left(\frac{\partial \ln F_{pt}}{\partial T} \right)_p = T \frac{d \ln F_c}{dT} \quad (1.32)$$

$$\frac{\tilde{H} - \tilde{E}_0}{\tilde{R}T} = T \left(\frac{\partial \ln F_p}{\partial T} \right)_p = T \frac{d \ln F_p}{dT} \quad (1.33)$$

\tilde{E} y \tilde{H} son la energía y la entalpía por mol. \tilde{E}_0 es una constante arbitraria que representa la energía del gas en el cero absoluto, y \tilde{F}_c y \tilde{F}_p son:

$$F_c = \frac{P}{RT} F_{pt} \quad F_p = P F_{pt} \quad (1.34)$$

Los calores específicos por mol vienen dados por:

$$\tilde{c}_v = \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \right)_p \quad \text{y} \quad \tilde{c}_p = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial T} \right)_p \quad (1.35)$$

La entropía del gas viene dada por:

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{R}} = \ln F_{pt} + T \left(\frac{\partial \ln F_{pt}}{\partial T} \right)_p \quad (1.36)$$

Las funciones de partición para el nitrógeno y el oxígeno son bien conocidas. Las fórmulas correspondientes son:

Para el N_2 :

$$\ln F_{pt} = \frac{7}{2} \ln T + 0,42 - \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{3390}{T} \right) \right] - \ln P \quad (1.37)$$

Para el O_2 :

$$\begin{aligned} \ln F_{pt} = & \frac{7}{2} \ln T + 0,11 - \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{2270}{T} \right) \right] - \ln P + \\ & + \ln \left[3 + 2 \exp \left(-\frac{11390}{T} \right) + \exp \left(-\frac{18990}{T} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

T se expresa en grados Kelvin y P en atmósferas.

A título de ejemplo, algunos valores umbral de temperatura son los siguientes:



$T > 1.500 \text{ K} \rightarrow$ excitación de los niveles vibratorios de la energía interna (por ejemplo, O_2 , N_2)

$T \approx 3.000 \text{ K} \rightarrow$ disociación, función de T , P . Por ejemplo, a $P = 10^5 \text{ Pa}$, $\text{N}_2 + \text{O}_2 \Leftrightarrow 2\text{NO}$;

$\text{N}_2 + \text{O} \Leftrightarrow \text{NO}$; $\text{N} + \text{O}_2 \Leftrightarrow \text{NO} + \text{O}$

$T \approx 5.000 - 6.000 \text{ K} \rightarrow$ disociación completa del O_2

$T > 5.000 - 6.000 \text{ K} \rightarrow$ ionización térmica (a 17.000 K , todo el nitrógeno es ionizado)

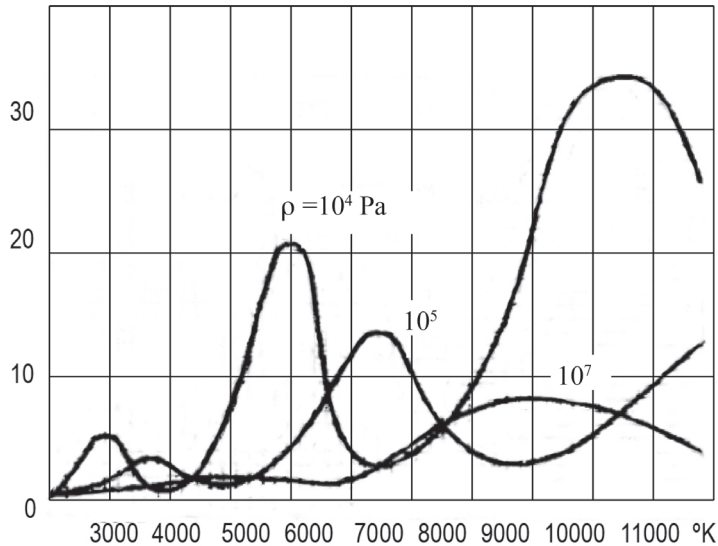
El resultado más significativo en dinámica de gases es que aumenta el valor de los calores específicos. Tomando como ejemplo el aire, el calor específico cambia en función solo de la temperatura antes de que empiece la disociación. A presión constante, dicha variación se puede estimar por la fórmula:

$$\frac{c_p}{c_{pr}} = \left(\frac{T}{T_r} \right)^\phi \quad (1.39)$$

siempre que se cumpla $T \leq 2.500 \text{ K}$.

Las figuras 1.1 y 1.2 ilustran las variaciones del valor de c_p con el aumento de la temperatura, a diferentes valores de presión. Los valores de referencia son: $T_r = 288$, $c_{p,r} = 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, y para $T = 1.000 \text{ K}$, $\phi = 0,1$ (constante).

Fig. 1.1.
Variación del valor de c_p en función de P y T .



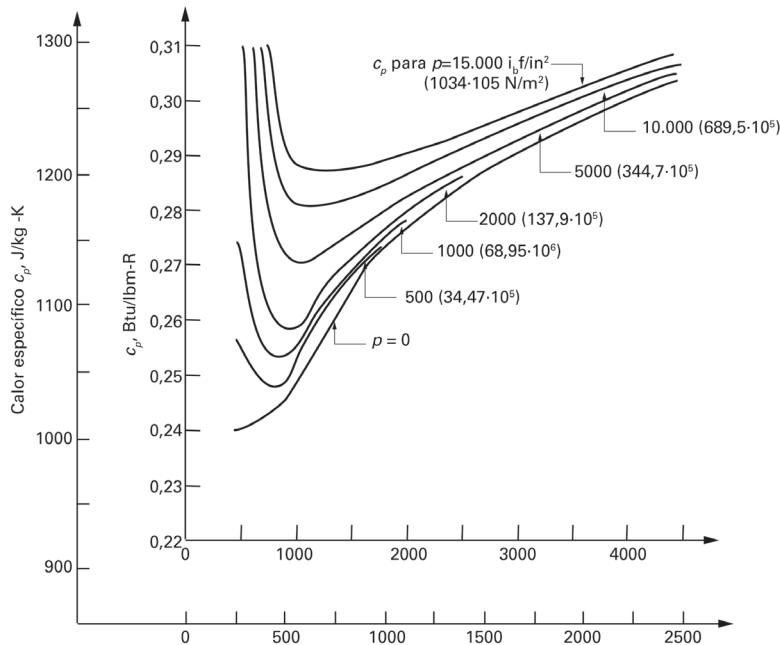


Fig. 1.2.
Variación del valor
de c_p en función de
 P y T^3 .

(Ver [Sch82])

1.8 Límites de utilización de la teoría de los gases calóricamente perfectos

La simplicidad de los cálculos bajo la hipótesis de un gas calóricamente perfecto incita a aplicarlos siempre en una primera aproximación. Sin embargo, los efectos que resultan del calentamiento de un gas se manifiestan, en definitiva, como ya se ha expuesto, por una variación de los valores de los calores específicos, o sea, de γ . Esto puede ser altamente significativo en la dinámica de gases de toberas que descargan gases de combustión.

La Fig .1.3 muestra la variación de γ para los gases de combustión de keroseno en el

aire,⁴ tomando como parámetro la riqueza de la mezcla $R = \frac{\text{flujo másico de keroseno}}{\text{flujo másico de aire}}$

Se observa que, para $T < 600$ K, se puede admitir el valor $\gamma=1,4$.

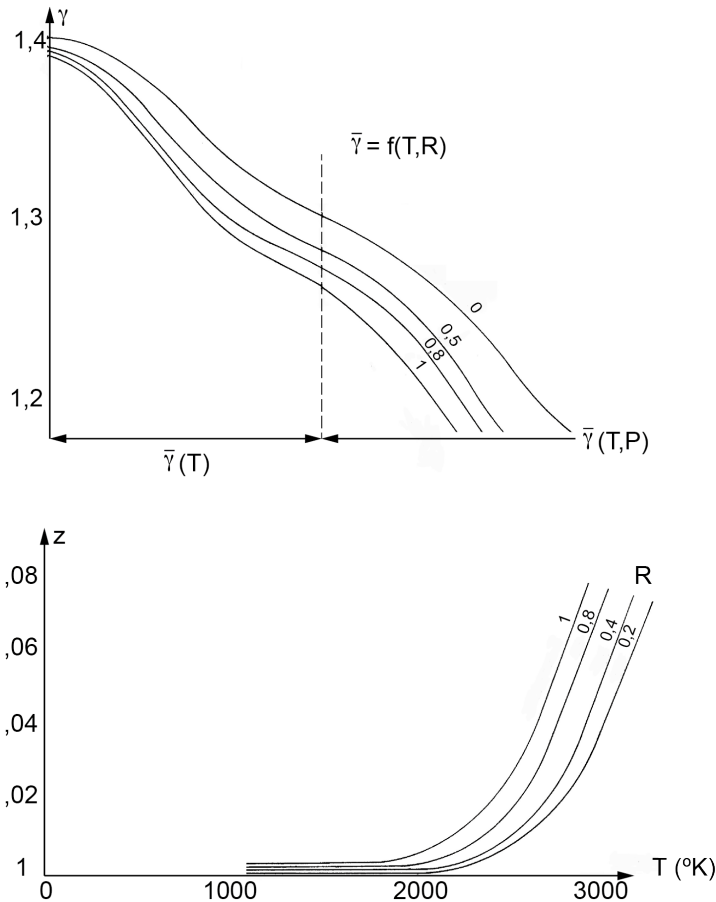
En el intervalo $600 < T < 1.600$, el gas de combustión se comporta todavía como térmicamente perfecto, pero γ varía mucho con T , habida cuenta de la influencia de los fenómenos de vibración molecular. Para $1.600 < T$, γ varía con T y con P en función de las disociaciones. En este intervalo de temperatura, el aire deja de comportarse como gas perfecto, por lo cual es necesario recurrir al diagrama de Mollier. Es lo que ocurre, por ejemplo, con los estatorreactores hipersónicos. Obsérvese, sin embargo, que, en el cálculo de los flujos másicos, la variación de temperatura entre la cámara de combustión y la garganta de la tobera es siempre muy moderada:



$$\frac{T_0 - T^*}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \approx 10\%$$

de manera que, hasta $T = 2.000 \text{ K}$, se pueden utilizar las fórmulas con $\gamma = cte.$ con la condición de tomar el valor medio de γ en la expansión de $P_0 T_0$ a P^*, T^* . Por el contrario, en los cálculos de empuje, se pueden cometer errores no despreciables si se considera el estado de equilibrio en lugar del de no equilibrio

Fig. 1.3.
Variación del valor de γ para los gases de combustión de keroseno en el aire en función de la riqueza de la mezcla R y de la temperatura T^*



1.9 Gases reales

El gas térmica y calóricamente perfecto es una idealización. Los gases reales tienen un comportamiento que se desvía en mayor o menor grado del de los gases ideales. Los denominados “efectos de gas real” se manifiestan prioritariamente en condiciones de altas temperaturas y bajas presiones.



Todo gas real puede ser licuado. La temperatura más alta a que es posible este cambio de fase recibe el nombre de *temperatura crítica* T_c ; la presión y la densidad correspondientes se denominan *presión crítica* P_c y *densidad crítica* ρ_c . Estas variables críticas son características de cada gas, pues dependen de las fuerzas intermoleculares.

El significado de temperatura crítica puede entenderse fácilmente en términos de fuerzas intermoleculares. Si la energía térmica de la molécula KT es mayor que la energía potencial $\Delta\varepsilon$ con respecto a sus vecinas, puede escapar de estas.

Un simple modelo de órdenes de magnitud explica que un gas puede licuarse a temperaturas superiores a la definida por el cociente entre la energía potencial de separación molecular y la constante de Boltzmann, o sea, $T > (\Delta\varepsilon / K)$. Por consiguiente, en el límite $T = (\Delta\varepsilon / K)$, la temperatura es crítica. La ecuación de estado de un gas real debe implicar al menos dos parámetros además de R ; por ejemplo, T_c y P_c .

Este es el caso de la famosa ecuación de estado de Van der Waals, que se puede utilizar para estimar el valor aproximado al de un gas perfecto de gases reales a densidades moderadas. Dicha ecuación se escribe:

$$P = \rho RT \left(\frac{1}{1 - \beta\rho} - \frac{\alpha\rho}{RT} \right) \quad (1.40)$$

$$\text{donde } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{27}{8} RT_c \text{ y } \frac{\alpha}{\beta^2} = 27 P_c$$

El efecto de las fuerzas de Van der Waals se puede expresar, en una primera aproximación, en términos del denominado *segundo coeficiente del virial*, de manera que $PV = RT$ puede escribirse así:

$$\frac{Pv}{RT} = 1 + b(T) \frac{P}{RT} \quad (1.41)$$

El término de corrección $b(T)P/RT$ difiere de gas a gas; sin embargo, para el limitado número de gases que tienen interés en dinámica de gases es posible introducir variables adimensionales, que transforman la ecuación 1.41 en una forma universal:

$$\frac{Pv}{RT} = 1 + \frac{P_c v_c}{RT_c} \frac{P}{P_c} \frac{T_c}{T} \frac{b(T)}{v_c} \quad (1.42)$$

En la ecuación 1.42, $P_c v_c / RT_c$ es una constante k cuyo valor es aproximadamente el mismo para todos los gases que interesan ($k = 0,295$). A su vez, $b(T)/v_c$ es aproximadamente una función universal de T_c/T para dichos gases. Por tanto, la ecuación 1.43 se puede escribir así:

$$\frac{Pv}{RT} = 1 + k \frac{P}{P_c} \phi \left(\frac{T_c}{T} \right) \quad (1.43)$$

donde $\phi(T_c/T)$ es la misma función para todos los gases que tienen interés en dinámica de gases. Algunos de sus valores se muestran en la Tabla 1.1.



Tabla 1.1.
Valores de interés
en dinámica de gases

T_c / T	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$\phi(T_c / T)$	0,009	0,015	-0,005	-0,067	-0,18

Otra ecuación de estado para los gases reales, aunque poco utilizada, es la de Dieterici, cuya expresión es:

$$P = \frac{RT}{v - \beta} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) \quad (1.44)$$

Tanto la ecuación de Van der Waals como la de Dieterici pueden expresarse en términos de los valores críticos de las variables de estado. Adoptando las cifras adimensionales $\theta = T / T_c$, $\pi = P / P_c$ y $\phi = v / v_c$, resulta:

– Ecuación de Van der Waals:

$$\left(\pi + \frac{3}{\phi^2}\right)(3\phi - 1) = 8\theta \rightarrow \pi = f(\theta, \phi) \quad (1.45)$$

– Ecuación de Dieterici:

$$\pi(2\phi - 1) = \theta \exp\left[2\left(1 - \frac{1}{\theta\phi}\right)\right] \quad (1.46)$$

En la tabla 1.2, se muestran los valores críticos y las temperaturas características de varios gases. La ecuación de estado más general para los gases reales se escribe formalmente en términos del “factor de compresibilidad” Z . Su expresión es:

$$\frac{Pv}{RT} = Z(P, T) \quad (1.47)$$

Para los gases perfectos, $Z = 1$.

Las desviaciones del valor de Z con respecto a la unidad se deben principalmente a dos causas:

- A bajas temperaturas y altas presiones, las fuerzas intramoleculares resultan importantes. Son las denominadas *fuerzas de Van der Waals*, que dan una explicación a la posibilidad de licuar un gas.
- A altas temperaturas y bajas presiones, ocurren procesos de disociación y de ionización.

Tabla 1.2.
Valores críticos y temperaturas características de varios gases [LR57]

	P_c (bar)	T_c (K)	R (J/kg·K)	P_{cv_c} / RT_c	θ_v (K)	θ_D (K)
O₂	50,9	154,3	259,778	0,292	2.230	59.000
N₂	33,96	126,0	296,749	0,292	3.340	113.300
NO	65,86	179,1	277,136	0,255	2.690	75.500
H₂	12,93	33,2	4.121,735	0,306	6.100	52.400
He	2,29	5,2	2.079,010	0,306	-	-
Ar	50,00	151,1	208,195	0,291	-	-
CO₂	73,82	304,2	188,778	0,280	954 min.	40.000 aprox.



Con respecto al factor de compresibilidad Z , cabe avanzar que se representa habitualmente como una función de la presión reducida P/P_c para diferentes valores de la temperatura reducida T/T_c . Para valores de la temperatura reducida $T_r > 2$, o bien $P_r < 0,05$ aproximadamente, la curva Z vs (P/P_c) es prácticamente horizontal, con un valor de 1

Probablemente, el procedimiento general que se basa más firmemente en términos de termodinámica estadística es el que se denomina habitualmente *método extendido de estados correspondientes*. Como se expone en el apartado siguiente, se trata de un método relativo que utiliza como referencia una sustancia de propiedades conocidas con precisión con la cual establece una comparación (por ejemplo, para los gases naturales, la sustancia de referencia es el metano).

(Ver [Ta91] y [LR57])

1.10 Estados correspondientes

Como ya se ha dicho en apartados anteriores, las ecuaciones que describen el comportamiento PvT de los gases reales conviene que sean, a efectos prácticos, las del comportamiento del gas ideal, afectadas por un simple factor de corrección que tenga en cuenta la desviación basada en un criterio válido para cualquier gas. Tal criterio se deriva del teorema de los estados correspondientes, expresado en términos de los parámetros de estado reducidos al estado crítico $f(P_r, v_r, T_r) = 0$, que es válido para cualquier gas.

Según el teorema de los estados correspondientes, los factores de compresibilidad Z de dos gases son iguales si los parámetros de estado reducidos de ambos $P_r = P/P_c$, $T_r = T/T_c$, son iguales. En el caso de las mezclas de gases, los parámetros de estado reducidos se han de sustituir por los parámetros pseudorreducidos P_{pr} y T_{pr} , definidos en términos de la presión y de la temperatura pseudocríticas P_{pc} y T_{pc} , ambas dependientes de la composición del gas, definidas como:

$$P_{pr} = P/P_{pc} \text{ y } T_{pr} = T/T_{pc} \quad (1.48)$$

Si la composición del gas es conocida, se pueden determinar los valores de P_{pc} y T_{pc} aplicando el principio de la aditividad. La *aditividad* significa que la masa molar, la presión y la temperatura pseudocríticas de una mezcla pueden expresarse como el resultado de la suma de los parámetros respectivos de los componentes, combinados con sus fracciones molares o en volumen.

Definidas la temperatura crítica, la presión crítica y el volumen molar crítico (o bien la densidad crítica), la ecuación de estado se puede expresar en términos de los parámetros reducidos:

$$T_r = \frac{T}{T_c}, \quad P_r = \frac{P}{P_c}, \quad v_r = \frac{v}{v_c}, \quad \rho_r = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.49)$$

Entonces, el factor de la compresibilidad reducido Z_r es:



$$Z = \frac{P_r v_r}{RT_r} \quad (1.50)$$

En los gases más comunes, su valor se sitúa en el intervalo $0,25 \leq Z \leq 0,30$.

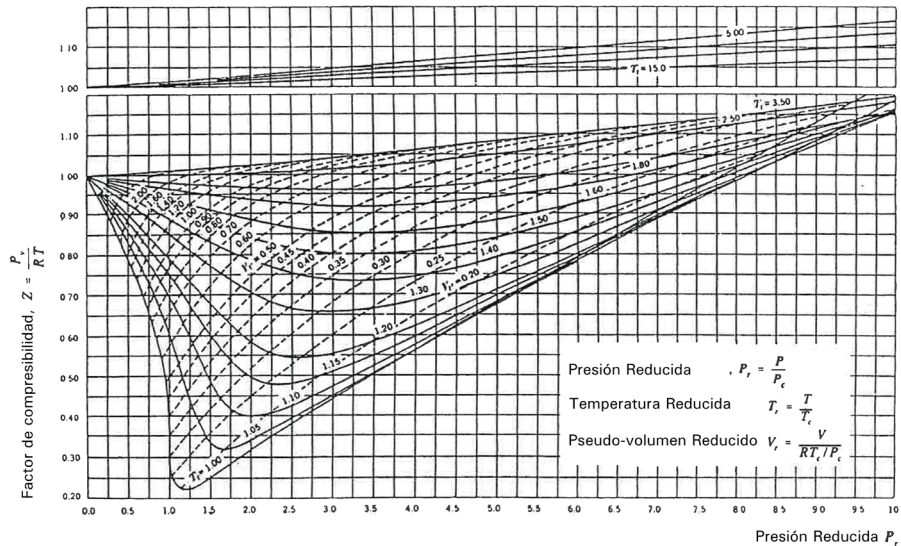
La figura 1.4 muestra el valor de Z en función de la presión y de la temperatura reducidas.

En el caso particular de los gases naturales,⁶ se ha desarrollado una única correlación para la predicción del factor de compresibilidad, que cubre el campo global que interesa de dichos gases. La ecuación de estado elegida para ese estudio fue una ecuación virial. La forma de la serie virial utilizada es la siguiente:

$$Z = \frac{P_v}{RT} = 1 + \frac{1}{v} \sum_{i,j=1}^n B_{ij} X_i X_j + \frac{1}{v^2} \sum_{i,j,k=1}^n C_{ijk} X_i X_j X_k \quad (1.51)$$

donde n es el número de componentes en el gas natural, y $X_i X_j$ y X_k representan las fracciones molares de los componentes i, j, k .

Fig. 1.4.
Valores de Z
en función de P_r
y T_r .



La ecuación virial 1.51 es el resultado de un procedimiento de aproximación razonable que conduce a una ecuación precisa del gas real para la predicción de los factores de compresibilidad de los gases naturales. Ahora bien, la predicción de ciertas propiedades mediante dicha ecuación, particularmente en condiciones extremas de presión y de temperatura, no sería suficientemente precisa para su aplicación práctica. De hecho, no existe una ecuación universal de estado que sea aplicable generalmente a todos los problemas. Cada ecuación de estado (Benedict-Webb-Rubin, Redlich-Kwong-Soave, British Gas y Peng-Robinson son las más utilizadas, en general) tiene sus propias ventajas y limitaciones particulares.



Resumiendo:

1. A bajas temperaturas y altas presiones, un gas resulta térmica y calóricamente imperfecto debido a las fuerzas intramoleculares. Entonces, $Z \neq 1$ y $h = h(P, T)$
2. A altas temperaturas y bajas presiones, $Z = 1$ y $h = h(T)$, pero $c_p = c_p(T)$, dado que la contribución al valor de c_p a partir de los modos de vibración depende de la temperatura.
3. A temperaturas todavía más altas, $Z \neq 1$ y $h = h(P, T)$, a causa de la disociación y de la ionización. En este caso, una buena aproximación es considerar que cada especie presente en un gas satisface la ecuación de estado de gas perfecto, de suerte que el error en la ecuación para el gas como un todo se debe principalmente al cambio en el número de partículas presentes por disociación e ionización. Entonces, el factor de compresibilidad es $Z = 1 + \varepsilon$, donde ε es el incremento fraccional en el número de partículas debido a aquellas causas. La figura 1.4 muestra los valores del factor de compresibilidad del aire en función de la temperatura para varias presiones.
4. Un gas es, a la vez, térmica y calóricamente perfecto si $T_c \ll T \ll T_v$ (temperatura característica para la energía de vibración) y $P \ll P_c$.

(Ver ref. 5 y 6)

1.11 Mezcla de gases

En general, los gases con que se opera en tecnología están constituidos por varias especies simples, que son sus componentes. Se trata realmente de una mezcla de gases cuyas propiedades dependen de las de los gases individuales componentes y de su proporción en la mezcla. Si la composición de un gas es conocida, se pueden determinar los valores de P , P_{pr} , T_{pr} , etc., aplicando las leyes de Dalton y de Amagat, o bien aplicando el principio de aditividad.

Consideremos una mezcla de varios gases perfectos que no interaccionan químicamente, por ejemplo, el aire atmosférico. Supongamos que los gases constituyentes, que denominaremos *especies*, están en equilibrio térmico, es decir, cada una de las especies y todas ellas se encuentran en la mezcla a la temperatura T . Satisfechos todos los requisitos, la presión estática y el volumen total de la mezcla se determinan aplicando las leyes de Dalton y de Amagat.

La ley de Dalton estipula que la presión de una mezcla de gases, denotada por P , es igual a la suma de las presiones parciales P_i de cada una de las especies. La presión parcial P_i se define como la presión que cada especie ejercería si ocupase el volumen total de la mezcla por sí misma a la temperatura de la mezcla T . Para una mezcla de n componentes, se expresa así:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad (1.52)$$



La ley de Amagat indica que el volumen V de una mezcla de n gases componentes es la suma de los volúmenes V_i que cada una de las especies ocuparía por sí misma a la presión P y a la temperatura T de la mezcla. Su expresión es:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (1.53)$$

Mediante estas leyes, y a partir del conocimiento de la fracción de masa C_i , de la masa molar \tilde{M}_i y de la constante de gas R_i de cada uno de los n componentes de la mezcla, se obtiene el valor de las siguientes magnitudes de la mezcla:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n V_i, \quad R = \sum_{i=1}^n C_i R_i = \tilde{R} / \tilde{M} \\ P &= \sum_{i=1}^n P_i = \frac{mT}{V} \sum_{i=1}^n C_i R_i \end{aligned} \quad (1.54)$$

Presión pseudorreducida $P_{pr} = P / P_{pc}$, donde:

$$P_{pc} = \sum_{i=1}^n C_i P_{ci} \quad (1.55)$$

es la presión crítica de la mezcla.

Temperatura pseudorreducida:

$$T_{pr} = T / T_{pc} \quad (1.56)$$

donde $T_{pc} = \sum_{i=1}^n C_i T_{ci}$ es la temperatura crítica de la mezcla.

Las funciones del estado termodinámico de la mezcla de gases se expresan, en términos de masa, de la forma siguiente:

– Energía interna por unidad de masa:

$$u = \sum_{i=1}^n C_i u_i; \quad c_v = \sum_{i=1}^n C_i c_{vi}; \quad u_i = \int_{T_0}^T c_{vi} dT + u_{i0} \quad (1.57)$$

– Entalpía por unidad de masa:

$$h = \sum_{i=1}^n C_i h_i; \quad c_p = \sum_{i=1}^n C_i c_{pi}; \quad h_i = \int_{(T_0)}^T c_{pi} dT + h_{i0} \quad (1.58)$$

– Entropía por unidad de masa:

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n C_i \phi_i - R \ln P - R \sum_{i=1}^n X_i \ln X_i, \\ \phi &= \int_{(T_0)}^T c_p (dT / T); \quad + h_{i0}; \quad X_i = C_i \tilde{M} / \tilde{M}_i \end{aligned} \quad (1.59)$$



Se supone que cada especie de una mezcla de gases se comporta como un gas perfecto. En la tabla 1.3, se dan los valores de temperatura, presión y densidad críticas de diversos gases y, en la tabla 1.4 se dan los valores de los parámetros físicos de algunos gases hidrocarburos en condiciones normales.

Gas	T_c (K)	P_c (bar)	ρ_c (kg/m ³)
Acetileno	308,85	63,45	231
Aire	132,45	37,66	310
Amoniaco	405,55	11,29	235
Dióxido de carbono	304,15	73,55	460
Nitrógeno	126,05	33,93	311
Cloro	417,15	76,98	573
Hidrógeno	33,25	12,95	31
Oxígeno	154,35	50,40	430
Vapor de agua	647,12	221,20	317,8

Tabla 1.3.
Valores de temperatura, presión y densidad críticas para diversos gases

Parámetro	CH ₄	C ₂ H ₆	C ₃ H ₈
Masa molar, \tilde{M} (kg / kmol)	16,042	30,068	44,094
Temperatura crítica, T_c (K)	190,6	305,5	370,0
Presión crítica, P_c (bar)	46,6	48,8	42,6
Densidad crítica (kg / m ³)	161,9	203,1	226,2
Volumen molar crítico, \tilde{V}_c	0,099	0,148	0,195
Densidad del gas en CN (kg / m ³)	0,675	1,265	1,855
Densidad relativa	0,554	1,038	1,522

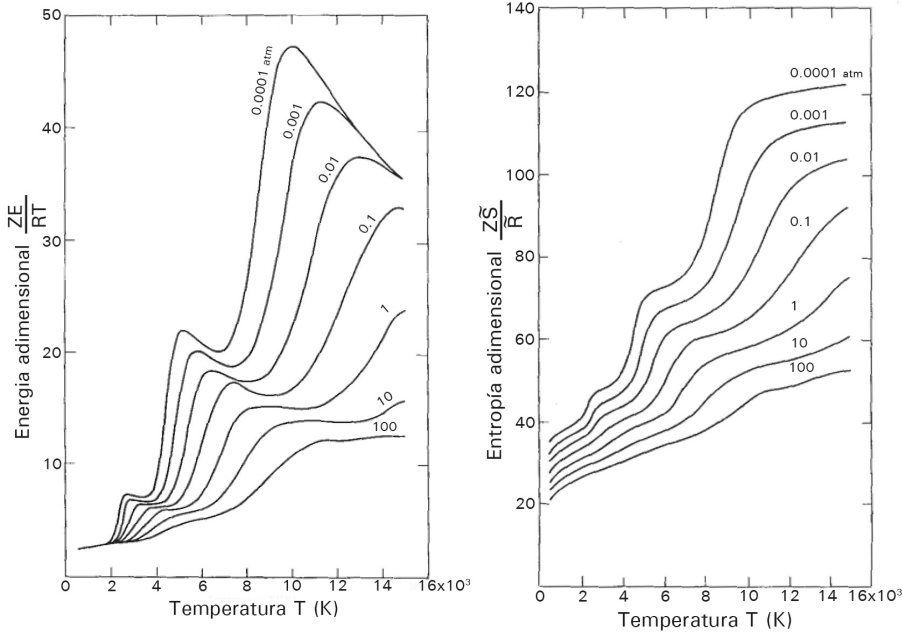
Tabla 1.4. Parámetros físicos de algunos gases hidrocarburos (T = 288,6 K; P = 1 bar)

Cuando un gas es una mezcla de diferentes especies (moléculas, átomos, iones y electrones), su energía viene dada por la suma de las energías de cada especie presente, o sea: $\tilde{E} = \sum x_i \tilde{E}_i$, expresión en que \tilde{E} es la energía por mol del gas, x_i es la fracción molar de cada especie presente y \tilde{E}_i es su energía por mol. Para cada estado, las fracciones molares se pueden determinar a partir de las constantes de equilibrio y la energía de cada una de las especies, a partir de las funciones de partición. La figura 1.5 muestra la energía interna del aire como una función de la temperatura a varias presiones, expresada en términos del parámetro adimensional $Z\tilde{E} / \tilde{R}T$.



Fig. 1.5. Izd.
Energía interna del
aire en función de
T,P

Fig. 1.6. drcha.
Entropía del aire ¹



La entropía de un gas que contiene n especies viene dada por:

$$\frac{\tilde{S}}{\tilde{R}} = \sum_{(i=1)}^n x_i \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{R}} - \sum_{(i=1)}^n x_i \ln x_i - \ln \frac{P}{P_0} \quad (1.60)$$

donde P_0 es un valor de referencia arbitrario, tomado habitualmente como 1 atmósfera, y \tilde{S}_i representa la entropía por mol de cada una de las especies en el gas, que puede determinarse a partir de la ecuación:

$$\frac{\tilde{S}_i}{\tilde{R}} = \ln F_{pt} + T \left(\frac{\partial \ln F_{pt}}{\partial T} \right)_p \quad (1.61)$$

La figura 1.8 muestra la entropía del aire como una función de la temperatura para varias presiones, expresada en términos del parámetro adimensional $Z\tilde{S}/\tilde{R}$. Para su cálculo, hay que tener presente que la composición de un gas a temperaturas elevadas cambia debido a cambios en la cantidad disociada e ionizada, lo cual provoca un cambio en la masa molecular media del gas. Como resultado de ello, la masa de un mol de gas a alta temperatura no es la misma que a baja temperatura. Si M_o es la masa molecular media de un gas no disociado y \bar{M} es la masa molecular media a una temperatura más alta, entonces $Z = M_o / \bar{M}$.

La figura 1.7 muestra los valores de Z en función de la temperatura para varios valores de presión. A partir del valor de Z , la energía por mol de un gas no disociado viene dada por:

$$Z\tilde{E} = Z \sum_{i=1}^n \tilde{E}_i x_i \quad (1.62)$$



De modo que el calor específico por mol de un gas no disociado es:

$$\begin{aligned} Z\tilde{c}_v &= \left(\frac{\partial Z\tilde{E}}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial}{\partial T} \left(Z \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{E}_i \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{E}_i \left(\frac{\partial}{\partial T} [\tilde{x}_i Z] \right) = \\ &= Z \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{c}_{vi} + \sum_{i=1}^n \tilde{E}_i \left(\frac{\partial}{\partial T} [\tilde{x}_i Z] \right) \end{aligned} \quad (1.63)$$

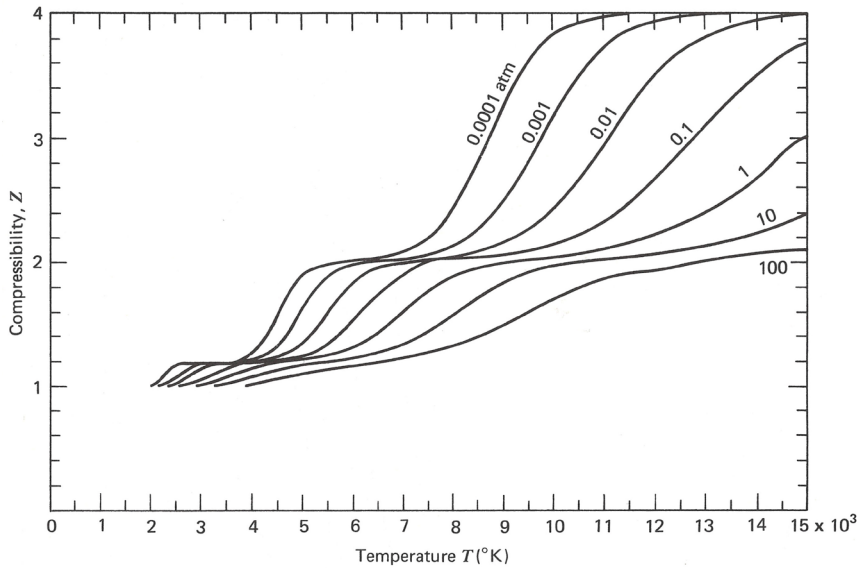


Fig. 1.7.
Valores de Z en
función de la tem-
peratura para va-
rios valores de
presión¹. [Sch82]

En la ecuación anterior, \tilde{c}_v es el calor específico del gas por mol a una temperatura y a una presión dadas, \tilde{E}_i es energía por mol de cada una de las especies presentes y \tilde{x}_i es su fracción molar. El segundo término de la ecuación tiene en cuenta el cambio de composición del gas debido a los cambios de temperatura. A veces, como cuando se trata de un flujo congelado, es más conveniente operar con el C'_v parcial, o calor específico congelado, definido por:

$$C'_v = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i C_{vi} \quad (1.64)$$

La Fig. 1.8 muestra el calor específico a volumen constante del aire en equilibrio, en función de la temperatura a varias presiones. Análogamente, en equilibrio, el calor específico del aire a presión constante por mol de gas no disociado viene dado por:

$$Z\tilde{C}_p = Z \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i (\tilde{C}_{vi} + \tilde{R}) + \sum_{i=1}^n (\tilde{E}_i + \tilde{R}T) \left(\frac{\partial}{\partial T} [\tilde{x}_i Z] \right) \quad (1.65)$$

A partir de las ecuaciones 1.63 y 1.65, se obtiene la relación de calores específicos γ . La figura 1.9 muestra una gráfica de γ en función de la temperatura a varias presiones.

En la figura 1.10, se dan los valores de los parámetros pseudocríticos P_c y T_c de los gases naturales, en función de la masa molar.



Fig. 1.8.
Calor específico a
volumen constan-
te del aire en
equilibrio, en fun-
ción de la tempe-
ratura a varias
presiones
[Sch82]

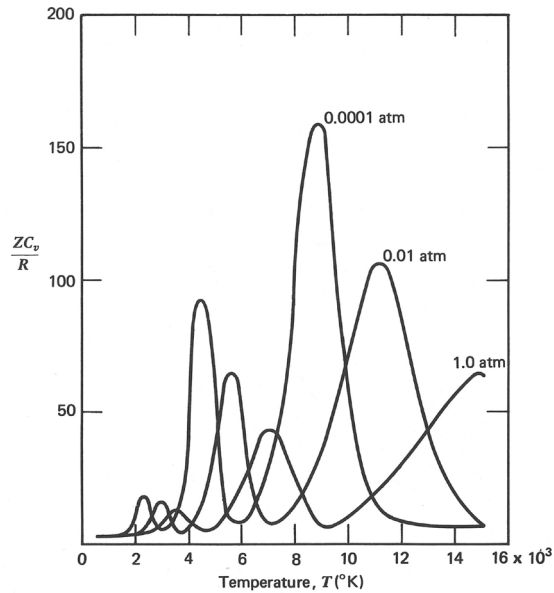


Fig 1.9.
Relación entre los
calores especí-
ficos del aire en
función de T a va-
rias
Presiones
[Sch82]

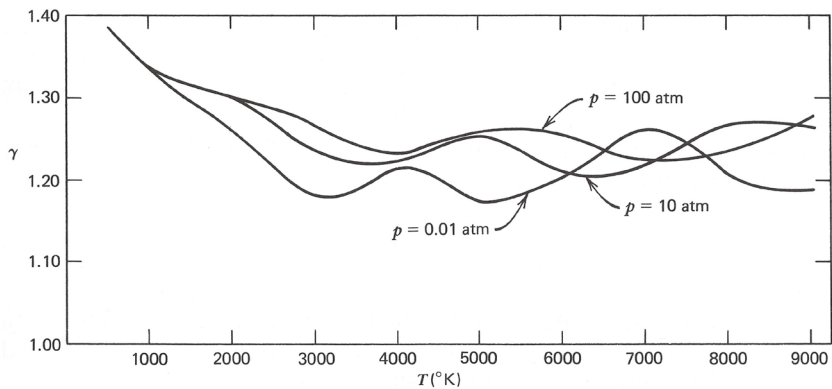
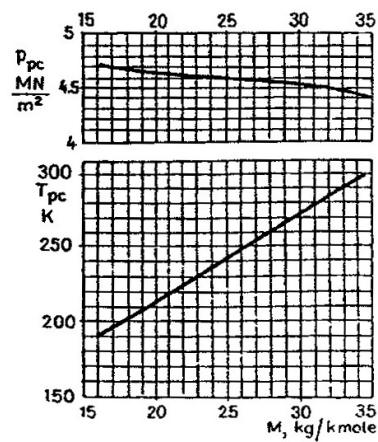


Fig. 1.10. Pará-
metros pseudocrí-
ticos del gas
natural: P_{pc}, T_{pc} vs.
 M [Kat59]





La figura 1.10 ilustra los valores de los parámetros reducidos del gas natural p_{pc} y T_{pc} en función de la masa molar y la figura 1.11 muestra la influencia de T_r y P_r en los valores de los calores específicos de los gases reales. La figura 1.13 muestra la variación del valor de $(c_p - c_v)$ de los gases reales en función de T_r y P_r .

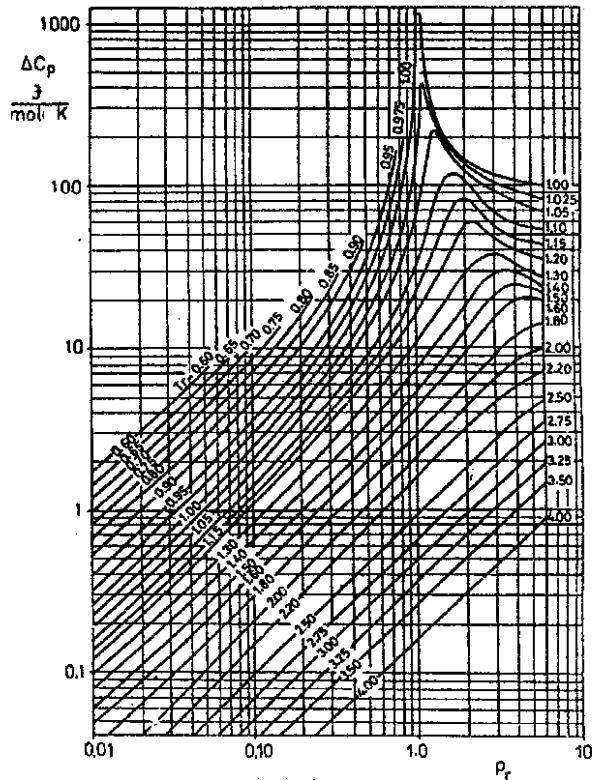


Fig. 1.11.
Corrección del valor de c_p en función de T_r y P_r [Kat59]

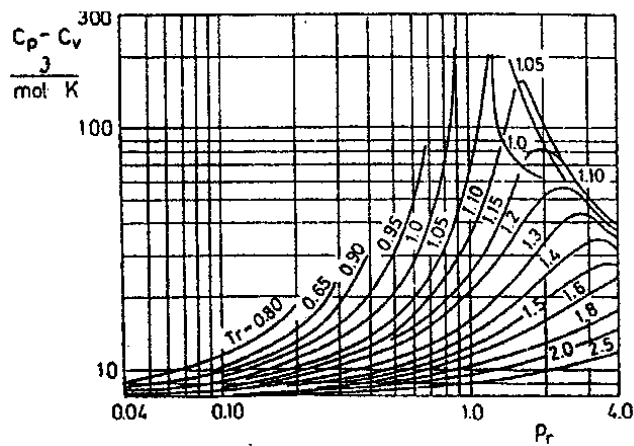


Fig. 1.12.
Variación de $(c_p - c_v)$ de los gases reales en función de T_r y P_r [Kat59]



1.12 Tablas de gas

Para calcular las relaciones entre P , v y T , la ecuación $Pv = RT$ da resultados considerados exactos para todos los gases cuando la presión es baja, y muy aproximados cuando la presión es una fracción grande de la presión crítica, siempre que la temperatura sea mucho mayor que la crítica. Para la resolución de muchos problemas de ingeniería que implican gases reales, dicha ecuación también es válida a efectos prácticos.

Ahora bien, cuando no se cumplen las condiciones especificadas, los resultados que se obtienen utilizando esta ecuación difieren considerablemente de los valores reales. Las desviaciones son inadmisibles, a los efectos de aplicar las propiedades termodinámicas de dichos gases en ingeniería, particularmente de sus calores específicos c_p, c_v , que varían significativamente con la temperatura. En tales casos, se requiere una ecuación de estado distinta, como la de Van der Waals o, incluso, una ecuación polinómica. Por ejemplo, para correlacionar los datos empíricos de c_p para diferentes gases en función de la temperatura T a que se encuentra el gas, se han propuesto varias ecuaciones polinómicas y exponenciales. Los valores de u y de h de un gas real pueden tabularse como funciones de la temperatura si, para su cálculo, se emplean los valores instantáneos de c_v y de c_p .

Para establecer la correlación de los valores empíricos de c_p de diferentes gases en función de su temperatura T , se han propuesto varias fórmulas; las más habituales son polinomios y ecuaciones exponenciales. Aquí se adoptan polinomios de la forma:

$$c_p = (a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4)R \quad (1.66)$$

Tabla 1.5.
Valores de los
coeficientes
[ZH76]

Gas	a	$b \cdot 10^3$	$c \cdot 10^6$	$d \cdot 10^9$	$e \cdot 10^{12}$	$h_o \cdot 10^{-3}$	ϕ_o	Temperature Range, K
O ₂	3.62560	-1.87822	7.05545	-6.76351	2.15560	-1.04752	4.30528	300–1000
	3.62195	0.736183	-0.196522	0.0362016	-0.00289456	-1.20198	3.61510	1000–5000
N ₂	3.67483	-1.20815	2.32401	-0.632176	-0.225773	-1.06116	2.35804	300–1000
	2.89632	1.51549	-0.572353	0.0998074	-0.00652236	-0.905862	6.16151	1000–5000
CO	3.71009	-1.61910	3.69236	-2.03197	0.239533	-14.3563	2.95554	300–1000
	2.98407	1.48914	-0.578997	0.103646	-0.00693536	-14.2452	6.34792	1000–5000
CO ₂	2.40078	8.73510	-6.60709	2.00219	0.000632740	-48.3775	9.69515	300–1000
	4.46080	3.09817	-1.23926	0.227413	-0.0155260	-48.9614	-0.986360	1000–5000
A	2.50000					-0.745375	4.36600	300–1000
	2.50000					-0.745375	4.36600	1000–5000
H ₂	3.05745	2.67652	-5.80992	5.52104	-1.81227	-0.988905	-2.29971	300–1000
	3.10019	0.511195	0.0526442	-0.0349100	0.00369453	-0.877380	-1.96294	1000–5000
H ₂ O	4.07013	-1.10845	4.15212	-2.96374	0.807021	-30.2797	-0.322700	300–1000
	2.71676	2.94514	-0.802243	0.102267	-0.00484721	-29.9058	6.63057	1000–5000
CH ₄	3.82619	-3.97946	24.5583	-22.7329	6.96270	-10.1450	0.866901	300–1000
	1.50271	10.4168	-3.91815	0.677779	-0.0442837	-9.97871	10.7071	1000–5000
C ₂ H ₄	1.42568	11.3831	7.98900	-16.2537	6.74913	5.33708	14.6218	300–1000
	3.45522	11.4918	-4.36518	0.761551	-0.0501232	4.47731	2.69879	1000–5000



En la ecuación 1.66, las unidades de c_p son las mismas que las de R . En la Tabla 1.5, se presentan los valores de los coeficientes de la ecuación 1.66 para el calor específico a presión constante de varios gases.

Para realizar el análisis termodinámico de procesos de dinámica de gases a temperatura elevada, las ecuaciones para el cálculo del valor del calor específico, como por ejemplo la ecuación 1.66, son, en general, demasiado engorrosas. Por ello, en la práctica, es habitual utilizar los valores que se encuentran en tablas *ad hoc*^{7,8}, que incluyen también otras propiedades termodinámicas pertinentes, como $u \cdot h$, P_r , T_r , γ , etc. Véase, por ejemplo, la tabla 1.6, que es una pequeña parte de la tabla general.

Los fundamentos de la elaboración de estas tablas se encuentran en las ecuaciones para un gas térmicamente perfecto: $du = c_v dT$ y $dh = c_p dT$. A partir de estas ecuaciones, se pueden tabular, en función de la temperatura, los valores u y h si se emplean los valores instantáneos de c_v y c_p . En efecto:

$$u = h - Pv = h - RT \quad (1.67)$$

$$h - h_0 = \int_{(T_0)}^T c_p(T) dT \quad (1.68)$$

Sustituyendo c_p por su ecuación 1.66, obtenemos:

$$h - h_0 R = \int_{T_0}^T (a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4) R dT \quad (1.69)$$

donde $h_0 R$ es el valor de h_0 en $T = T_0$ que incluye la energía de formación. Sus valores se presentan en tablas. Se trata de la entalpía absoluta, que es igual a la suma del cambio de entalpía sensible por encima de alguna temperatura de referencia, más la energía química requerida para formar las especies químicas a partir de los elementos que se encuentran naturalmente a dicha temperatura.

La temperatura de referencia es, generalmente, 298,15 K, y los elementos que se encuentran naturalmente son los gases H_2 , O_2 , N_2 , entre otros. Por definición, la energía de formación de las especies que se encuentran naturalmente es 0.

Resolviendo la integral de la ecuación 1.69, se obtiene:

$$h = \left(h_0 + aT + \frac{bT^2}{2} + \frac{cT^3}{3} + \frac{dT^4}{4} + \frac{eT^5}{5} \right) R \quad (1.70)$$

Con esta ecuación y con la ecuación 1.67, se obtienen los valores de la energía interna u .

Sabiendo que la entropía de un gas depende de su temperatura y de su presión, la compilación de una tabla de valores de entropía requiere calcularlos a diferentes temperaturas para varios valores de presión constante. A tal fin, se ha de integrar la ecuación de cambio de entropía de un gas perfecto, válida también para gases reales, con la condición de que c_p se exprese por una función de la temperatura, que en forma diferencial se expresa:



$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (1.71)$$

cuya integral es:

$$s - s_0 = \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T} - \ln \frac{P}{P_0} \quad (1.72)$$

Para la misma temperatura de referencia antes citada, $s_0 = 0$, y la integral $\int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T}$

define el parámetro ϕ , que es solo función de la temperatura. Sustituyendo c_p por la ecuación 1.66, que lo define, e integrando, se obtiene:

$$\phi = \left(\phi_0 + a \ln T + bT + c \frac{T^2}{2} + d \frac{T^3}{3} + e \frac{T^4}{4} \right) R \quad (1.73)$$

donde $\phi_0 R$ es el valor de ϕ en $T = T_0$.

Los valores de ϕ_0 y los de h_0 para varios gases a presión constante se presentan en la Tabla 1.5. Tabulados los valores de ϕ , un cambio de entropía se calcula mediante la ecuación:

$$s_2 - s_1 = \phi_2 - \phi_1 - R \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad (1.74)$$

Las presiones relativas y los volúmenes relativos se obtienen por procedimientos análogos. La tabla 1.6 es una reproducción parcial de la tabla general de propiedades termodinámicas del aire.



Tabla 1.6. Propiedades termodinámicas del aire (tabla parcial) [ZH76]

t	h	u	ϕ	p_r	v_r	c_p	c_v	γ	a
K	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg-K			kJ/kg-K	kJ/kg-K		m/s
260	261,173	186,546	6,5599	.61949+0	.12046+6	1,0036	.7165	1,4006	323,30
265	266,191	190,129	6,5790	.66216+0	.11487+6	1,0036	.7166	1,4006	326,39
270	271,209	193,712	6,5977	.70688+0	.10963+6	1,0036	.7166	1,4005	329,45
275	276,228	197,295	6,6161	.75372+0	.10472+6	1,0037	.7167	1,4005	332,48
280	281,246	200,879	6,6342	.80275+0	.10012+6	1,0038	.7168	1,4004	335,48
285	286,266	204,463	6,6520	.85401+0	.95787+5	1,0040	.7169	1,4004	338,46
290	291,286	208,048	6,6695	.90758+0	.91714+5	1,0041	.7171	1,4003	341,40
295	296,307	211,634	6,6866	.96352+0	.87879+5	1,0043	.7173	1,4002	344,32
300	301,329	215,221	6,7035	.10219+1	.84264+5	1,0045	.7175	1,4000	347,21
305	306,353	218,809	6,7201	.10827+1	.80853+5	1,0048	.7177	1,3999	350,08
310	311,377	222,398	6,7365	.11462+1	.77631+5	1,0050	.7180	1,3998	352,92
315	316,403	225,989	6,7525	.12122+1	.74585+5	1,0053	.7183	1,3996	355,73
320	321,430	229,581	6,7684	.12810+1	.71702+5	1,0056	.7186	1,3994	358,52
325	326,459	233,175	6,7840	.13525+1	.68971+5	1,0059	.7189	1,3993	361,29
330	331,489	236,770	6,7993	.14269+1	.66383+5	1,0063	.7193	1,3991	364,03
335	336,522	240,367	6,8145	.15041+1	.63928+5	1,0067	.7196	1,3989	366,75
340	341,556	243,966	6,8294	.15843+1	.61596+5	1,0071	.7200	1,3986	369,45
345	346,592	247,568	6,8441	.16676+1	.59380+5	1,0075	.7204	1,3984	372,12
350	351,631	251,171	6,8586	.17540+1	.57274+5	1,0079	.7209	1,3982	374,78
355	356,671	254,776	6,8729	.18436+1	.55268+5	1,0084	.7213	1,3979	377,41
360	361,714	258,384	6,8870	.19365+1	.53359+5	1,0089	.7218	1,3976	380,02
365	366,760	261,995	6,9009	.20327+1	.51539+5	1,0094	.7223	1,3974	382,62
370	371,808	265,608	6,9146	.21324+1	.49804+5	1,0099	.7229	1,3971	385,19
375	376,859	269,223	6,9282	.22355+1	.48148+5	1,0104	.7234	1,3968	387,74
380	381,912	272,842	6,9416	.23423+1	.46566+5	1,0110	.7240	1,3965	390,27
385	386,969	276,463	6,9548	.24527+1	.45055+5	1,0116	.7246	1,3961	392,79
390	392,028	280,087	6,9679	.25668+1	.43611+5	1,0122	.7252	1,3958	395,28
395	397,091	283,715	6,9808	.26848+1	.42229+5	1,0128	.7258	1,3955	397,76
400	402,156	287,345	6,9935	.28067+1	.40906+5	1,0134	.7264	1,3951	400,22
405	407,225	290,979	7,0061	.29326+1	.39640+5	1,0141	.7271	1,3948	402,66
410	412,297	294,616	7,0186	.30625+1	.38426+5	1,0148	.7277	1,3944	405,09
415	417,373	298,256	7,0309	.31967+1	.37263+5	1,0155	.7284	1,3940	407,49
420	422,452	301,900	7,0430	.33351+1	.36147+5	1,0162	.7292	1,3936	409,89
425	427,535	305,548	7,0551	.34778+1	.35075+5	1,0169	.7299	1,3933	412,26
430	432,621	309,199	7,0670	.36250+1	.34047+5	1,0177	.7306	1,3929	414,62
435	437,711	312,854	7,0787	.37768+1	.33059+5	1,0184	.7314	1,3924	416,96
440	442,805	316,513	7,0904	.39331+1	.32110+5	1,0192	.7322	1,3920	419,29
445	447,903	320,176	7,1019	.40942+1	.31197+5	1,0200	.7330	1,3916	421,60
450	453,005	323,843	7,1133	.42601+1	.30319+5	1,0208	.7338	1,3912	423,90
455	458,111	327,513	7,1246	.44309+1	.29474+5	1,0216	.7346	1,3907	426,18
460	463,221	331,188	7,1357	.46067+1	.28661+5	1,0224	.7354	1,3903	428,44
465	468,335	334,868	7,1468	.47877+1	.27877+5	1,0233	.7363	1,3898	430,70
470	473,454	338,551	7,1577	.49738+1	.27122+5	1,0242	.7371	1,3894	432,93
475	478,577	342,239	7,1686	.51653+1	.26395+5	1,0250	.7380	1,3889	435,16
480	483,704	345,931	7,1793	.53622+1	.25693+5	1,0259	.7389	1,3885	437,37
485	488,836	349,628	7,1900	.55647+1	.25017+5	1,0268	.7398	1,3880	439,57
490	493,973	353,329	7,2005	.57727+1	.24363+5	1,0278	.7407	1,3875	441,75
495	499,114	357,035	7,2109	.59865+1	.23733+5	1,0287	.7417	1,3870	443,92
500	504,260	360,746	7,2213	.62062+1	.23124+5	1,0296	.7426	1,3865	446,08
505	509,410	364,461	7,2315	.64318+1	.22536+5	1,0306	.7436	1,3860	448,22
510	514,566	368,182	7,2417	.66636+1	.21968+5	1,0316	.7445	1,3855	450,35
515	519,726	371,907	7,2518	.69015+1	.21419+5	1,0325	.7455	1,3850	452,47
520	524,891	375,637	7,2617	.71457+1	.20887+5	1,0335	.7465	1,3845	454,56
525	530,061	379,372	7,2716	.73963+1	.20374+5	1,0345	.7475	1,3840	456,67
530	535,236	383,112	7,2814	.76535+1	.19877+5	1,0355	.7485	1,3835	458,76
535	540,417	386,857	7,2912	.79173+1	.19395+5	1,0366	.7495	1,3829	460,83
540	545,602	390,607	7,3008	.81880+1	.18930+5	1,0376	.7506	1,3824	462,89

(Ver [ZH76])



Ejercicios

Ejercicio 1

Para un modelo idealizado de la composición del aire (su composición y propiedades se indican en la siguiente tabla, calcula, a una presión de 1 atm ($1,0133 \cdot 10^5$ Pa) y a una temperatura de 298,15 K, las propiedades siguientes:

- Las presiones parciales y las densidades de los tres gases.
- La presión y la densidad de la mezcla.
- La fracción en masa de las especies individuales.
- La constante del gas y el peso molecular de la mezcla.
- Sus calores específicos y la relación entre ellos.

Especies	% en vol.	% vol. corregido	M	C_p J/kg·K	γ	$C_v = C_p/\gamma$ J/kg·K	R J/kg·K
N ₂	78,084	78,11	28,013	1038,3	1,4	741,64	296,8
O ₂	20,9476	20,96	32	916,9	1,395	657,28	259,82
Ar	0,934	0,93	39,944	524,61	1,658	316,41	208,15

Resolución

Las características estándar del aire son:

$$T_{\text{abs}} = 288,16 \text{ K}$$

$$P_{\text{abs}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$R = 28.704 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$a_0 = 340,29 \text{ m/s}$$

$$\mu_0 = 1,7894 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$$

$$v_0 = 1,4607 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\lambda_0 = 6,6328 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$M = 28,9644 \text{ kg/kmol}$$

- a) Para calcular las presiones parciales, la expresión utilizada es:

$$P_i = P \cdot x_i = P(V_i / V)$$

Resulta

$$i(N_2) \rightarrow (V_i / V) = 78,11/100, P = 1,0133 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \rightarrow P(N_2) = 79.148,863 \text{ Pa}$$

$$i(O_2) \rightarrow 20,96/100 \quad \text{“} \quad P(O_2) = 21.238,768 \text{ Pa}$$

$$i(Ar) \rightarrow 0,93/100 \quad \text{“} \quad P(Ar) = 942,369 \text{ Pa}$$



b) La presión de la mezcla se determina mediante la ecuación de Dalton:

$$P_{mezcla} = \sum_i P_i, \quad i(N_2, O_2, Ar) \rightarrow$$

$$P_{mezcla} = 79.148,863 + 21.238,768 + 942,369 = 101.330 \text{ Pa}$$

La densidad de la mezcla se calcula mediante las ecuaciones

$$\rho_{mezcla} = \sum_i \rho_i, \quad \rho_i = (PM)_i / R_i T ; \quad i(N_2, O_2, Ar)$$

$$\rho_{mezcla} = \frac{1}{298,15 \cdot 8.314,3} (79.148,863 \cdot 28,013 + 21.238,768 \cdot 32 + 942,369 \cdot 39,944)$$

$$= 1,18377 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

c) Análogamente, la fracción en masa se calcula a partir de las densidades parciales:

$$C_i = \rho_i / \rho$$

$$C(N_2) = 0,89442 / 1,18377 = 0,75557$$

$$C(O_2) = 0,27417 / 1,18377 = 0,2316$$

$$C(Ar) = 0,01518 / 1,18377 = 0,0128$$

d) La constante del gas se obtiene a partir de las fracciones en masa, mediante la ecuación:

$$R_m = \sum_i C_i R_i = 0,75557 \cdot 296,8 + 0,2316 \cdot 259,82 + 0,0128 \cdot 208,15 =$$

$$= 287,09 \text{ J / kg} \cdot \text{K}$$

El peso molecular de la mezcla resulta $M = R_u / R_m = 8.314,3 / 287,09 = 28,96$

Los calores específicos se calculan también a partir de las fracciones en masa:

$$C_{p,m} = \sum_i C_i \cdot C_{p,i} = 0,75557 \cdot 1.038,3 + 0,2316 \cdot 916,9 + 0,0128 \cdot 524,61 =$$

$$= 1.003.577 \text{ J / kg} \cdot \text{K}$$

$$C_{v,m} = \sum_i C_i \cdot C_{v,i} = 0,75557 \cdot 741,64 + 0,2316 \cdot 657,28 + 0,0128 \cdot 316,41 = 715,971 \text{ J / kg} \cdot \text{K}$$

Entonces,

$$\gamma_m = C_{p,m} / C_{v,m} = 1.003,577 / 715,971 = 1,4017$$

(Ver [ZH76])

**Ejercicio 2**

Halla la masa molar y los parámetros pseudocríticos de estado a una presión de 88 bar y a una temperatura de 280 K del gas natural húmedo, cuya composición y constantes físicas de sus componentes se dan en la tabla siguiente:

Componente	Fracción molar z_i	Masa molar [kg/Kmol]	T_c [K]	P_c 10^5Pa
Metano	0,790	16,042	190,76	46,42
Etano	0,100	30,068	305,00	48,90
Propano	0,055	44,094	369,10	42,55
Isobutano	0,010	58,120	410,00	36,00
n-butano	0,015	58,120	426,67	38,00
n-pentano	0,024	72,146	470,83	33,75
CO ₂	0,001	40,010	300,00	80,00
N ₂	0,005	28,016	120,00	34,00

- h) Calcula, a dicha presión y temperatura, T_{sr} y P_{sr} .
- i) Determina los parámetros pseudorreducidos de estado de un gas de masa molar $M = 21,5$ a 280 K de temperatura y 88 bar de presión, a partir de los datos de la figura adjunta, y compara su valor con el que se obtiene de la fórmula a partir de los datos de la tabla.
- j) ¿Qué valor tiene el factor de compresibilidad z del gas?

Resolución

- a) La presión pseudocrítica se obtiene a partir de las presiones parciales de los componentes de la mezcla:

$$P_{sc} = \sum z_i P_{ci} = 0,79 \cdot 46,42 + 0,10 \cdot 48,9 + 0,055 \cdot 42,55 + 0,010 \cdot 36 + 0,015 \cdot 38 + 0,024 \cdot 33,75 + 0,001 \cdot 80 + 0,005 \cdot 34 = 45,89 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

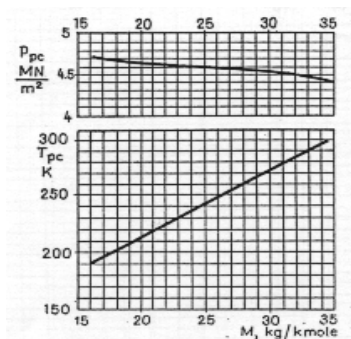
Análogamente, la temperatura pseudocrítica:

$$T_{sc} = \sum z_i T_{ci} = 0,79 \cdot 190,76 + 0,10 \cdot 305 + 0,055 \cdot 369,10 + 0,010 \cdot 410 + 0,015 \cdot 426,67 + 0,024 \cdot 470,83 + 0,001 \cdot 300 + 0,005 \cdot 120 = 224,2 \text{ K}$$

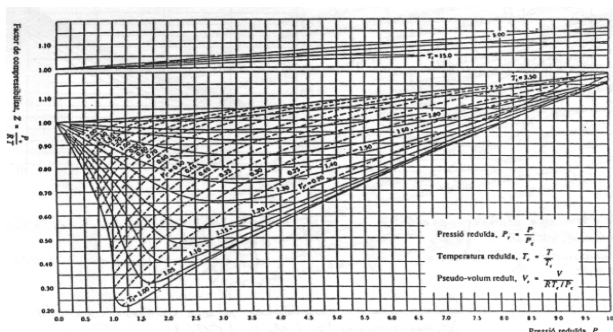
- b) Los valores de presión y temperatura pseudorreducidos son:

$$P_{sr} = P / P_{sc} = 88 \cdot 10^5 / 45,89 \cdot 10^5 = 1,917 ;$$

$$T_{sr} = T / T_{sc} = 280 / 224,2 = 1,2488$$



T y P pseudocríticas



Factor de compresibilidad

De la primera gráfica para $M = 21,5 \text{ kg/kmol}$, se obtiene: $T_{sc} = 220 \text{ K}$ y $P_{sc} = 4,65 \text{ MN/m}^2$, valores muy próximos a los calculados.

El valor del factor de compresibilidad se obtiene de la segunda gráfica para los valores de P_{sr} y T_{sr} determinados por los valores de P_{sc} y T_{sc} anteriores, o sea:

$$P_{sr} = P / P_{sc} = 88,10^5 / 46,5 \cdot 10^5 = 1,89 ; \quad T_{sr} = T / T_{sc} = 280 / 220 = 1,27$$

Con estos valores, se obtiene a partir de la segunda gráfica $z = 0,67$

(Ver [Vi93])

Ejercicio 3

Sabiendo que, en la troposfera, la variación de la temperatura con la altitud ha sido definida mediante la expresión:

$$T \approx T_o - \alpha z$$

donde T_o es la temperatura de la atmósfera normal al nivel del mar, para la cual se ha adoptado, por acuerdos internacionales, el valor de 288,1 K, y α es la tasa de disminución de temperatura con la altitud, cuyo valor es 0,0065 K/m.

Se pregunta:

- 1) Calcula la presión normal atmosférica a una altitud de 2.500 m.
- 2) Calcula dicha presión a la misma altitud en el supuesto de que la temperatura fuera constante e igual a su valor normal al nivel del mar.
- 3) Calcula el error que se comete al calcular la citada temperatura a partir de la hipótesis anterior.

Se tomará $P_o = 101,3 \text{ KPa}$

**Resolución:**

- 1) En un volumen diferencial de aire en la atmósfera, se cumple: $dP = -\rho g dz$

Asimilando el aire a un gas perfecto, su densidad es $\rho = P / RT$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$dP = -(P / RT) g dz = -[P / R(T_0 - \alpha z)] g dz$$

Integrando entre $z=0$ y $z=2500$ m, se obtiene:

$$\int_0^{2500} \frac{dP}{P} = - \int_0^{2500} \frac{g}{R(T_0 - \alpha z)} dz$$

Introduciendo el cambio de variable $u = T_0 - \alpha z$, $du = -\alpha dz$, se obtiene:

$$\int_0^{2500} \frac{dP}{P} = \int_0^{2500} \frac{g}{R\alpha u} du \rightarrow \ln[P]_0^{2500} = \frac{g}{R\alpha} \ln[T_0 - \alpha z]_0^{2500}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\ln\left(\frac{P_{2500}}{P_0}\right) = \frac{9,81}{287,04 \cdot 0,0065} \ln\left(\frac{288,1 - 0,0065 \cdot 2500}{288,1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P}{101,3 \cdot 10^3}\right) = -0,30519 \rightarrow P = 74656,4 \text{ Pa}$$

- 2) La presión a la misma altitud, si la temperatura es constante e igual a su valor normal al nivel del mar, se calcula integrando la ecuación $\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT_0} dz$ con los mismos límites de z .

$$\text{Resulta } \ln\left(\frac{P}{101,3 \cdot 10^3}\right) = -\frac{9,81}{287,04 \cdot 288,16} (2.500 - 0) \rightarrow P = 75.307,58 \text{ Pa}$$

- 3) Error cometido $\varepsilon = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{10^5 (0,753076 - 0,746564)}{10^5 \cdot 0,746564} \cong 0,873 \%$

(Ver [Vi93])



Ejercicio 4

En el punto crítico $(\partial P / \partial v)_T = (\partial^2 P / \partial v^2)_T = 0$, calcula $K = P_c v_c / RT_c$ por la ecuación de estado de Van der Waals:

$$P = RT \left[\frac{1}{v - \beta} - \frac{\alpha}{RTv^2} \right]$$

y por la de Dieterici

$$P = \frac{RT}{v - \beta} \exp \left[-\frac{\alpha}{RTv} \right]$$

Compara los valores calculados de K con los de la tabla

Gas	P_c (bar)	T_c (°K)	$P_c v_c / RT_c$	θ_v (K)	θ_D (K)	M
O ₂	50,346	154,3	0,292	2230	59.000	32
N ₂	33,935	126,0	0,292	3340	113.300	28,016
NO	65,845	179,1	0,255	2690	75.500	30,008
H ₂	12,966	33,2	0,306	6100	52.400	2,016
He	2,289	5,2	0,306	-	-	4,003
A	48,624	151,1	0,291	-	-	39,944
CO ₂	73,949	304,2	0,280	654	40.000	44,01

K : constante de Boltzmann = $1,380 \cdot 10^{-16}$ erg.K⁻¹

h : constante de Planck = $6,625 \cdot 10^{-27}$ ergios

θ_v : temperatura característica de la energía de vibración

θ_D : temperatura de disociación

Resolución:

1. Cálculo de K por la ecuación de Van der Waals:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T \rightarrow \frac{-RT}{(v - \beta)^2} + \frac{2\alpha}{v^3} = 0 \rightarrow \frac{RT}{(v - \beta)^2} = \frac{2\alpha}{v^3} \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)_T \rightarrow \frac{2RT}{(v - \beta)^3} - \frac{6\alpha}{v^4} = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo la igualdad (1) en la ecuación (2), resulta:

$$\frac{4\alpha}{(v - \beta)v^3} - \frac{6\alpha}{v^4} = 0 \rightarrow \frac{2v}{(v - \beta)} = 3 \rightarrow v_c = 3\beta$$



Introduciendo este valor de v_c en la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{2RT}{(2\beta)^3} - \frac{6\alpha}{(3\beta)^4} = 0 \quad (3)$$

de donde resulta:

$$T_c = \frac{8\alpha}{27\beta R}$$

Ahora, incorporando los valores de v_c y T_c en la ecuación de Van der Waals, se obtiene:

$$P = R(8\alpha / 27\beta R) \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\alpha}{R(8\alpha / 27\beta R)9\beta^2} \right] \rightarrow P_c = \alpha / 27\beta^2 \quad (4)$$

Sustituyendo en la fórmula de K los valores calculados de v_c , T_c y P_c , resulta:

$$K = \frac{P_c v_c}{RT_c} = \frac{1}{R} \frac{\alpha}{27\beta^2} \frac{27\beta R}{8\alpha} 3\beta \rightarrow K = 0,375$$

2. Cálculo de K a partir de la ecuación de Dieterici

En el estado crítico:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{RT}{v-\beta} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) \right] = -\frac{RT}{(v-\beta)^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) + \frac{RT}{(v-\beta)} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) \frac{\alpha RT}{(RTv)^2} = 0$$

y se obtiene:

$$\frac{1}{v-\beta} = \frac{\alpha}{RTv^2} \rightarrow T_c = \frac{\alpha (v-\beta)}{R v^2} \quad (5)$$

A su vez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\frac{RT}{v-\beta} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) \right] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left[-\frac{RT}{(v-\beta)^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) + \frac{RT}{(v-\beta)} \exp\left(-\frac{\alpha}{RTv}\right) \frac{\alpha RT}{(RTv)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Ejecutando el operador, ordenando y agrupando términos, se obtiene:

$$-\alpha RT_c (v_c - \beta) (3v_c^2 - 2\beta v_c) + 2(RT_c)^2 v_c^4 + \alpha^2 (v_c - \beta)^2 - v_c^2 (v_c - \beta) RT_c \alpha = 0 \quad (6)$$

Sustituyendo en la ecuación (6) el valor de α obtenido de la ecuación (5) y simplificando, resulta:

$$-3v_c^2 + 2\beta v_c + 2v_c^2 = 0 \rightarrow \beta = v_c / 2 \quad (7)$$

Aplicando este valor de β a la ecuación (5), se obtiene:

$$\alpha = 2Rv_c T_c \quad (8)$$

Por último, sustituyendo los valores de α y β en la ecuación de estado, se halla el valor de K:

$$P = \frac{RT_c}{v_c - v_c / 2} \exp \left[-\frac{2RT_c v_c}{RT_c v_c} \right] = \frac{2RT_c}{v_c} e^{-2} \rightarrow K = \frac{P_c v_c}{RT_c} = \frac{2}{e^{-2}} = 0,271$$

→2



Fenómenos de transporte a nivel molecular: coeficientes de transporte

2.1 Introducción

El origen de los fenómenos de transporte se encuentra en las propiedades moleculares de las sustancias en estado fluido. Como consecuencia de la energía interna de la sustancia, todas sus moléculas tienen una velocidad de mezcla aleatoria, además de su velocidad media, suponiendo que el fluido está en movimiento.

En un fluido en equilibrio, se supone que la velocidad media de la agitación molecular es nula y que la distribución espacial de sus magnitudes físicas es uniforme. La experiencia enseña que, si el fluido no es homogéneo o la distribución espacial de sus magnitudes físicas no es uniforme, se producen en su interior fenómenos que tienden a que el fluido alcance el equilibrio. Así, por ejemplo, la no uniformidad de la distribución de la temperatura en el interior del fluido da lugar a un flujo de calor de la región caliente a la fría; la no uniformidad del campo de velocidades produce un flujo de cantidad de movimiento a nivel molecular, con la consiguiente aparición de fuerzas superficiales o de fricción interna, que tienden a frenar el movimiento, y la no uniformidad de la distribución de la concentración de especies en el seno de un fluido genera un flujo específico de masa de especies en la dirección de la concentración decreciente.

Estos fenómenos de transporte se distinguen de otros relacionados con el movimiento macroscópico del fluido y/o con las fluctuaciones de velocidad, de carácter aleatorio en un régimen turbulento, que son los transportes por convección.

Cualquiera que sea el mecanismo del fenómeno de transporte, este siempre es irreversible y contribuye al incremento de la entropía del fluido.



Los fundamentos del transporte a nivel molecular de calor, de cantidad de movimiento y de masa son similares. Las leyes correspondientes (macroscópicas) de Fourier, de Newton y de Fick representan proporcionalidades entre flujos (de calor, de cantidad de movimiento y de masa) y gradientes (de temperatura, de velocidad y de concentración). Los correspondientes coeficientes de proporcionalidad, o coeficientes de transporte, son la conductividad térmica, la viscosidad dinámica y la difusión de masa.

En la tabla 2.1, se muestra la analogía entre los tres procesos de transporte a nivel molecular.

Tabla 2.1.
Procesos de
transporte a nivel
molecular

Propiedad	Ley	Flujo	Difusividad	Fuerza
Calor (J)	Fourier $\vec{q} = -K \cdot \nabla T$	Calor (J/m ² .s)	Térmica $\alpha = \frac{K}{\rho c_p}$ (m ² /s)	Gradiente de temperatura ∇T (°C/m)
Masa (kg)	Fick $\vec{j}_A = -D \cdot \nabla C_A$	Masa (kg/m ² .s)	Molécula D (m ² /s)	Gradiente de concentración ∇C_A (kg.m ⁻⁴)
Cantidad de movimiento	Newton $\tau = -\mu \cdot \nabla v$	Cantidad de movimiento (N/m ²)	Viscosidad cinemática $\nu = \mu / \rho$ (m ² /s)	Gradiente de velocidad $\nabla \vec{v}$ (s ⁻¹)

2.2 Propiedades del transporte a nivel molecular: coeficientes de transporte

Las propiedades del transporte a nivel molecular de los gases y los vapores son:

- (i) Conductividad térmica
- (ii) Viscosidad dinámica
- (iii) Difusión de masa

2.2.1 Transporte de calor por conducción

La experiencia enseña que los gradientes de temperatura en un fluido dan lugar a un flujo específico de calor en él. El fenómeno se denomina *conducción de calor*.

La ecuación fenomenológica es una simple proporcionalidad:

$$\vec{q} \propto \nabla T \quad (2.1)$$

Esta relación es, en principio, lineal, y se conoce como la *ley de Fourier*:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \nabla T; \text{ o bien } q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

Se considera “en principio lineal”, dado que, como se verá más adelante, la conductividad térmica de los gases a bajas presiones depende de la temperatura, con lo cual la ecuación 2.2 deja de ser lineal.



Conductividad térmica, λ

A excepción del hidrógeno ($\lambda = 0,18 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ a 300 K) y del helio ($\lambda = 0,15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ a 300 K), las conductividades térmicas de los gases y de los vapores se encuentran en el intervalo $0,01 < \lambda < 0,025 \text{ (W/m}\cdot\text{K)}$.

La conductividad térmica de los gases se explica por la teoría cinética como el intercambio de energía en las colisiones entre las moléculas de un gas. Por tanto, λ está relacionada con la capacidad calorífica por unidad de volumen del gas \tilde{c}_v/\tilde{v} , la velocidad media v y el recorrido libre medio, l .

$$\lambda = \frac{1}{3} \frac{\tilde{c}_v}{\tilde{v}} v l \text{ (W / m}\cdot\text{K)}; \text{ o bien } \lambda = \eta \frac{\tilde{c}_v}{\tilde{M}} \quad (2.3)$$

donde η es la viscosidad del gas.

En realidad, la ecuación 2.3 debe modificarse mediante un factor de corrección que incorpora la relación $\tilde{c}_p / \tilde{c}_v$. Eucken propone la ecuación siguiente:

$$\lambda = \frac{\tilde{c}_v}{\tilde{M}} \left(\frac{g \cdot \gamma - 5}{4} \right); \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.4)$$

La relación de Eucken da una buena aproximación en el intervalo de presiones de 0,1 a 10 bar y en el intervalo de temperaturas de 80 a 1.000 K.

A bajas presiones, la conductividad térmica de los gases aumenta con la temperatura. En los gases monoatómicos y diatómicos, el aumento de la conductividad es casi lineal

(proporcional) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

Para los vapores orgánicos, Owens y Thodos¹ recomiendan:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^m; \text{ con } m=1,786 \quad (2.5)$$

La conductividad térmica del aire a temperaturas elevadas se calcula mediante la relación:

$$\frac{\lambda}{\lambda_r} = \left(\frac{T}{T_r} \right)^\chi, \text{ con } \langle \chi \rangle \approx 0,85 \quad (2.6)$$

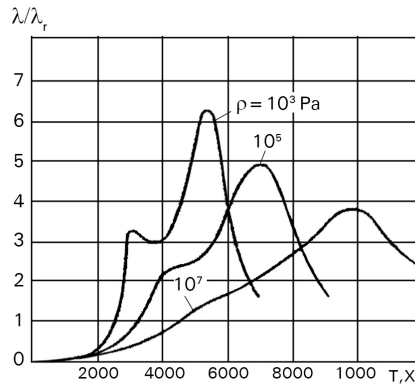
donde λ_r (conductividad de referencia a $T_r = 261 \text{ K}$) se toma igual a $23,2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}\cdot\text{K}$ (v. figura 2.1 [Ca72]).

Al aumentar la presión, la conductividad térmica de los gases también aumenta. A muy bajas presiones (del orden de 0,001 bar), el recorrido libre medio de las moléculas está parcialmente o totalmente limitado por las paredes que confinan el volumen de gas. A este nivel de presión, la conductividad térmica aumenta linealmente con la presión. Por encima de 0,001 bar, el aumento de λ es del orden de magnitud de un 1 % por 1 bar de aumento de presión.



Fig. 2.1.

Variación de $\frac{\lambda}{\lambda_r}$
en función de T y P



Para los gases diatómicos, con la excepción del hidrógeno, Schaefer y Thodos² desarrollaron una relación de estados correspondientes (v. figura 2.4).

Stiel y Thodos³ demostraron, mediante el análisis dimensional, que el aumento de la conductividad térmica con la variación de presión es una función del incremento de densidad. La figura 2.3 y la tabla 2.2 muestran una correlación de $(\lambda - \lambda_0)$ vs ρ_r , o sea, en función de la densidad reducida. La correlación se puede aproximar por la ecuación:

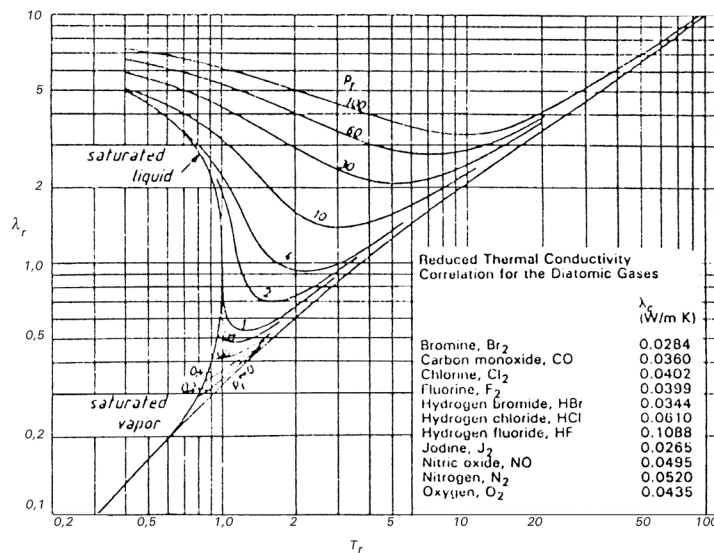
$$1,139 \cdot 10^{-8} \cdot (e^{1,124} \cdot r_r - 0,995); 0,04 < r_r < 0,06 \quad (2.7)$$

$$(\lambda - \lambda_0) \frac{M^{1/2} \cdot T_c^{1/6}}{P_c^{2/3}} \cdot Z_c^5 \cdot 10^8 = 2,327 \cdot 10^{-8} \cdot (e^{0,690} \cdot r_r - 1,057); 0,6 < r_r < 2,0 \quad (2.8)$$

$$0,0547 \cdot 10^{-8} \cdot (e^{1,956} \cdot r_r - 79,70); 2,0 < r_r < 2,8 \quad (2.9)$$

donde λ se expresa en W/m·K; T_c , en K, y P_c , en Pa.

Fig. 2.2.
Conductividad térmica reducida
 $\lambda_r = \lambda / \lambda_c$ de
gases diatómicos
en función de T_r
y ρ_r [PG84]



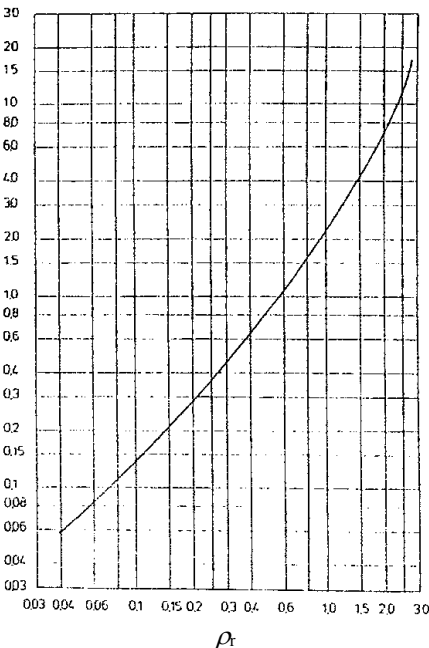


Fig. 2.3.
Conductividad térmica residual $(\lambda - \lambda_0)$ correlacionada con la densidad reducida, ρ_r^3

ρ_r	$f(\rho_r)$	ρ_r	$f(\rho_r)$	ρ_r	$f(\rho_r)$	ρ_r	$f(\rho_r)$
0,040	0,059	0,175	0,252	0,80	10,65	20,00	70,09
0,060	0,087	0,200	0,291	10,00	20,28	20,20	80,62
0,080	0,112	0,250	0,374	10,20	20,99	20,40	10,43
0,100	0,142	0,300	0,467	10,40	30,84	20,60	12,99
0,125	0,177	0,400	0,654	10,60	40,73	20,80	17,52
0,150	0,213	0,600	10,099	10,80	50,81		

Tabla 2.2.
Tabulación de $(\lambda - \lambda_0) \frac{M^{1/2} T_c^{1/6}}{P_c^{2/3}} \cdot Z_c^5 \cdot 10^8$ como función de ρ_r

2.2.2 Transporte molecular de cantidad de movimiento

La teoría cinética de los gases permite elaborar un modelo sencillo mediante el cual se puede explicar cómo, del transporte molecular de cantidad de movimiento, resultan esfuerzos tangenciales que están relacionados con el gradiente de velocidad por un coeficiente de transporte denominado *viscosidad del gas*.

A partir de la teoría cinética de Maxwell y Boltzmann, se llega a las definiciones siguientes de magnitudes y parámetros de equilibrio de un gas:

- Velocidad media cuadrática de agitación molecular, \bar{v}

$$\bar{v} = \left\{ \frac{8 \cdot K \cdot T}{\pi \cdot m} \right\}^{1/2} \tag{2.10}$$



donde K es la constante de Boltzmann; T , la temperatura absoluta, y m , la masa de una molécula.

- Frecuencia de bombardeo molecular por área unidad sobre la cara de una superficie en contacto con el gas, z :

$$z = (1/4)n\bar{v} \quad (2.11)$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen.

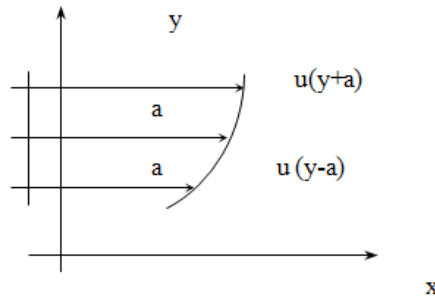
- Recorrido libre molecular:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n} \quad (2.12)$$

- Distancia media de colisión molecular:

$$a = \frac{2}{3}\lambda \quad (2.13)$$

Fig. 2.4.
Distribución de velocidad



Si admitimos que, en el movimiento unidireccional de un gas, su velocidad es una función de la distancia al contorno (v. figura 2.4), aplicando el teorema del flujo de cantidad de movimiento a una capa de fluido situada a una distancia y del contorno, resulta:

$$\tau_{xy} = z \cdot \{m \cdot u \cdot (y - a) - m \cdot u \cdot (y + a)\}$$

Desarrollando en serie de Taylor, obtenemos:

$$u(y - a) = u(y) - a \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \quad u(y + a) = u(y) + a \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots$$

$$u(y - a) = u(y) - a \frac{\partial u}{\partial y} + \dots$$

Combinando la definición de τ_{xy} con las expresiones anteriores se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{3} n \cdot m \cdot \bar{v} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.14)$$



que relaciona τ_{xy} con $\frac{\partial u}{\partial y}$

El coeficiente de proporcionalidad $\frac{1}{3} n \cdot m \cdot \bar{v} \cdot \lambda$ es igual a:

$$\frac{2}{3} \frac{\sqrt{m \cdot K \cdot T}}{\pi^{1/2} \cdot d^2} \quad (2.15)$$

que es una aproximación del valor de la viscosidad de un gas monoatómico a baja presión.

Tanto la ecuación 2.15 como la derivada a partir del potencial de interacción molecular definido por la ecuación de Lennard-Jones expresan que la viscosidad es una función de la raíz cuadrada de la masa molecular y la temperatura, únicamente. Por el contrario, los resultados experimentales evidencian que la influencia de la temperatura es mayor (proporcional a $T^{1/2}$) y, además, ponen de manifiesto la influencia no despreciable de la presión a que se encuentra el gas. Por consiguiente, en los problemas de ingeniería, se han de utilizar valores de viscosidad experimentales, que se encuentran tabulados en manuales de constantes físicas. No obstante, cuando se dispone de valores experimentales, los valores de viscosidad de un gas, o de un vapor, en un estado termodinámico dado, se pueden calcular con una buena aproximación mediante alguna de las fórmulas empíricas que se dan a continuación.

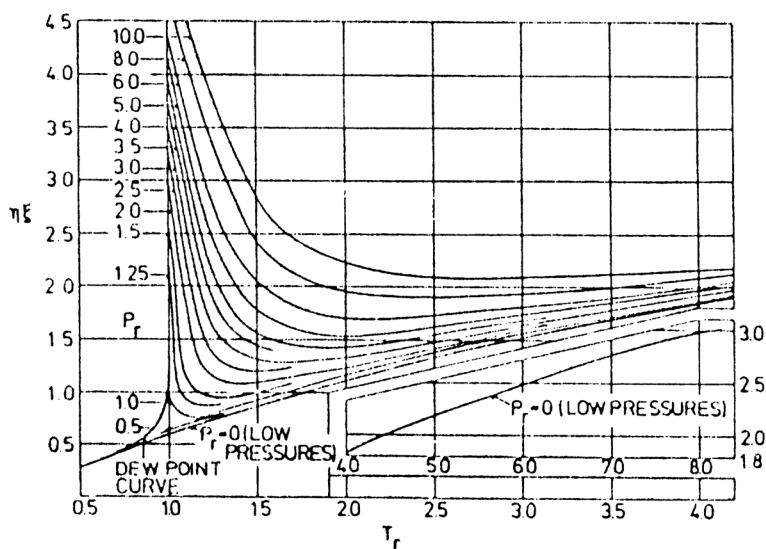


Fig. 2.5.
Viscosidad generalizada $\eta\xi$ en función de la temperatura y de la presión reducida [Lu74]

A partir de la representación de viscosidad generalizada $\eta\xi = f(T_r, P_r)$ (v. figura 2.5) y de la ecuación de Lucas⁴ para la determinación de ξ :

$$\xi = 3,8 \cdot 10^9 \frac{T_C^{1/6}}{\tilde{M}^{1/2} \cdot P_C^{2/3}} \quad (2.16)$$



Donde \tilde{M} es la masa molecular (kg/kmol), P_c es la presión crítica (Pa) y T_c es la temperatura crítica (K). El valor de ξ se expresa en $\text{m}^2/\text{N}\cdot\text{s}$.

Algunos valores de ξ son:

Gas	He	Ne	Ar	H ₂	N ₂	O ₂	Cl	Aire	Metano
ξ	0,670	0,0816	0,0483	0,403	0,0712	0,0527	0,0316	0,0656	0,08183

La influencia de la temperatura sobre la viscosidad está definida por varias ecuaciones; entre ellas las siguientes:

$$\text{Bromley y Wilke}^5 \quad \mu = 33,3 \frac{(\tilde{M} \cdot T_c)^{1/2}}{\tilde{V}_c^{2/3}} \{f(1,33 \cdot T_r)\} \quad (2.17)$$

Donde \tilde{M} (g/g·mol) es la masa molecular; μ (micropoises) la viscosidad; T_c (K) la temperatura crítica; \tilde{V}_c (cc/g·mol) el volumen crítico y $f(1,33 \cdot T_r)$ es una función de la temperatura reducida del gas dada por la ecuación de Scheibe.

$$f(1,33 \cdot T_r) = 1,058 \cdot T_r^{0,645} - \frac{0,261}{(1,9 \cdot T_r)^{0,9 \cdot \log(1,9 \cdot T_r)}} \quad (2.18)$$

$$\text{Sutherland: } \mu = \mu_0 \left\{ \frac{273 + C}{T + C} \right\} \left\{ \frac{T}{273} \right\}^{2/3} \quad (2.19)$$

donde C es un parámetro que depende de la naturaleza del gas. Como variante de la ecuación, tenemos:

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{T_r}{T_{r1}} \right)^{3/2} \left\{ \frac{T_{r1} + 0,8}{T_r + 0,8} \right\} \quad (2.20)$$

y:

$$\mu = \mu_1 \frac{f(1,33 \cdot T_r)}{f(1,33 \cdot T_{r1})} \quad (2.21)$$

A temperaturas elevadas y en ausencia de disociación, la variación de la viscosidad con la temperatura se expresa por la relación empírica:

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r} \right)^n \quad (2.22)$$

donde el exponente n depende de la temperatura (v. figura 2.9).

El valor medio en el intervalo de temperatura $T \leq 2.000 - 2.500 \text{ K}$ es $n \approx 0,7$.

Las magnitudes de referencia tienen por valor $T_r = 288 \text{ K}$; $\mu_r = 1,79 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

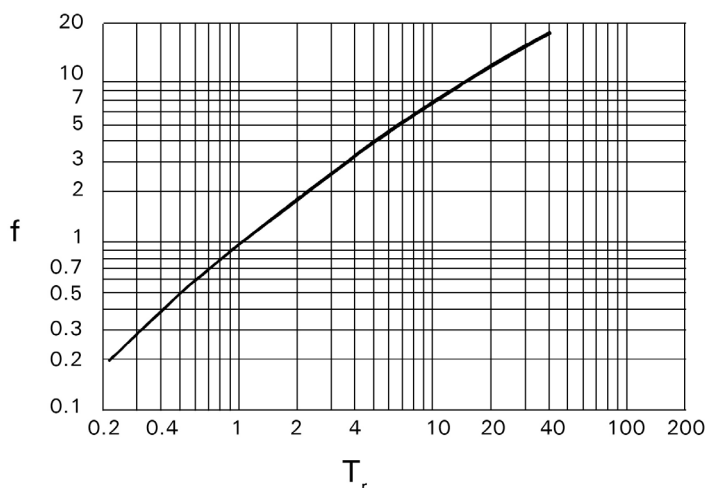


Fig. 2.6.
Factor f en función
de la temperatura re-
ducida, T_r . [Sch82]

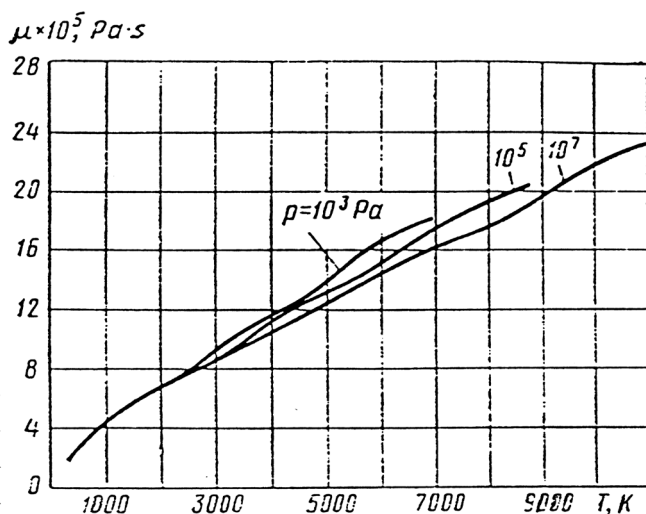


Fig. 2.7.
Variación de la
viscosidad con la
temperatura a di-
ferentes valores
de presión³

La figura 2.7 muestra la variación de la viscosidad con la temperatura a diferentes valores de presión.

De hecho, como ya se indicado en el capítulo anterior, la magnitud que experimenta más cambios relativos a temperaturas del orden de 1.000 K y superiores es γ , que es la relación entre los calores específicos (v. figura 2.8).

A presión constante, la variación de c_p con T se expresa $\frac{c_p}{c_{pr}} = \left(\frac{T}{T_r}\right)^\phi$, donde el expo-

nente ϕ es una función de la temperatura, (v. figura 2.9). Los valores de las magnitudes de referencia son: $T_r = 288 \text{ K}$; $c_{pr} = 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.



Fig. 2.8.
Valores de γ (re-
lación entre calores
específicos)
en función de
T y P

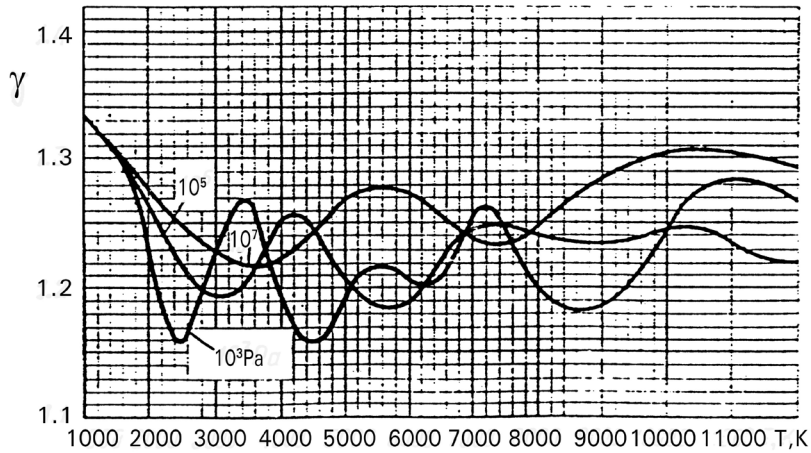
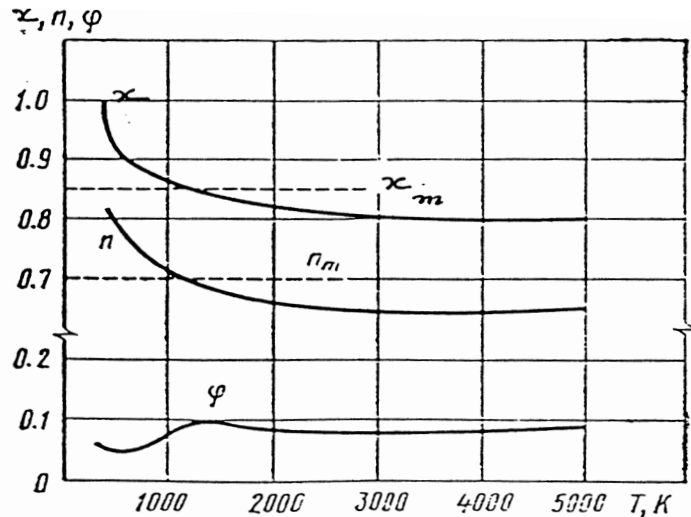


Fig. 2.9.
Variación del va-
lor de los expo-
nentes χ , ν y φ
en función de la
temperatura T
[Ca72]



2.2.3 Transporte de masa a nivel molecular

De la misma manera que un gradiente de temperatura da lugar a un flujo de calor, un gradiente de concentración de una especie en una mezcla da lugar a un flujo másico de dicha especie. Al igual que en los demás fenómenos de transporte, el mecanismo esencial es el movimiento de agitación molecular.

Cuando la concentración de una especie en un fluido no es uniforme, la experiencia enseña y la teoría cinética demuestra que la velocidad media de las moléculas de dicha especie en un punto y en un instante dados no es la velocidad del fluido \vec{V} , sino $\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{V}_{di}$, donde \vec{V}_{di} es la velocidad de difusión de las moléculas de la especie (i).



Los resultados experimentales ponen de manifiesto que el vector flujo másico $\rho_i \cdot \vec{V}_{di}$ por difusión de la especie (i) es proporcional al gradiente de concentración. La relación fenomenológica de proporcionalidad recibe el nombre de *ley de Fick*.

$$\rho_i \cdot \vec{V}_{di} = -\rho \cdot D \cdot \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right) \quad (2.23)$$

El factor de proporcionalidad, D, recibe el nombre de coeficiente de difusión de la especie (i) en la mezcla. En el caso de mezcla de dos componentes, si el fluido está en reposo, se ha de cumplir:

$$\rho_i \cdot \vec{V}_{di} + \rho_j \cdot \vec{V}_{dj} = 0 \quad (2.24)$$

Cuando el número de especies en la mezcla es más de dos, el problema se complica mucho, ya que los vectores flujo de las especies dependen no solo del gradiente de su propia fracción másica, sino también de los gradientes de las demás fracciones másicas. Una simplificación consiste en utilizar la fórmula aproximada siguiente:

$$\rho_i \cdot \vec{V}_{di} = -\rho \cdot D_{im} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right); \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

para cada uno de los n componentes. D_{mi} es el coeficiente de difusión de la especie (i) en la mezcla formada con todos los otros componentes.

La fórmula (2.25) es aproximadamente válida cuando hay una especie predominante en la mezcla y siempre que las fracciones másicas de las restantes especies sean pequeñas.

El coeficiente de difusión binario para gases a baja presión (entre 0,1 y 10 bar) depende de la temperatura y de la presión, siendo precisamente inversamente proporcional a esta. Para el cálculo de los coeficientes de difusión binarios en mezclas de gases a baja presión, se recomienda aplicar el procedimiento de Fuller, Schettler y Giddings, mediante la expresión:

$$D_{ij} = \frac{1,013 \cdot 10^{-7} \cdot T^{1,75} \left(\frac{\tilde{M}_j + \tilde{M}_i}{\tilde{M}_i \cdot \tilde{M}_j} \right)^{1/2}}{P \left[\left(\sum_i v_i \right)^{1/3} + \left(\sum_j v_j \right)^{1/3} \right]^2} \quad (2.26)$$

donde D_{ij} es el coeficiente de difusión binario (i, j) en m^2/s , T es la temperatura absoluta en (K), P la presión en bar, y v_i , v_j son parámetros especiales de difusión que resultan de sumas que tienen en cuenta átomos, grupos y rasgos estructurales.

En la tabla 2.3 se muestran valores de algunos volúmenes de difusión de simples moléculas e incrementos de volumen de difusión atómicos y estructurales.



Tabla 2.3.
Volúmenes de
difusión de sim-
ples moléculas e
incrementos de
volumen de difu-
sión atómicos y
estructurales

Molécula	H ₂	He	N ₂	O ₂	Ne	Ar	CO	CO ₂	NH ₃	Cl ₂	SO ₂	Aire	Vapor agua
Volumen de difusión	7,07	2,88	17,9	16,6	5,59	16,1	18,9	26,9	14,9	37,7	41,1	20,1	12,7
Átomos	C	H	O	(N)	(Cl)	(S)							
Incremento de volumen	16,5	1,98	5,48	5,69	19,5	17,0							

Para la evaluación del coeficiente de difusión a temperatura y presión distintas de las de referencia (273 K, 1 atm), una buena aproximación puede obtenerse mediante la ecuación:

$$D = D_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^m \frac{P_0}{P} \quad (2.27)$$

La tabla 2.4 incluye algunos valores de D_0 y m :

Tabla 2.4.
Valores de D_0 y m
para algunas pa-
rejas de gases

Pareja de gases	CO O ₂	O ₂ N ₂	O ₂ aire	H ₂ O aire	CO ₂ aire	H ₂ aire	CH ₄ aire	C ₂ H ₄ aire	C ₄ H ₁₀ aire
D_0 (cm²/s)	0,185	0,181	0,178	0,220	0,138	0,611	0,196	0,108	0,0878
m	1,75	1,75	1,75	1,75	2	2	2	2	2

Para el cálculo de coeficientes de difusión en mezclas de gases a presión, no se conoce actualmente ningún procedimiento seguro. Pese a ello, se consigue una buena aproximación mediante el método propuesto por Dawson, Khoury y Kobayashi.⁶

$$D_{ij} = D_{ij}^0 \frac{P^0}{\tilde{R} \cdot T \cdot \tilde{\rho}_m} \left(1 + 0,053432 \cdot \tilde{\rho}_m - 0,030182 \cdot \tilde{\rho}_m^2 - 0,029725 \cdot \tilde{\rho}_m^3 \right) \quad (2.28)$$

(Ver [VDI88] y [Va83])

2.3 Mezcla de gases

2.3.1 Gas natural

En este subapartado, se exponen los métodos de determinación de algunos parámetros físicos y propiedades de transporte de mezcla de gases, tomando como ejemplo el gas natural.

En la tabla 2.5, se muestra la composición del gas natural típico; sin embargo, se ha de tener en cuenta que la composición del gas natural varía según su origen (Libia, Argelia, Francia –Lacq–, Holanda –Groningen–, etc.). En dicha tabla, x_i representa la fracción molar de cada componente.

El factor de compresibilidad, Z , del gas natural se calcula por la regla de las mezclas. Sin embargo, el gas natural contiene con frecuencia cantidades sustanciales de gases



no hidrocarburos, N_2 y, sobre todo, CO_2 . Si el porcentaje en volumen de estos es menor que el 8 % para el nitrógeno y el 10 % para el CO_2 , entonces el factor de compresibilidad se calcula siguiendo el procedimiento sugerido por Graf.

$$Z' = X(N_2).Z(N_2) + X(CO_2).Z(CO_2) + [1 - X(N_2) - X(CO_2)].Z \quad (2.29)$$

donde $X(N_2)$ y $X(CO_2)$ son las fracciones molares o en volumen de los componentes N_2 y CO_2 .

Componentes	x_i	$M_i \cdot x_i$ (kg/kmol)	$T_{ci} \cdot x_i$ (K)	$P_{ci} \cdot x_i$ (10 ⁵ Pa)
Metano	0,790	12,67	150,7	36,67
Etano	0,100	3,01	30,5	4,89
Propano	0,055	2,43	20,3	2,34
i-Butano	0,010	0,58	4,1	0,36
n-Butano	0,015	0,87	6,4	0,57
n-Pentano	0,024	1,73	11,3	0,81
CO_2	0,001	0,04	0,3	0,08
N_2	0,005	0,14	0,6	0,17
Total	1,000	21,47	224,2	45,90

Tabla 2.5.
Composición del
gas natural y pa-
rámetros críticos

La figura 2.10 muestra el valor del factor de compresibilidad en función de la presión y de la temperatura pseudorreducidas.

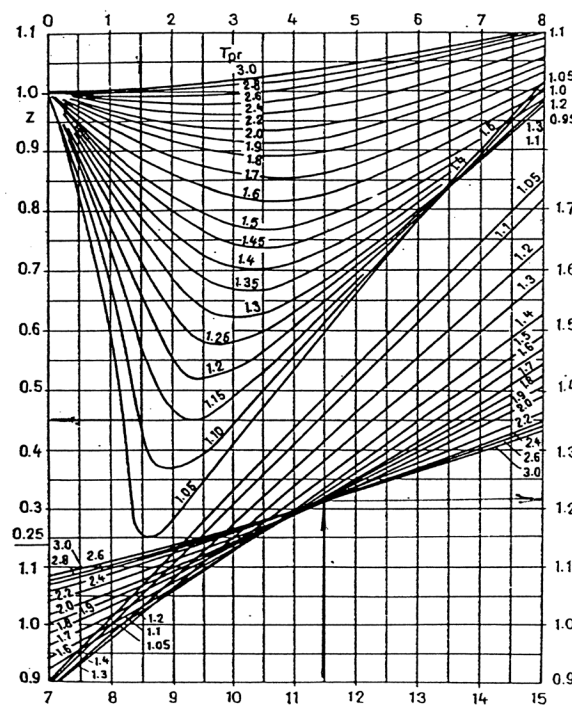


Fig. 2.10.
Factor de compresibilidad del gas
natural en función
de la presión y de
la temperatura
pseudorreducidas
[SL55]



$Z(N_2)$ y $Z(CO_2)$ son los factores de compresibilidad del nitrógeno y del dióxido de carbono, respectivamente. Sus valores en función del estado termodinámico (P, T) se muestran en las figuras 2.11 y 2.12.

Fig. 2.11.
Factor de compresibilidad del CO_2
[SL55]

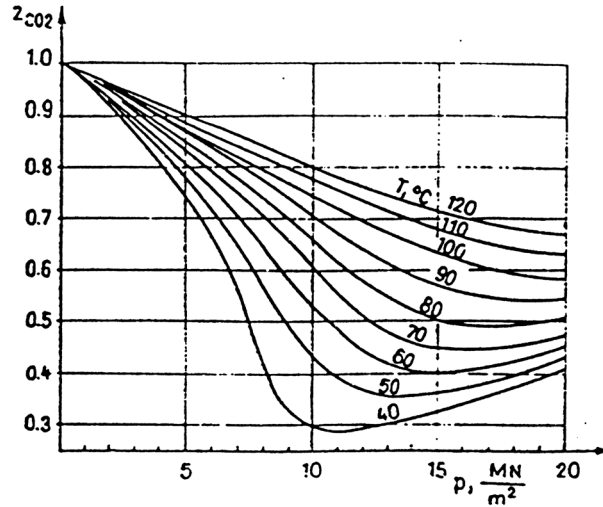
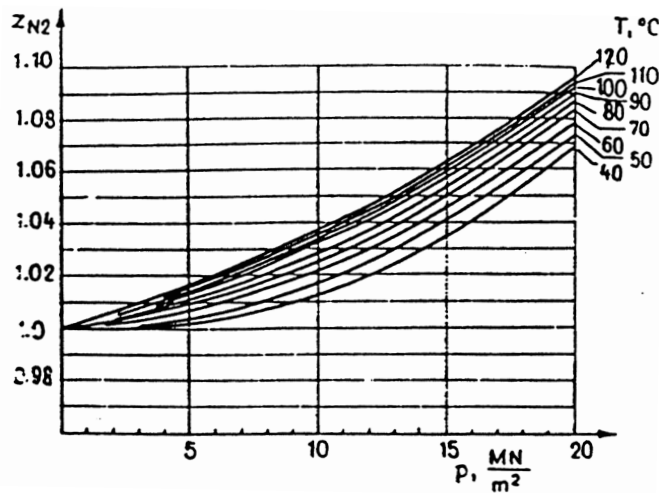


Fig. 2.12.
Factor de compresibilidad del N_2
[SL55]



En la figura 2.13, se muestra la variación del calor específico a presión constante de componentes del gas natural en función de la temperatura.

La figura 2.14 muestra la variación de la viscosidad del gas natural a la presión atmosférica en función de la masa molecular y la temperatura, así como las correcciones, $\Delta\mu$, que hay que aplicar en función del tanto por ciento molar de N_2 , CO_2 y H_2S que contiene, y sus respectivas densidades reducidas, ρ_r .

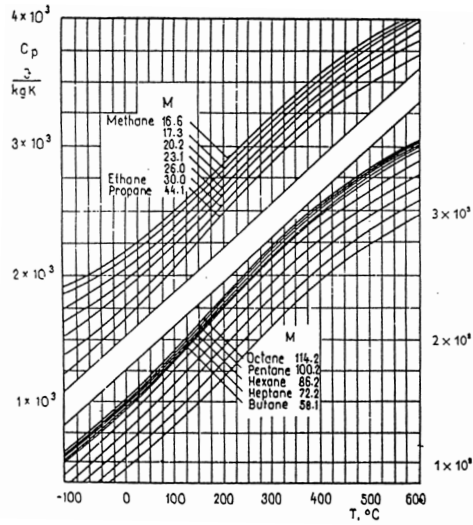


Fig. 2.13.
Variación de c_p de
componentes del
gas natural en
función de la tem-
peratura [SL55]

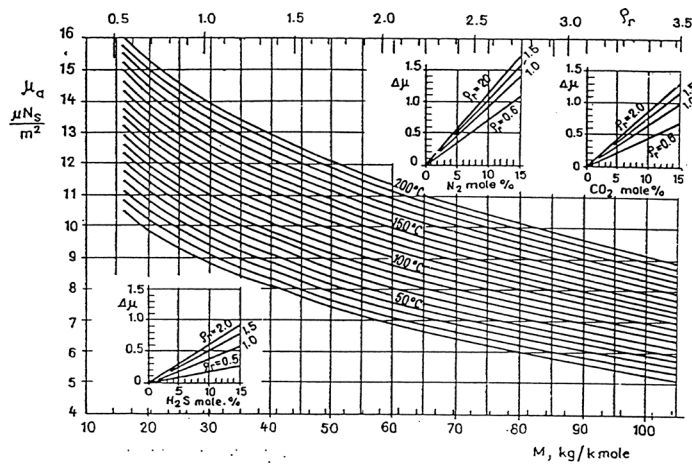


Fig. 2.14.
Variación de μ_a
en función de M y
T, y factores de
corrección $\Delta\mu$
[SL55]

La figura 2.15 muestra cómo varía la viscosidad con la presión, dada por el factor $K = \mu_p / \mu_a$, en función de los parámetros reducidos T_r y P_r .

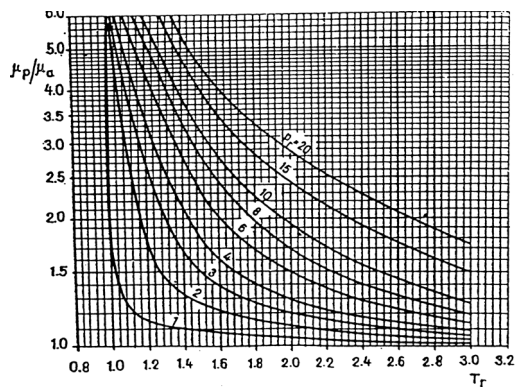


Fig. 2.15.
Variación de $\mu_p /$
 μ_a en función de
 T_r , P_r [SL55]



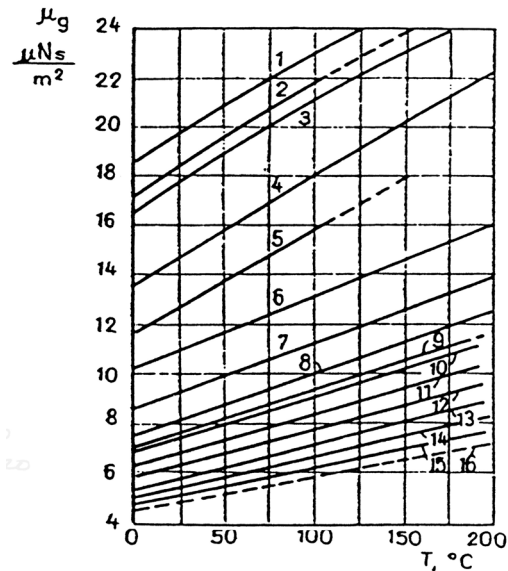
2.3.2 Mezclas de gases hidrocarburos

La viscosidad, a presión atmosférica, de mezclas de hidrocarburos gaseosos se calcula mediante la relación de Herning-Zipper:⁷

$$\mu_a = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{ai} \cdot X_i \cdot \sqrt{M_i}}{\sum_{i=1}^n X_i \cdot \sqrt{M_i}} \quad (2.30)$$

La figura 2.16 muestra la variación de la viscosidad de componentes del gas natural en función de la temperatura: 1, helio; 2, aire; 3, nitrógeno; 4, CO₂; 5, sulfhídrico; 6, metano; 7, etano; 8, propano; 9, isobutano; 10, n-butano; 11, n-pentano; 12, n-hexano; 13, n-heptano; 14, n-octano; 15, n-nonano; 16, n-decano.

Fig. 2.16.
Variación de la viscosidad de componentes del gas natural en función de la temperatura [SL55]



(Ver [Std77] y [SL55])

2.3.3 Mezcla de gases en general

Watson propone una ecuación de correlación que reproduce satisfactoriamente los valores experimentales de la viscosidad dinámica de gases en el intervalo de temperaturas de 270 a 2.200 K. La ecuación de correlación se escribe:

$$\mu = \frac{\sqrt{T}}{A_0 + \frac{A_1}{T} + \frac{A_2}{T^2} + \frac{A_3}{T^3} + \frac{A_4}{T^4}} (\text{Pa}\cdot\text{s}) \cdot 10^{-6}; T \text{ (K)} \quad (2.31)$$

Los coeficientes A_0, \dots, A_4 tienen los valores que se dan en la tabla 2.6 para los gases listados en ella.

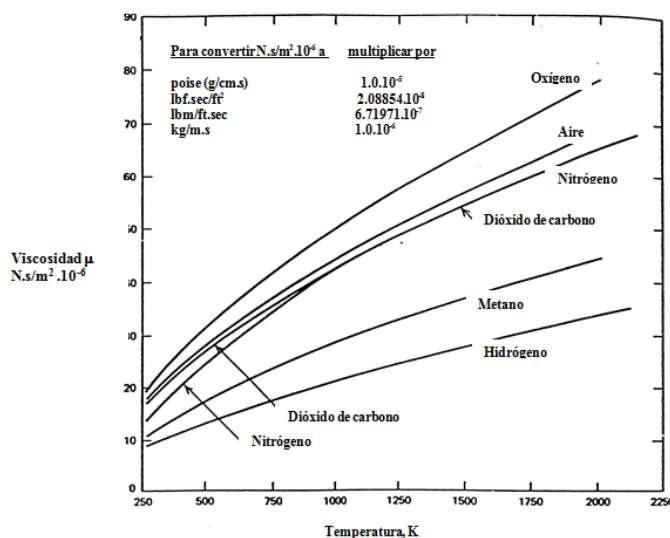


Gas	A_0	$A_1 \cdot 10^{-2}$	$A_2 \cdot 10^{-4}$	$A_3 \cdot 10^{-6}$	$A_4 \cdot 10^{-8}$
Aire	0,552795	2,810892	-13,508340	39,353086	-41,419387
O ₂	0,476823	2,785625	-15,410077	51,909942	-63,049470
N ₂	0,579561	2,847486	-13,232490	37,106107	-37,549675
CO ₂	0,624736	1,402570	0,553161	0,0	0,0
H ₂	1,074552	6,569139	-19,639020	22,851072	0,0
CH ₄	0,867788	3,783913	-14,473411	42,547274	-44,474225

 Tabla 2.6.
Coeficientes A_0 ,
..., A_4

La precisión de los valores de μ calculados con la ecuación de correlación 2.31 y los coeficientes de la tabla dependen de la presión y del intervalo de temperatura. El error es del orden del 1 % en el intervalo $610 < T < 1.600$ K; del orden del 2 % en el intervalo $1.610 < T < 2.200$ K, y, en cuanto a la influencia de la presión, el error es del orden del 1 % en el intervalo $1,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} (300 \text{ K}) < P(T) < 2,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} (500 \text{ K})$.

En la figura 2.17, se muestra la variación de la viscosidad de algunos gases en función de la temperatura.


 Fig. 2.17.
Variación de la
viscosidad de al-
gunos gases en
función de la tem-
peratura [Wa72]

En cuanto se refiere al coeficiente de difusión en mezclas de gases y/o vapores, el método de Hirschfelder,⁸ basado en la teoría cinética de los gases, da excelentes resultados en mezclas binarias a baja presión:

$$D_{ij} = \frac{0,001858 \cdot T^{3/2} \sqrt{\frac{M_i + M_j}{M_i \cdot M_j}}}{P \cdot \sigma_{ij}^2 \cdot \Omega_D} \quad (2.32)$$

donde,



D_{ij} : difusividad del componente (i) en la mezcla de (i) y de (j), (cm^2/s)

T : temperatura absoluta (K)

M_i, M_j : masas moleculares de los componentes (i), (j)

P : presión total (atm)

$\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j) / 2$, donde σ_i, σ_j son los diámetros de colisión de los componentes (i), (j);

Ω_D : integral de colisión por difusión. Sus valores se encuentran en la tabla 2 en función de kT/ε_{ij} , $\{\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_i \varepsilon_j)^{0.5}\}$; (v. tabla 2.7)

Este método predice los valores experimentales de D_{ij} de ochenta sistemas binarios con un promedio de error de solo el 6 %. Para presiones superiores a 15 atm, no existen métodos de determinación fiable de D_{ij} .

Tabla 2.7.
Constantes de
fuerza de
Lennard-Jones

Compuesto	ε/κ (K)	σ	Compuesto	ε/κ (K)	σ
Acetileno	185	4,221	Hidrógeno	33,3	2,968
Aire	97	3,617	Cloruro de hidrógeno	360	3,305
Argón	124	3,418	Yoduro de hidrógeno	324	4,123
Arsénico	281	4,06	Yodo	550	4,982
Benceno	440	5,27	Criptón	190	3,61
Bromo	520	4,268	Metano	136,5	3,822
i-Butano	313	5,341	Metanol	507	3,585
n-Butano	410	4,997	Cloruro de metileno	406	4,759
Dióxido de carbono	190	3,996	Cloruro de metilo	855	3,375
Disulfuro de carbono	488	4,438	Yoduro de mercurio	691	5,625
Monóxido de carbono	110	3,59	Mercurio	851	2,898
Tetracloruro de carbono	327	5,881	Neón	35,7	2,789
Sulfuro de carbono	335	4,13	Óxido nítrico	119	3,47
Cloro	357	4,115	Nitrógeno	91,5	3,681
Cloroformo	327	5,43	Óxido de nitrógeno	220	3,879
Cianógeno	339	4,38	n-Nonano	240	8,448
Ciclohexano	324	6,093	n-Octano	320	7,451
Etano	230	4,418	Oxígeno	113	3,433
Etanol	391	4,455	n-Pentano	345	5,769
Etileno	205	4,232	Propano	254	5,061
Flúor	112	3,653	Dióxido de sulfuro	252	4,29
Helio	10,22	2,576	Agua	356	2,646
n-Heptano	282	8,88	Xenón	229	4,055
n-Hexano	413	5,909			



kT/ϵ	Ω_D	kT/ϵ	Ω_D	kT/ϵ	Ω_D	kT/ϵ	Ω_D
0.30	2.662	1.55	1.182	3.6	0.9058	70	0.5464
0.35	2.476	1.60	1.167	3.7	0.8998	80	0.5352
0.40	2.318	1.65	1.153	3.8	0.8942	90	0.5256
0.45	2.184	1.70	1.140	3.9	0.8888	100	0.5130
0.50	2.066	1.75	1.128	4.0	0.8836	200	0.4644
0.55	1.966	1.80	1.116	4.1	0.8788	400	0.4170
0.60	1.877	1.85	1.105	4.2	0.8740		
0.65	1.798	1.90	1.094	4.3	0.8694		
0.70	1.729	1.95	1.084	4.4	0.8652		
0.75	1.667	2.00	1.075	4.5	0.8610		
0.80	1.612	2.1	1.057	4.6	0.8568		
0.85	1.562	2.2	1.041	4.7	0.8530		
0.90	1.517	2.3	1.026	4.8	0.8492		
0.95	1.476	2.4	1.012	4.9	0.8456		
1.00	1.439	2.5	0.9996	5.0	0.8422		
1.05	1.406	2.6	0.9878	6	0.8124		
1.10	1.375	2.7	0.9770	7	0.7896		
1.15	1.346	2.8	0.9672	8	0.7712		
1.20	1.320	2.9	0.9576	9	0.7556		
1.25	1.296	3.0	0.9490	10	0.7424		
1.30	1.273	3.1	0.9406	20	0.6640		
1.35	1.253	3.2	0.9328	30	0.6232		
1.40	1.233	3.3	0.9256	40	0.5960		
1.45	1.215	3.4	0.9186	50	0.5756		
1.50	1.198	3.5	0.9120	60	0.5596		

Tabla 2.8.
Valores de la integral de colisión por difusión (Ω_D) en función de kT/ϵ_{ij}

(Ver [RPS77] y [Me88])

2.4 Propiedades termodinámicas y de transporte del aire a altas temperaturas

En condiciones extremas de temperatura y de presión, como las que se dan, por ejemplo, cuando entran en la atmósfera las cápsulas espaciales, el aire puede disociarse e incluso ionizarse, por lo cual su comportamiento se desvía notablemente del gas ideal, y las propiedades termodinámicas y de transporte se convierten en funciones de presión y temperatura.

A partir de unas funciones de partición aproximadas de las principales especies en el aire, y despreciando todas las especies menores, Hansen⁹ determinó las propiedades termodinámicas y de transporte- compresibilidad, entalpía, entropía, calores específicos, conductividad térmica, etc., del aire en un intervalo de temperatura de 500 a 1.500 K y de 0,001 a 100 atm de presión. Los resultados se hallan tabulados en la publicación *NASA TR R-50*.

En un gas que experimenta disociación, la conducción de calor ocurre por dos mecanismos diferentes: el mecanismo usual de transferencia de energía por colisión de las moléculas y los átomos presentes, y el de su difusión, ya que, cuando hay un gradiente de temperatura en un gas que disocia, hay también un gradiente de concentración, a no ser que el estado del gas sea congelado. Es evidente que la dirección de la transferencia



de calor debida a ambos mecanismos es la misma: desde las zonas de temperaturas más altas a las más bajas. Por consiguiente, la conductividad térmica k se define como la suma de las conductividades térmicas debidas a la colisión y a la disociación, o sea: $k=k_n+k_r$.

En la teoría cinética, se demuestra que la conductividad térmica debida a colisión molecular se expresa:

$$k_n = \frac{5\pi}{32} \sum_i \rho_i u_i \frac{\lambda_i}{M_i} \left(\frac{5}{2} C_t + C_{int} \right) \quad (2.33)$$

donde:

$$C_t = dE_t / dT, \quad C_{int} = dE_{int} / dT \quad \text{y} \quad E = E_t + E_{int} \quad (2.34)$$

$$C_t = dE_t / dT, \quad C_{int} = dE_{int} / dT \quad \text{y} \quad E = E_t + E_{int}$$

En la ecuación 2.34, E_t se refiere a la energía cinética de traslación de las especies y E_{int} , a los otros tipos de energía de las especies (rotacional, vibracional y electrónica). Se supone, además, que cada una de las especies se comporta como un gas ideal.

En este caso:

$$C_i = (C_t + C_{int}), \quad \text{y} \quad C_t = (2/3)R \quad (2.35)$$

de donde se deduce:

$$k_n = \frac{5\pi}{32} \sum_i \rho_i u_i \lambda_i \left(\frac{C_i}{\tilde{M}_i} + \frac{9}{4} \left[\frac{\tilde{R}}{\tilde{M}_i} \right] \right) \quad (2.36)$$

Habitualmente, la conductividad térmica de un gas, k_0 , se define únicamente en términos de las energías traslacional y rotacional. Entonces, a partir de la teoría cinética, con:

$$C_{int} = C_r = R, \quad \text{y} \quad \mu = \mu_0 \frac{19}{4} \left(\frac{R}{M_0} \right)$$

se obtiene:

$$\frac{k_n}{k_0} = \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \frac{\tilde{M}_0}{\tilde{M}_n} \left(\frac{4}{19} \left[\frac{C_i}{R} \right] + \frac{9}{19} \right) \quad (2.37)$$

La conductividad térmica debida a disociación, k_r , se expresa:

$$k_r = \frac{n^2}{\rho} \sum_{i,j} h_i D_{ij} \tilde{M}_j \frac{dx_j}{dT} \quad (2.38)$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen, ρ es la densidad de la mezcla, D_{ij} es el coeficiente de difusión multicomponente, h_i es la entalpía de la especie



i , y M_j , x_j , dx_j/dz son el peso molecular, la fracción molar y el gradiente de concentración de las especies j , respectivamente.

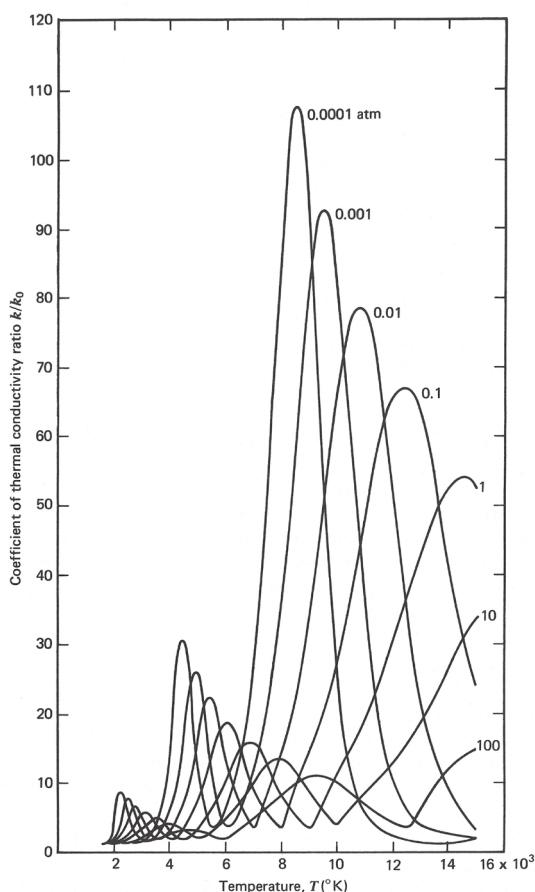


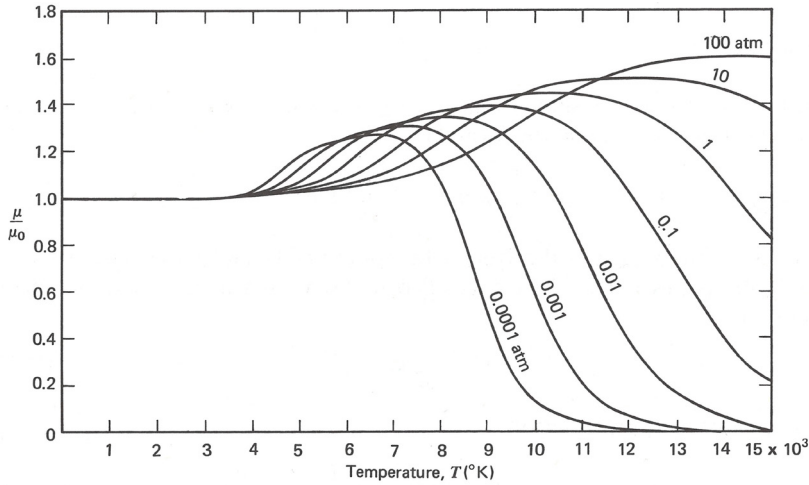
Fig. 2.18.
Conductividad térmica total del aire
[Sch82]

Hirschfelder, Butler y Brokaw han calculado el coeficiente de transferencia de calor debido a difusión, disociación y recombinación para una mezcla arbitraria de especies con un número arbitrario de reacciones químicas.¹⁰ La conductividad térmica total del aire ha sido calculada por Hansen⁹ y sus resultados son considerados fiables hasta temperaturas de 10.000 K, pero son cuestionables a temperaturas superiores. La figura 2.18 muestra el valor de la conductividad térmica total del aire mediante la relación k/k_0 en función de la temperatura a varias presiones.

Con respecto a la viscosidad del aire a altas temperaturas, la teoría cinética muestra que su valor puede aproximarse mediante la fórmula $\mu = \sum \mu_i$, donde $\mu_i = (5\pi/32) \rho_i u_i \lambda_i$. Por consiguiente, resulta:



Fig. 2.19.
Relación de viscosidad en función de la temperatura
[Sch82]



$$\mu = \left(\frac{5\pi}{32} \right) \sum \rho_i u_i \lambda_i \quad (2.39)$$

donde ρ_i , u_i , λ_i son la densidad, la velocidad aleatoria media y la longitud libre media de las especies i , respectivamente. Es conveniente utilizar, como valor de referencia, la viscosidad del aire no disociado a la misma temperatura, que viene dado por la fórmula:

$$\mu_0 = (5\pi / 32) \rho_0 u_0 \lambda_0 \quad (2.40)$$

Puesto que es complicado calcular la viscosidad del aire no disociado mediante la fórmula (2.41), habitualmente se utiliza la aproximación siguiente:

$$\mu_0 = 1,462 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{T}}{(1 + [112/T])} \quad (2.41)$$

en que las unidades de viscosidad son g/cm·s y la temperatura se expresa en grados Kelvin.

(Ver [Sch82])

(Ver ref. 9)



Ejercicios

Ejercicio 1

El lecho catalítico de un reactor de gases de escape de automóvil está empaquetado con *pellets* esféricos de 5 mm de diámetro de CuO sobre alúmina. La porosidad de los *pellets* es $\varepsilon = 0,8$; el factor de tortuosidad es $\tau = 4$; el radio medio del poro es $r_o = 1\mu$, y el área de superficie específica es $S_e = 7,12 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{m}^3$. Calcula la efectividad de los *pellets* cuando promueve la oxidación de CO a 800 K y 1 atm.

Resolución

En el transporte de masa de los reactantes gaseosos en poros de un *pellet* catalítico interviene, además de la difusión ordinaria, descrita por la ley de Fick, la difusión de Knudsen (flujo de Knudsen, en función del radio del poro y de la velocidad molecular media de la especie).

Asumiendo que el transporte de masa por difusión se rige por una relación lineal, la resistencia a la difusión efectiva del componente 1 (CO) en el aire viene dada por la ecuación:

$$\frac{1}{D_{1,ef}} = \frac{1}{\tilde{D}_{12,ef}} + \frac{1}{D_{k1,ef}} \quad (1)$$

donde $\tilde{D}_{12,ef}$ es el coeficiente de difusión binaria CO-aire en el poro del *pellet*, definido por la fórmula $\tilde{D}_{12,ef} = (\varepsilon / \tau) D_{12}$, donde D_{12} es el coeficiente de difusión binaria definido por la ley de Fick, cuyo valor es $10,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

A su vez, $D_{k1,ef}$ está relacionado con el coeficiente de difusión de Knudsen

$$D_{k1} = \frac{2}{3} r_p \left(\frac{8 \tilde{R} T}{\pi M_1} \right)^{1/2} \text{ mediante la fórmula } D_{k1,ef} = (\varepsilon / \tau) D_{k1}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $\tilde{D}_{12,ef} = (0,8 / 4) 10,6 \cdot 10^{-5} = 2,12 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$$D_{k1,ef} = (0,8 / 4) \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{8 \cdot 8,3143 \cdot 10^3 \cdot 800}{\pi \cdot 29} \right)^{1/2} = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

A partir de estos valores, la ecuación 1 aporta el siguiente resultado:

$$D_{1,ef} = 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

El rendimiento del proceso de oxidación de CO por CuO viene definido por la inversa

del módulo de Thiele Λ , definido por la fórmula $\Lambda = \frac{r_p}{3} \left(\frac{k_A S_e}{D_{1,ef}} \right)^{1/2}$, donde K_A es

la constante de reacción de oxidación del CO dada por la ecuación de Arrhenius:



$$K = Ae^{-E_a/\bar{R}T} \quad (2)$$

En este caso, el valor de A es $50,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ y la energía de activación E_a toma por valor $18,6 \text{ Kcal/mol}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 2, se obtiene $K = 4,19 \cdot 10^{-4} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Ahora se calcula el módulo de Thiele $\Lambda = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3} \left(\frac{4,19 \cdot 10^{-4} \cdot 7,12 \cdot 10^7}{1,76 \cdot 10^{-5}} \right)^{1/2} = 68,6$

Por último, el rendimiento del proceso de reacción-difusión en soporte catalítico-poroso es

$$\eta = \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{68,6} = 1,46 \cdot 10^{-2} \Lambda \rightarrow 1,46\%$$

(Ver [EDM79])

Ejercicio 2

Calcula la viscosidad del dióxido de azufre a una temperatura de 300°C y una presión de 1 atm aplicando:

- 1) La expresión aproximada de Bromley y Wilke
- 2) La fórmula de extrapolación térmica en función de las temperaturas reducidas

Resolución

Se sabe que la viscosidad del SO_2 a 20°C es de $1,26 \cdot 10^{-2} \text{ cp}$ y a 150°C , de $1,86 \cdot 10^{-2} \text{ cp}$. Su temperatura crítica es $T_c = 430 \text{ K}$ y su presión crítica, $P_c = 77,7 \text{ atm}$

- 1) Una expresión aproximada de la ecuación de Bromley y Wilke es:

$$\mu = 6,3 \cdot 10^{-4} \frac{M^{1/2} P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}} \left(\frac{T_r^{3/2}}{T_r + 0,8} \right) \quad (1)$$

donde M, el peso molecular del SO_2 , es 64, y $T_r = T / T_c = (273 + 300) / 430 = 1,3325$ es la temperatura reducida del gas.

Sustituyendo valores en la ecuación 3, se obtiene:

$$\mu = 6,3 \cdot 10^{-4} \frac{(64)^{1/2} (77,7)^{2/3}}{(430)^{1/6}} \frac{(1,3325)^{3/2}}{(1,3325 + 0,8)} = 2,41 \cdot 10^{-2} \text{ cp}$$

- 2) La fórmula de extrapolación térmica del valor de la viscosidad en función de las temperaturas reducidas se escribe:



$$\mu = \mu_1 \left(\frac{T_r}{T_{r1}} \right)^{3/2} \left(\frac{T_{r1} + 0,8}{T_r + 0,8} \right) \quad (2)$$

A partir del valor experimental de la viscosidad a 150°C, la viscosidad a 300°C se calcula aplicando la ecuación 4:

$$\mu(300^\circ \text{C}) = 1,86 \cdot 10^{-2} \left(\frac{273 + 300}{273 + 150} \right)^{1,5} \left(\frac{\frac{423}{430} + 0,8}{\frac{573}{450} + 0,8} \right) = 2,4527 \cdot 10^{-2} \text{ cp}$$

Un procedimiento de extrapolación alternativo consiste en considerar que la viscosidad depende de la temperatura según una función del tipo $\mu = f(T^{3/2})$, definir una magnitud $y = T^{1,5} / \mu$, calcular la pendiente de la recta representativa $y = f(T)$ con los datos de viscosidad a 20° y a 150°C, y después extrapolar la función a la temperatura de 300°C. Se obtiene $\mu = 2,49 \cdot 10^{-2}$ cp.

(Ver [Vi93])

Ejercicio 3

Calcula la conductividad térmica del metano CH₄ a la temperatura de 350 K y a 1 atm de presión. Al tratarse de un gas poliatómico, la conductividad térmica se expresa:

$$K = K_{mon} + \rho \tilde{D}_{ii} \left(c_p - \frac{5}{2} \frac{\tilde{R}}{M} \right) \quad (1)$$

donde K_{mon} es la conductividad térmica de un gas monoatómico según la teoría cinética de Chapman-Enskog, y el segundo término del segundo miembro de la ecuación 5 es la corrección de Eucken.

Conocidos

$$K_{mon} = 8,32 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} \quad \text{y} \quad \rho \tilde{D}_{ii} = \mu / Sc_{ii}$$

donde Sc_{ii} es el número de Schmidt de autodifusión, cuyo valor es 0,76, se sustituyen en la ecuación 5 y resulta:

$$K = 8,32 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} + \frac{\mu}{0,76} \left(c_p - \frac{5}{2} \frac{\tilde{R}}{M} \right) \quad (2)$$

A partir de la tabla de valores de la constante de fuerza del modelo de potencial de Lennard-Jones, se obtiene $\sigma = 3,758$ y $\Omega_k = 1,115$. Por su parte, a partir de las tablas



de propiedades del metano [Va83], se obtiene $c_p = 2.380 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. y $\mu = 12,65 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Sustituyendo valores en la ecuación 6, con $M = 16$ y $\tilde{R} = 8.314,3 \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$, resulta:

$$K = 8,32 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt{350/16}}{(3,758)^2 \cdot 1,115} + \frac{12,65 \cdot 10^{-6}}{0,76} \left(2380 - \frac{5}{2} \frac{8.314,3}{16} \right) = 4,27 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

(Ver [EDM79])

Ejercicio 4

Estima el valor del coeficiente de difusión del sistema binario de gases Ar-O₂ a la temperatura de 293,2 °K y la presión total de 1 atm.

	M	T _c (K)	P _c (atm)
Argón	39,94	151,2	48
Oxígeno	32	154,4	49,7

$$\frac{PD_{AO}}{(P_{CA}P_{C0})^{1/3} (T_{CA}T_{C0})^{5/12}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_0} \right)^{1/2}} = a \left(\frac{T}{(T_{CA}T_{C0})^{1/2}} \right)^b$$

con $a = 2,745 \cdot 10^{-4}$ y $b = 1,823$

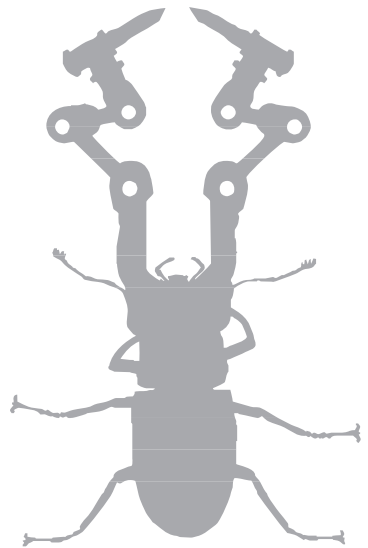
Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\frac{D_{A0}}{(48 \cdot 49,7)^{1/3} (151,2 \cdot 154,4)^{5/12}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{39,94} + \frac{1}{32} \right)^{1/2}} = 2,745 \cdot 10^{-4} \left[\frac{293,2}{(151,2 \cdot 154,4)^{1/2}} \right]^{1,823}$$

$$4,773588 \cdot 10^{-4} \cdot D_{A0} = 9,00676415 \cdot 10^{-4} \rightarrow D_{A0} = 0,18868 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

El valor obtenido experimentalmente es 0,20 (cm² s⁻¹).

(Ver [Vi15] y [EDM79])



→ 3



Nociones de termodinámica

3.1 Sistema termodinámico

En general, en la literatura sobre el tema, se consideran tres tipos de sistemas: el sistema aislado, el sistema cerrado y el sistema abierto. Los sistemas aislados no intercambian energía ni materia con su entorno, los sistemas cerrados intercambian energía (calor y trabajo) con su entorno y los sistemas abiertos pueden intercambiar materia y energía con su entorno.

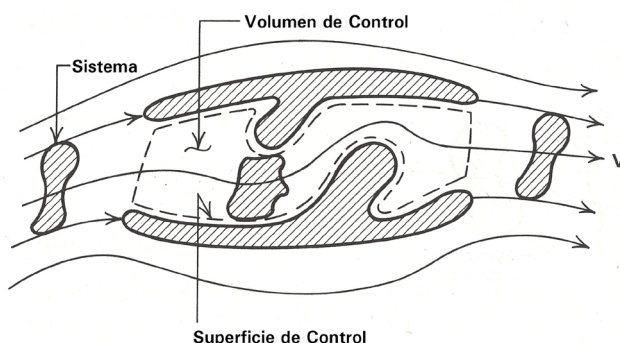
Desde un sentido estrictamente termodinámico, hemos de considerar solo lo que se entiende por *sistema termodinámico simple*. Este sistema es aquel para el cual el estado de equilibrio se determina especificando los valores de dos propiedades termodinámicas independientes cualesquiera. Se trata de una cantidad finita de materia envuelta por una “frontera imaginaria”, denominada *superficie de control*, que la separa del entorno, es decir: es un sistema termodinámico cerrado.

Las leyes de la termodinámica se aplican a una cantidad específica de materia, es decir, a un sistema. Por el contrario, en dinámica de gases, se estudian procesos termodinámicos con flujo de materia, que suponen considerar como frontera la de un “volumen de control”, que, por definición, es abierto. Los procesos más frecuentes se presentan en problemas de propulsión y de potencia, por ejemplo, en un motor *jet* y en una turbina de gas, que son representados por un “volumen impermeable”, salvo en su entrada y su salida, donde existe un flujo másico de gases cuyo valor debe conocerse para establecer los correspondientes balances de cantidad de movimiento, flujo de calor, etc.

La figura 3.1 ilustra cómo se entienden el sistema y el volumen de control, que, como es sabido en mecánica de fluidos, están relacionados por un algoritmo matemático. La naturaleza del problema requerirá utilizar un método de análisis u otro; no obstante, ambos conceptos son útiles por cuanto permiten la interacción en las fronteras y relacionarla con los cambios que ocurren en su interior. Sin embargo, el sistema y el volumen de control se distinguen por dos aspectos:

- La frontera del sistema cerrado puede cambiar de forma, posición y orientación con respecto a un observador externo considerado fijo. El volumen de control, por definición, no, si es rígido. En la parte del campo de conocimiento de dinámica de gases que aquí se trata, solo se consideran volúmenes de control rígidos; no obstante, en general, pueden cambiar su posición en el espacio. Además, si el volumen de control es móvil, se supone que se mueve a una velocidad constante con respecto a un sistema inercial de referencia.
- A través de una parte de la frontera del volumen de control, hay flujo de materia. En el sistema cerrado, por definición, no.

Fig. 3.1.
Idealización de un
sistema y un volumen
de control
[ZH76]



3.1.1 Sistema simple termodinámico. Equilibrio

Por *sistema simple*, entendemos una sustancia pura cuyo estado está definido completamente, desde el punto de vista termodinámico, por sus propiedades macroscópicas, también denominadas *coordenadas termodinámicas*, de las cuales solo dos son independientes. Las propiedades son características observables o medibles del sistema. Una propiedad es, en general, una cantidad que tiene un valor que depende solo del estado del sistema. Dado que la termodinámica se ocupa fundamentalmente del comportamiento macroscópico de un sistema que pasa de un estado de equilibrio a otro, las propiedades seleccionadas son aquellas que aportan una descripción macroscópica adecuada de los cambios producidos en las características del sistema, una vez finalizado el proceso de tránsito de estados.

De acuerdo con la ecuación de estado de los gases perfectos, las propiedades termodinámicas fundamentales de un sistema simple son su presión absoluta P , su volumen específico v y su temperatura absoluta T . Por consiguiente, podemos expresar cualquiera de las tres propiedades en función de las otras dos. Así, tenemos $P = P(v, T)$, $v = v(P, T)$, $T = T(P, v)$.

En termodinámica, se dice que un sistema se halla en equilibrio si es incapaz de experimentar espontáneamente un cambio de estado cuando está sometido a determinadas condiciones de frontera. El equilibrio termodinámico de un sistema implica, en general, tres tipos distintos de equilibrio: equilibrio térmico (la misma temperatura T en todos los



puntos del sistema), equilibrio mecánico (la misma presión P en todos los puntos del sistema) y equilibrio químico (la misma composición química en todos los puntos del sistema).

Sin embargo, en particular, se dice que un sistema simple se encuentra en equilibrio termodinámico cuando las variables intensivas P, T, ρ que describen su estado no varían a lo largo del tiempo. Cuando un sistema no está aislado, el equilibrio termodinámico se define en relación con su entorno físico, eso es, los valores de las variables de estado han de ser los mismos para el sistema y para su entorno.

El estado de equilibrio de un sistema termodinámico simple viene definido completamente por dos propiedades termodinámicas independientes cualesquiera.

3.2 Procesos termodinámicos reversibles e irreversibles

Un proceso termodinámico es una transformación en que alguna de las variables que caracteriza el sistema se modifica con el transcurso del tiempo. Cuando todos los estados intermedios de un proceso termodinámico son de equilibrio, se dice que el proceso es *cuasiestático* o *reversible*. En este caso, las variables macroscópicas describen bien el proceso y la ecuación de estado del sistema sigue siendo válida a lo largo de todo el proceso. Si no todos los estados intermedios del proceso son de equilibrio, se dice que el proceso es *irreversible*.

Si una diferencia de temperatura arbitrariamente pequeña produce una expansión o una compresión en el sistema, según sea su signo, y el correspondiente valor absoluto de los efectos mecánicos producidos por las mismas cantidades de calor transferidas desde o al sistema son, por tanto, iguales, entonces el proceso es reversible.

Es evidente que un proceso en que se produce una disipación de energía por fricción no puede ser reversible. En general, se supone que el trabajo realizado para vencer la fricción se convierte instantáneamente en calor, lo cual impide la inversión del proceso. Habida cuenta de que, en el flujo de fluidos reales, siempre hay fricción, los procesos termodinámicos asociados son siempre irreversibles; también lo son los procesos naturales o espontáneos.

Los procesos irreversibles se caracterizan porque siempre llevan asociado el flujo de alguna propiedad, de manera que requieren un cierto tiempo finito para establecer el estado de equilibrio. No así los procesos reversibles, que teóricamente necesitan un tiempo infinito para completar su realización. De hecho, los procesos termodinámicos reversibles son procesos sin fricción, imaginarios, pero, puesto que son los que dan lugar el máximo rendimiento de un proceso, su cálculo tiene un gran valor para evaluar por comparación la eficiencia de los procesos de los gases reales.

(Ver [ZH76])



3.3 Principios termodinámicos o leyes termodinámicas

La utilización del término *principio* responde a servidumbres históricas. En los inicios de la termodinámica, las relaciones empíricamente observables entre las magnitudes térmicas y mecánicas de los procesos de cambio de estado se tomaban como ciertas y, a partir de ellas, se fue elaborando una teoría. En su evolución, dichos principios se han ido concretando en formulaciones matemáticas y convirtiéndose en leyes: las *leyes termodinámicas*. Este es, pues, el término que se utiliza en este libro.

Las *leyes termodinámicas* son tres. Para todas ellas, se han propuesto diferentes definiciones, según distintos autores expertos en la materia, pero en el fondo traducen el mismo principio, con palabras distintas.

3.3.1 Primera ley de la termodinámica

La *primera ley* se enunció históricamente así: la energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma. Es una ley basada en la experiencia, que nos enseña que el calor y el trabajo son convertibles entre sí y que la relación de conversión es una cantidad fija, denominada *equivalente mecánico del calor*, que se denota por J . Obsérvese que la primera ley no da información sobre la cantidad de calor transferida a un sistema que puede ser convertida en trabajo, y viceversa.

En un sistema cerrado, adiabático, que evoluciona de un estado inicial a otro final, el trabajo realizado no depende ni del tipo de trabajo ni del proceso seguido, solo depende de los estados inicial y final. Por consiguiente, la variación de energía de un sistema termodinámico cerrado es igual a la diferencia entre la cantidad de calor y la cantidad de trabajo intercambiados por el sistema con su entorno.

La expresión matemática básica de la *primera ley de la termodinámica* se obtiene considerando un sistema cerrado de masa m , que está sujeto a una serie de procesos que forman un ciclo completo e implican la transferencia de calor y la realización de un trabajo. Sea δQ el calor transferido a o del sistema, y δW la cantidad correspondiente de trabajo realizado durante el ciclo. Entonces, la experiencia enseña que

$$\oint (\delta Q - \delta W) = 0 \quad (3.1)$$

La cantidad $(\delta Q - \delta W)$ define una propiedad de un sistema cerrado: la *energía almacenada* E , de modo que

$$dE = \delta Q - \delta W \quad (3.2)$$

Por unidad de masa, la ecuación 3.2 se escribe:

$$de = \delta q - \delta w \quad (3.3)$$

Además de δQ y δW , que son energías de tránsito no almacenables, la energía almacenada E incluye las clases siguientes: energía térmica (energía interna U), energía



cinética, energía potencial, energía química, etc. Si el sistema cerrado de masa m no tiene energía cinética ni energía potencial, entonces la única energía almacenada en el sistema es la energía interna o energía térmica U , por lo cual la ecuación 3.2 se escribe:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

En la interpretación de estas fórmulas, hay que tener siempre presentes los signos de las magnitudes de calor y trabajo. El calor Q es positivo si va del entorno al sistema y negativo si el sistema lo ha perdido. El trabajo W es positivo si lo realiza el exterior contra el sistema y negativo si lo realiza el sistema.

Otras definiciones de la primera ley de la termodinámica se deben a Clausius y a Kelvin-Planck. Clausius la enuncia así: *No es posible ningún proceso espontáneo cuyo único resultado sea el paso de calor de un recinto a otro que se encuentra a mayor temperatura.*

El enunciado de Kelvin-Planck es: *No es posible ninguna transformación termodinámica cuyo único resultado sea la absorción de calor de un solo foco y la producción de una cantidad equivalente de trabajo.*

3.3.2 Segunda ley de la termodinámica

La *segunda ley*, como la primera, se basa totalmente en la experiencia. La *primera ley* se refiere estrictamente a aquella parte o cantidad de calor que se convierte en trabajo ya que, en un proceso reversible, ni siquiera es posible transformar todo el calor añadido a un sistema en trabajo útil.

La experiencia ha demostrado que la transformación de calor en trabajo viene acompañada inevitablemente por una degradación de una parte de la energía suministrada en una forma que es menos útil. Es precisamente la segunda ley la que trata de la cantidad de calor que, en un proceso, puede convertirse en trabajo útil.

De acuerdo con la segunda ley, todo sistema natural que se mantiene sin experimentar perturbación cambia espontáneamente y se aproxima a un estado de equilibrio o de reposo, pero en el transcurso del proceso pierde capacidad de cambio espontáneo. La propiedad asociada con la capacidad de un sistema para cambiar espontáneamente se denomina *entropía*.

Para un sistema cerrado que experimenta un cambio cíclico en que recibe reversiblemente el calor por unidad de masa δq_R a la temperatura T , se puede escribir:

$$\oint \frac{\delta q_R}{T} = 0 \quad (3.4)$$

En esta ecuación, $\delta q_R / T$ define el cambio infinitesimal por unidad de masa de una propiedad termodinámica del sistema que Clausius denominó *entropía* s , o sea:

$$ds \equiv \delta q_R / T \quad (3.5)$$



La ecuación 3.5 significa que el cambio de entropía entre dos estados dados es el mismo para todos los procesos que los conectan. Por ello, el cambio de entropía en un proceso irreversible se puede medir por el valor de $\int (\delta q_R / T)$ para cualquier proceso reversible seleccionado que conecte los mismos estados inicial y final. En una forma diferencial que incluye ambos procesos, la expresión es $ds \geq (\delta Q / T)$, en que el signo “mayor que” corresponde a los procesos irreversibles y el de “igual a”, a los procesos reversibles.

En términos de entropía, la *segunda ley de la termodinámica* se enuncia así: En cualquier proceso, la entropía del universo aumenta, si el proceso es irreversible, o permanece constante, si el proceso es reversible. Su expresión matemática es:

$$\Delta S_{univ} \geq 0 \quad (3.6)$$

3.3.3 Tercera ley de la termodinámica

La *tercera ley* de la termodinámica encuentra su origen en el teorema del calor, formulado por Carnot en 1906. Establece limitaciones a cómo alcanzar el cero absoluto de temperatura. Prohíbe que se pueda alcanzar el punto $T = 0, S_0 = 0$ mediante una serie finita de procesos termodinámicos de enfriamiento de un sistema, tal como afirma el postulado de Nerst.

Nerst interpretó el teorema formulado por Carnot en los términos siguientes: los cambios en entropía ΔS , en procesos isoterms de sistemas monocomponentes, se aproximan a cero cuando la temperatura a la cual se verifica el proceso tiende a cero.

Por su parte, Planck propuso el enunciado siguiente: la entropía de cualquier sistema se anula en el estado en que $\delta U / \delta S_{v,n} = 0$ ($T = 0$).

3.4 Propiedades termodinámicas del gas perfecto

El estado termodinámico de un gas perfecto se describe mediante las propiedades siguientes: P, v, T, u, h y s . Además, se ha demostrado experimentalmente que la ecuación de estado térmico de un sistema termodinámico simple de gas de masa molecular \tilde{M} , que relaciona P, v y T , es:

$$Pv = \left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{M}} \right) T \quad (3.7)$$

3.4.1 Energía interna

Al nivel microscópico del tamaño de las partículas constitutivas de un gas, esencialmente moléculas, la energía interna representa la suma de la energía cinética de los movimientos aleatorios de translación, rotación y vibración de las mismas, y de su energía potencial,



asociada a los enlaces químicos entre ellas, entre otras causas. Se trata, pues, de la energía contenida en la materia gas, y excluye la energía cinética del movimiento del gas como un todo y la energía potencial debida a campos externos de fuerza, también como un todo.

La energía interna de un sistema puede cambiar, ya sea por calentamiento o bien por la realización de trabajo. De las ganancias o pérdidas de energía del sistema da cuenta la variación de su energía interna en el curso del proceso termodinámico que conduce al sistema de un estado a otro. Entre la variación de energía interna del sistema entre estados, y las ganancias y/o pérdidas de calor y trabajo que se producen en los procesos termodinámicos de tránsito, no existe una relación universal simple; solo cabe escribir $\Delta U = \sum_i E_i$, donde ΔU es el cambio de valor de la energía interna del sistema entre el estado final y el inicial, y los E_i son los valores de las varias energías transferidas al sistema en su tránsito del estado inicial al final.

La energía interna de un sistema en un estado determinado no puede medirse directamente. Su valor se da en relación con el de otro estado, que se toma como referencia, desde el cual ha llegado por una cadena de procesos termodinámicos. Dicha cadena o *camino termodinámico* puede describirse teóricamente por ciertas variables de estado extensivas del sistema, principalmente su entropía S , su volumen V y su número de moles $\{N_i\}$. Es, pues, una magnitud extensiva que, a la vez, es una función de estado del sistema $U(S, V, \{N_i\})$, ya que su valor no depende del camino seguido para llegar al estado corriente del sistema desde el de referencia. Así, en termodinámica, se considera que la energía interna es una de las dos funciones de estado esenciales de las variables de estado termodinámico de un sistema.

Al ser la energía interna una propiedad extensiva, en un sistema que experimenta transformación por procesos termodinámicos, su variación, en el sentido de si se deben a transferencia de calor, al trabajo realizado o a ambos, dependerá del tipo de sistema, que puede ser totalmente aislado, térmicamente aislado, mecánicamente aislado o cerrado.

En un sistema totalmente aislado, no pueden producirse transferencias de masa, de calor y de trabajo, de modo que su energía interna no varía, sino que se mantiene constante, $\Delta U = 0$.

Si el sistema es cerrado y se encuentra térmicamente aislado, solo pueden darse procesos de trabajo; luego, la variación de energía interna se expresará $dU = \delta W$, con el signo correspondiente según si el trabajo es realizado por el sistema o por el entorno.

Si el sistema es cerrado y se encuentra mecánicamente aislado, los cambios en energía interna del sistema se deben exclusivamente a transferencias de calor, o sea, $dU = \delta Q$, con el criterio de signo correspondiente.



Si el sistema es cerrado pero puede intercambiar calor y trabajo con su entorno, el cambio en la energía interna del sistema se expresa: $dU = \delta Q + \delta W$.

Suponiendo un proceso reversible, el calor transferido al sistema es $\delta Q = TdS$ y el trabajo, como flujo de energía al entorno del sistema que lo realiza, es $dU = TdS - PdV$.

Cuando se producen variaciones de temperatura y de volumen en el sistema, el cambio en el valor de su energía interna viene dado por la expresión:

$$dU = C_v dT + \left(T \left[\frac{\partial P}{\partial T} \right]_v - P \right) dV \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 es muy útil si se conoce la ecuación de estado del gas.

Energía interna de un sistema multicomponente

La energía interna de un sistema multicomponente se describe habitualmente en términos de la entropía, del volumen y del número de componentes o especies químicas que contiene. Su expresión general es $U = U(S, V, N_{i=n})$, donde $N_{i=n}$ son las cantidades molares de las n especies químicas que componen el sistema.

La expresión diferencial de la energía interna se escribe:

$$dU = TdS - PdV + \sum_i \mu_i dN_i \quad (3.9)$$

donde los coeficientes μ_i son los potenciales químicos de los componentes del sistema y el término $\sum_i \mu_i dN_i$ es la energía libre de Gibbs, que surge a partir del cambio de composición del sistema a temperatura y presión constantes.

3.4.2 Ecuación calórica de estado

Sea u la energía interna de un sistema por unidad de masa (kg) o por unidad de cantidad de materia (mol), como se expresa habitualmente en los problemas de dinámica de gases que se encuentran en ingeniería. Como quiera que toda propiedad de estado termodinámico de un sistema puede ser completamente representada por dos de sus tres coordenadas termodinámicas, o bien por una de ellas y otra propiedad de estado, se puede escribir $u = u(s, v)$. Aunque mediante este funcional se puede llegar a conocer toda la información del sistema, es evidente que presenta serios inconvenientes: u y s no se pueden medir directamente y v es difícil de medir con precisión. Sin embargo, este funcional es una característica específica del sistema del cual se puede derivar la denominada *ecuación calórica de estado*, cuya expresión es $u = u(T, v)$. En efecto, mediante transformaciones matemáticas, se obtiene $(\partial u / \partial s)_v = T(s, v)$, que, combinada con la relación funcional $u = u(s, v)$ para eliminar la entropía específica s , resulta



$u = u(T, v)$, que representa la energía interna específica de cualquier gas cuando experimenta procesos de transformación termodinámica que implican únicamente cambios de temperatura y de volumen.

Como la energía interna no depende del camino del proceso termodinámico para llegar a ella, su diferencial es exacta y, por tanto, se puede escribir.

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \quad (3.10)$$

En el caso de un gas térmicamente perfecto, la teoría cinética demuestra que la variación de energía interna por unidad de masa en un proceso termodinámico a temperatura constante no depende del volumen; por tanto, la ecuación (3.10) resulta:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (3.11)$$

Ahora, escrita la primera ley para un proceso cuasiestático a volumen constante en la forma $dw = -Pdv = 0$, resulta:

$$du = \delta q \quad (3.12)$$

Comparando las ecuaciones 3.10 y 3.11, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (3.13)$$

De conformidad con lo expuesto en otro apartado de este capítulo, el primer término de la igualdad (3.13) define una propiedad intensiva térmica de cada sustancia, que recibe el nombre de *calor específico a volumen constante*, c_v .

Por consiguiente, la *ecuación calórica de estado* se expresa en forma diferencial así:

$$du = c_v dT \quad (3.14)$$

Solo cabe utilizar la ecuación $u = c_v T$ o la relación funcional $u = u(T)$ cuando c_v es constante.

Un gas que tiene un c_v de valor constante se denomina *gas calóricamente perfecto*. Si, además, es *térmicamente perfecto*, el gas se denomina *gas perfecto*. Si estas condiciones no se cumplen, el gas se considera real.

3.4.3 Capacidad calorífica y calores específicos

La experiencia enseña que la cantidad de calor necesaria para cambiar la temperatura de una sustancia depende de su naturaleza y viene definida genéricamente para un sistema por la ecuación de proporcionalidad:

$$Q \propto C_{sust} \Delta T \quad (3.15)$$



Para cada sustancia, C_{sust} , denominada *capacidad calorífica*, tiene un valor que puede determinarse midiendo la cantidad de calor transferido a un sistema de masa m cuando este ha aumentado un grado su temperatura. Matemáticamente, se define así:

$$C_{sust} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta T} \quad (3.16)$$

Cabe interpretar la capacidad calorífica de una sustancia como la mayor o menor resistencia a su calentamiento. Viene a ser una especie de inercia térmica de la sustancia.

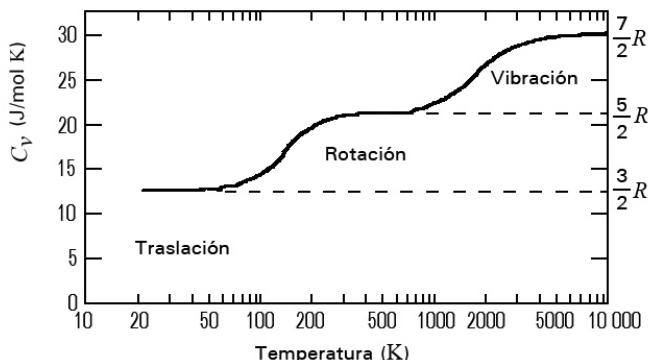
La capacidad calorífica es una propiedad extensiva, pues depende de la cantidad de sustancia. Además, puesto que la cantidad de calor transferida varía en función del camino que se ha seguido en el proceso, depende del tipo de proceso en cuestión y, por consiguiente, de la presión y de la temperatura.

Una magnitud más rigurosa para identificar físicamente la naturaleza y el origen de esta propiedad de la materia es la capacidad calorífica por unidad de masa de la sustancia. Para un sistema formado por una sola sustancia homogénea, se define como $c = C / m$ y se denomina *calor específico*, el cual, como la capacidad calorífica, depende del proceso térmico por el cual se ha transferido calor a la sustancia y, por consiguiente, de la presión y de la temperatura. Dos procesos útiles son: a volumen constante y a presión constante.

Para su aplicación en los procesos termodinámicos que se dan en ingeniería y, en particular, en dinámica de gases, los calores específicos de los gases ideales son una aproximación sumamente útil a los valores de los correspondientes gases reales. No obstante, conviene no olvidar los límites de validez del modelo mediante el cual se ha determinado el valor del calor específico. Según la teoría cinética de Maxwell-Boltzmann, el calor δQ que se requiere para elevar la temperatura de un gas dT se almacena en él en forma de energía cinética de sus moléculas. Por otra parte, la *ley de equipartición* de Maxwell establece que la energía cinética de una molécula de gas, sea de traslación, de rotación o de vibración, se divide igualmente entre todos sus grados de libertad.

La figura 3.2 muestra en qué medida las tres clases de energía contribuyen al valor del calor específico molar del hidrógeno en función de la temperatura.

Fig. 3.2.
Calor específico
molar del hidró-
geno en función
de la temperatura¹





Calor específico a volumen constante

Consideremos la relación funcional de la energía interna de un gas $u = u(T, v)$. Como la energía interna no depende del camino, su diferencial es exacta; luego:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \quad (3.17)$$

Por otra parte, la primera ley para un proceso cuasiestático, en que el trabajo realizado se expresa por $dw = Pdv$, se escribe:

$$du = \delta q - Pdv \quad (3.18)$$

En ambas ecuaciones, el término en dv es cero, pues se ha especificado que el proceso es a volumen constante; por consiguiente:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \text{ y } du = \delta q \rightarrow \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (3.19)$$

Así, se constata que cualquier incremento de energía interna del gas en un proceso a volumen constante se debe únicamente a transferencia de calor. Entonces, por definición de calor específico tenemos:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = c_v \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (3.20)$$

Para los gases monoatómicos, en que la energía interna es, en su totalidad, energía cinética de traslación molecular con tres grados de libertad, el *teorema de equipartición* aporta el resultado siguiente: $\tilde{u} = \frac{3}{2} \tilde{R}T$. Entonces, el calor específico molar a volumen constante viene definido por la expresión:

$$\tilde{c}_v = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2} \tilde{R}, \text{ y, por unidad de masa, } c_v = \frac{3}{2} R \quad (3.21)$$

En los gases diatómicos, la energía interna se debe a las energías cinéticas de traslación y de rotación de las moléculas a temperaturas moderadas. Por el mismo método antes citado, teniendo en cuenta que, en estos gases, los grados de libertad son cinco, se obtiene que la energía interna molar tiene el valor $\tilde{u} = (5/2) \tilde{R}T$; por tanto, el calor específico molar a volumen constante toma el valor:

$$\tilde{c}_v = (5/2) \tilde{R}, \text{ y, por unidad de masa, } c_v = (5/2) R$$

En los gases poliatómicos, los grados de libertad son seis. Los resultados obtenidos por procedimiento idéntico al de los otros gases se desvían demasiado de los valores reales, por lo cual carecen de interés.

**Calor específico a presión constante**

Por argumentos idénticos a los expuestos en el caso anterior, el estado termodinámico de un gas viene especificado por el funcional entalpía $h = h(T, P)$. Siguiendo los mismos razonamientos, se obtiene:

$$c_p \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3.22)$$

Relaciones entre calores específicos

Los calores específicos de un gas perfecto se pueden relacionar con su constante de gas del modo siguiente.

La primera ley, en términos de la energía interna, se escribe $\delta q = du + dw$. A su vez, supuesto un proceso cuasiestático, se puede también expresar en términos de entalpía en:

$$\delta q = dh - v dP$$

Igualando ambas expresiones, y sustituyendo la energía interna y la entalpía por sus expresiones en términos de los correspondientes calores específicos, resulta:

$$c_p dT - v dP = c_v dT + P dv$$

O sea:

$$c_p - c_v = \frac{d(Pv)}{dT}$$

de la cual se obtiene:

$$c_p - c_v = R \quad (3.23)$$

Otra relación interesante entre los calores específicos que aparece en la ecuación de cambio isentrópico de estado de un gas perfecto es, entre otras:

$$\gamma = c_p / c_v \quad (3.24)$$

Sus valores son:

- Para gases monoatómicos $\gamma = 5/3$, exacto
- Para gases diatómicos $\gamma = 7/5 = 1,4$, muy aproximado
- Para gases poliatómicos $\gamma = 8/6$, que se desvía mucho de los resultados experimentales

Finalmente, a partir de las ecuaciones 3.23 y 3.24, se obtienen, para los calores específicos, las expresiones siguientes:

$$c_v = R / (\gamma - 1) \text{ , y } c_p = \gamma R / (\gamma - 1) \quad (3.25)$$



Resumen

- Los calores específicos c_v y c_p son propiedades termodinámicas de cada sustancia que, por definición, dependen únicamente de su estado. Sus valores son sumamente importantes y han sido determinados experimentalmente como una función del estado termodinámico para un gran número de sustancias compresibles.
- Ambos calores específicos son función de la temperatura T , únicamente.
- En pequeños intervalos de temperatura ($\Delta T \approx 200 \text{ K}$), se supone con frecuencia que ambos calores específicos son constantes. En intervalos mayores, también cabe considerarlos constantes, a efectos prácticos, pues varían muy poco con la temperatura.
- Un gas ideal con calores específicos independientes de la temperatura, o sea, constantes, se denomina *gas perfecto*. Por ejemplo, los gases monoatómicos y los diatómicos son considerados perfectos a las temperaturas ordinarias.
- Los gases monoatómicos como He, Ne y Ar, y la mayoría de los vapores metálicos tienen un valor de c_v constante, aproximadamente igual a $(3/2)R$, en un rango amplio de temperaturas. Lo mismo ocurre con c_p , cuyo valor es aproximadamente $(5/2)R$.
- La relación de calores específicos γ tiene un valor constante, muy aproximadamente igual a $5/3$, en un amplio rango de temperaturas.
- Los denominados *gases diatómicos permanentes*, principalmente H_2 , N_2 , O_2 , aire, NO y CO, tienen un valor de c_v constante, aproximadamente igual a $(5/2)R$, a temperaturas ordinarias, pero aumenta lentamente a temperaturas más altas. Lo mismo ocurre con el valor de c_p , si bien es aproximadamente igual a $(7/2)R$.
- La relación de calores específicos γ tiene valor constante, aproximadamente igual a 1,4, en el rango de temperaturas de 150 K a 600 K, y decrece a temperaturas superiores.
- Los gases poliatómicos y los que son químicamente activos, tales como CO_2 , NH_3 , CH_4 y Freón, tienen valores de los calores específicos y de su relación γ que varían con la temperatura, una variación que difiere para cada gas. La tendencia general es que los gases de masa molecular elevada, cuyas moléculas son más complejas que las de los gases antes citados, tienen valores de γ más próximos a la unidad que los gases diatómicos. Por ejemplo, los Freón, con masa molecular superior a 100, tienen valores de γ inferiores a 1,2.
- En general, para sustancias diferentes a los gases perfectos, la energía interna y la entalpía dependen de la presión y de la temperatura, por lo cual los valores referidos para los gases perfectos dejan de ser aplicables sin corrección.



3.4.4 Procesos termodinámicos

En dinámica de gases, todos los cambios de estado termodinámico ocurren en un sistema abierto, o sea, con flujo másico de gas. Se sabe que un gas perfecto es viscoso, por lo cual su flujo debe estar acompañado de disipación de energía por fricción; es decir, los procesos en que está implicado nunca son isentrópicos, pues son irreversibles. Eso es lo que ocurre inevitablemente en las toberas, en los rodets de álabes en las turbinas y en los compresores, etc. Sin embargo, los procesos son tan rápidos que el sistema de gas no dispone del tiempo suficiente para que se produzca una transferencia significativa de calor; por ello, los procesos se consideran, en una primera aproximación, adiabáticos ($\delta q = 0$). Se les supone también reversibles y, por tanto, isentrópicos. Ahora bien, las prestaciones que se exigen en la actualidad a las turbinas, los compresores, las toberas de propulsión, etc., son tan elevadas que el diseño definitivo de los componentes en que se produce flujo debe tener en cuenta los efectos de disipación de la energía que se produce en las capas límites, las estelas, etc. Así, por ejemplo, un procedimiento habitual para el diseño de una tobera de un motor de cohete consiste en considerar el núcleo del flujo como isentrópico y el asociado a la capa límite, como adiabático irreversible, y después, en el cálculo definitivo, acoplar los resultados del núcleo del flujo y de la capa límite.

Aparte de la observación anterior y de los cambios en la energía interna, la entalpía y la entropía por unidad de masa de un sistema termodinámico, los procesos por los cuales un gas pasa de un estado a otro que resultan más importantes para resolver problemas de ingeniería son los siguientes:

- Cambio isotérmico, $dT = 0$
- Cambio adiabático, $\delta q = 0$
- Cambio isobárico, $dP = 0$
- Cambio isocórico, $dv = 0$
- Cambio isentrópico, $ds = 0$
- Cambio politrópico, $Pv^n = \text{cte.}$

(Ver [Re93] y [SC79])

(Ver ref. 1)



3.5 Cambios de entalpía y de entropía en un gas perfecto

Por definición, la entalpía por unidad de masa de un gas se expresa así:

$$h \equiv u + Pv \quad (3.26)$$

Todas las magnitudes que aparecen en la ecuación 3.26 son independientes del camino que sigue el proceso para pasar de un valor a otro. Por consiguiente, su diferencial es exacta.

Diferenciando la ecuación 3.26, obtenemos:

$$dh = du + Pdv + vdP \quad (3.27)$$

En un proceso de gas real, irreversible, la variación de energía interna del gas se expresa:

$$du = \delta q - \delta u_f - Pdv \quad (3.28)$$

Combinando las ecuaciones 3.27 y 3.28, resulta:

$$dh = \delta q - \delta u_f + vdP \quad (3.29)$$

donde δu_f es la pérdida de energía interna del gas en el proceso irreversible de variación de la entalpía. Ahora bien, en un proceso reversible, dicho término es cero; por tanto:

$$\delta q = dh - vdP \quad (3.30)$$

Si el proceso es adiabático ($\delta q = 0$) y reversible, es decir isentrópico, resulta:

$$dh - vdP = 0 \quad (3.31)$$

3.5.1 Cambio de entalpía en un gas perfecto

Diferenciando la ecuación 3.26, obtenemos:

$$dh = du + d(Pv) \quad (3.32)$$

Para un gas perfecto, se cumple:

$$du = c_v dT \quad \text{y} \quad d(Pv) = R dT$$

Así, la ecuación 3.32 resulta:

$$dh = c_v dT + R dT$$

Y, como $c_v + R$ es igual a:

$$h = c_p dT \quad (3.33)$$

La ecuación 3.33 permite calcular, por integración, el cambio de entalpía del gas entre los estados a temperaturas T_2 y T_1 . El resultado que se obtiene es:



$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \quad (3.34)$$

Si el gas perfecto en cuestión tiene calores específicos constantes en el intervalo de temperaturas T_1 a T_2 , entonces la ecuación 3.34 resulta:

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (3.35)$$

3.5.2 Cambio de entropía en un gas perfecto

El cambio infinitesimal de entropía en un proceso reversible se escribe:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{Pdv}{T} \quad (3.36)$$

Para un gas térmicamente perfecto, la ecuación de la energía interna y la ecuación de estado, aplicadas a la ecuación 3.36, la transforman en la siguiente:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (3.37)$$

Sustituyendo c_v por $(c_p - R)$, se obtiene:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \left(\frac{dT}{T} - \frac{dv}{v} \right) \quad (3.38)$$

Dividiendo por Pv la ecuación de estado en forma diferencial $Pdv + vdP = RdT$, resulta:

$$\left(\frac{dT}{T} \right) - \left(\frac{dv}{v} \right) = \left(\frac{dP}{P} \right)$$

que, sustituida en la ecuación 3.38, da por resultado:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (3.39)$$

La integral indefinida de la ecuación 3.39 es:

$$s = \int c_p \frac{dT}{T} - R \ln P + cte. \quad (3.40)$$

La constante de integración se puede calcular a partir de un estado de referencia mediante el cual podemos determinar el cambio de entropía del gas perfecto al pasar al estado de coordenadas termodinámicas P, T .



3.5.3 Cambio isentrópico de estado

En un cambio isentrópico de estado, $ds = 0$ y la ecuación 3.39 se escribe:

$$\frac{dT}{T} = R \frac{dP}{P} \quad (3.41)$$

Habida cuenta de las relaciones $c_p - c_v = R$ y $\gamma = (c_p / c_v)$, su sustitución en la ecuación 3.41 aporta, mediante la conveniente ordenación de sus términos, la ecuación siguiente:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{dP}{P} \right) \quad (3.42)$$

Teniendo en cuenta que, para un gas perfecto, γ es una constante, la integral indefinida de la ecuación 3.40 es:

$$\ln T = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \ln P + cte. \quad (3.43)$$

La ecuación 3.43 se escribe también así:

$$\ln \left(\frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right) = cte. \quad (3.44)$$

Para el estado (T_0, P_0) , la constante es igual a $\ln \left(\frac{T_0}{P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right)$; por consiguiente, sustituyendo este valor en la ecuación 3.44, se obtiene:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3.45)$$

La ecuación 3.45 define la relación entre temperatura y presión en una transformación termodinámica del estado de un gas perfecto que sigue un proceso isentrópico.

La relación entre presión y volumen del gas en un proceso idéntico se obtiene por una sencilla transformación y se expresa así:

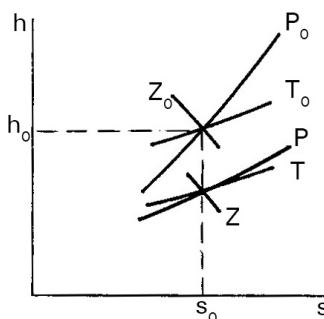
$$Pv^\gamma = cte. \quad (3.46)$$



3.6 Diagrama de entalpía-entropía

La mayoría de los procesos de dinámica de gases se pueden ilustrar gráficamente representándolos en un diagrama de entropía-entalpía, denominado *diagrama de Mollier*. La figura 3.3 ilustra esquemáticamente este diagrama.

Fig. 3.3.
Diagrama de
Mollier



Para un gas perfecto, tanto la entalpía como la energía interna son proporcionales a la temperatura; por tanto, para trazar el diagrama entropía-entalpía, se puede emplear cualquiera de aquellas tres magnitudes. Las características generales del diagrama de entropía-entalpía para un gas perfecto se deducen de la manera siguiente.

Integrando la ecuación diferencial de variación de la entropía, expresada de la forma:

$$ds = c_v (dT / T) + R (dv / v),$$

entre un estado general y un *estado de referencia*, denotado por el subíndice 0, se obtiene:

$$s - s_0 = c_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (3.47)$$

Otra forma de escribir la ecuación 3.47 es:

$$s(P, T) = c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

A partir de la ecuación 3.47, se pueden determinar las líneas de volumen específico constante, v , en el plano T, s . Se obtiene:

$$T = T_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\gamma-1} e^{s/c_v} = Cte v^{-(\gamma-1)} e^{s/c_v} \quad (3.48)$$

Esta ecuación muestra que las curvas de $v = (1/\rho) = cte.$, denominadas *líneas -v* o *líneas -ρ*, son curvas exponenciales en el plano T, s .

Las curvas de presión constante, o *líneas -p* o *isóbaras*, vienen dadas por:



$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} e^{s/c_p} = C^{te} P^{(\gamma-1)/\gamma} e^{s/c_p} \quad (3.49)$$

En la figura 3.4, se han representado las curvas correspondientes a las ecuaciones 3.48 y 3.49 para el aire, supuesto gas perfecto, con $\gamma = 1,4$ y $R = 287,04 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. En dicha figura, se ha representado, en el eje de abscisas, la entropía adimensional s/R . Las condiciones de referencia de las curvas de la figura son $T_0 = 294,4 \text{ K}$ y $P_0 = 1 \text{ atm}$.

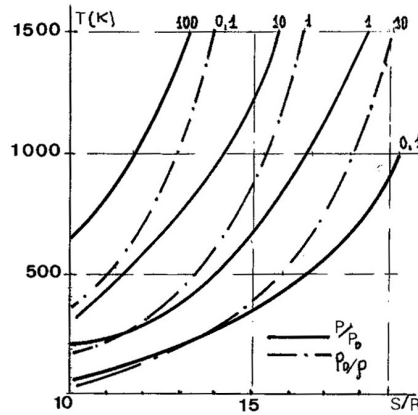


Fig. 3.4.
Características de
las líneas isocoras
e isobaras en el
plano T, S

Puesto que el valor de referencia de s/R es arbitrario, se ha tomado $s_0/R = 12$.

3.7 Velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones

En dinámica de gases, la velocidad de propagación de una pequeña perturbación de presión, denominada *velocidad del sonido* o *velocidad acústica*, y la relación de la velocidad de flujo con la velocidad del sonido, denominada *número de Mach*, son propiedades importantes del proceso de flujo.

Considerado un fluido compresible como un continuo cuyo módulo volumétrico isentrópico es $k_s = -v(dP/dv)_s$, se demuestra, como se explica más adelante, que una pequeña perturbación de presión se propaga a la velocidad del sonido a , dada por:

$$a = (k_s / \rho)^{1/2} \quad (3.50)$$

donde ρ es la densidad del fluido.

La magnitud del módulo k_s de un fluido compresible depende de cómo es comprimido el fluido. Si el fluido es un gas perfecto y el proceso de compresión es isotrópico, entonces $k_s = \gamma P$. Introduciendo este valor de k_s en la ecuación 3.50, se obtiene la expresión siguiente para la velocidad del sonido en un gas perfecto:

$$a = (\gamma P / \rho)^{1/2} = (\gamma R T)^{1/2} \quad (3.51)$$

La velocidad a la cual viaja una pequeña perturbación de presión en un fluido depende de su longitud de onda. Si la densidad molecular es grande, lo cual equivale a que el recorrido libre molecular es muy pequeño, una pequeña perturbación de presión se propaga en el medio con una pequeña pérdida de energía. Por el contrario, si la densidad molecular es pequeña, como es el caso del aire a gran altitud, el recorrido libre molecular puede ser tan grande que llegue a ser de igual o mayor longitud que la de la onda acústica. En tal caso, el transporte de moléculas de la rama de alta presión de la onda a la de baja presión causa una disipación de su energía, amortiguándola.

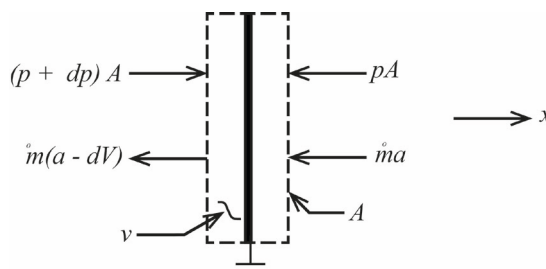
En la dinámica de gases, las perturbaciones de presión se producen en el flujo de gas a velocidad V . La experiencia enseña, y la teoría ratifica, que la relación entre la velocidad del gas V y la velocidad del sonido en él, denominada *número de Mach*, es una magnitud muy importante, que sirve para clasificar las diferentes clases de flujo de gas por la influencia que en él tienen los efectos de compresibilidad. Además, la teoría desarrollada para explicar la fenomenología del flujo y las relaciones entre las propiedades de estado del gas y las magnitudes por las cuales se define su movimiento aporta ecuaciones explícitas en términos del número de Mach.

Por ello, se considera conveniente explicar, mediante los recursos analíticos de la mecánica de fluidos, cómo se propaga una pequeña perturbación de presión en el seno de un gas en movimiento y cómo la velocidad de dicha propagación de la perturbación es la velocidad acústica o velocidad del sonido en el gas, poniendo de manifiesto la influencia de la naturaleza del gas, por su constante R , y la de su estado termodinámico.

Sea V la velocidad del gas en que ocurre una pequeña perturbación de presión dP que se propaga como una onda frontal plana.

La figura 3.5 muestra que el paso de la onda de presión a través del fluido le imprime un cambio de velocidad infinitesimal dV en la dirección de propagación de la perturbación, al tiempo que va modificando el estado termodinámico del gas.

Fig. 3.5.



Sean dP, dT y $d\rho$ los cambios elementales de las propiedades de estado que se han producido. Entonces, con el fin de establecer las condiciones de equilibrio dinámico del frente de onda que se desplaza a la velocidad a , se le asocia un volumen de control estacionario $\partial \vec{V} / \partial t = 0$, al cual se aplica la ecuación de cantidad de movimiento, como se muestra en la figura 3.6. Dicha ecuación, para un observador que se mueve a la misma velocidad que la onda de presión, se escribe:



$$-\int P dA = \int \vec{V} (\rho \vec{V} d\vec{A}) \quad (3.52)$$

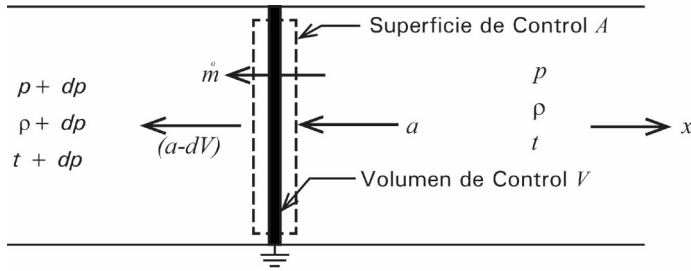


Fig. 3.6.

A partir de los valores de las magnitudes que se muestran en la figura 3.6, representativas de las fuerzas de presión y de las cantidades de movimiento que operan en el volumen de control, la ecuación 3.52 tiene la solución siguiente:

$$-PA + (P + dP)A = \dot{m}[-(a - dV)] - \dot{m}(-a) \quad (3.53)$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad se escribe:

$$\rho a A = (\rho + d\rho) A (a - dV) \quad (3.54)$$

Resolviendo en dV y despreciando los términos de orden superior al primero, resulta:

$$dV = a \frac{d\rho}{\rho}$$

Sustituyendo dV por el valor que resulta de la ecuación 3.53, se obtiene:

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} \quad (3.55)$$

Ahora bien, habida cuenta de que el gas es ideal y que el proceso es adiabático sin fuerzas de campo ni realización de trabajo, la variación de la presión con respecto a la variación de la densidad del gas ocurre en un proceso isentrópico. Entonces, la ecuación 3.55 se escribe:

$$a = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} \quad (3.56)$$

Por consiguiente, la velocidad con que se propaga una pequeña perturbación en un gas es la del sonido.

(Ver [ZH76])



Ejercicios

Ejercicio 1

Se comprime aire desde la presión de 1 atm y 300 K de temperatura a la presión final de 3 atm. Calcula el trabajo de compresión si el proceso es isentrópico y si el rendimiento de compresión es $\eta_c = 0,80$. Calcula el cambio de entropía correspondiente en este segundo caso.

Resolución

Un método rápido y simple consiste en utilizar la tabla de propiedades termodinámicas del aire. De ella se reproduce la parte que va desde 260 K hasta 650 K.

Para $T_1 = 300\text{ K}$, la tabla muestra los siguientes valores de entalpía, presión reducida y parámetro ϕ :

$$h_1 = 301,329 \text{ kJ/kg}, \quad p_{r1} = 1,0219 \quad \text{y} \quad \phi_1 = 6,7035 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

Como quiera que $\frac{p_{r2}}{p_{r1}} = \frac{p_2}{p_1} = 3$, resulta $p_{r2} = 3 \cdot p_{r1} = 3 \cdot 1,0219 = 3,0657$

En la tabla, a $p_{r2} = 3,0657$ le corresponden $T_2 = 410,12\text{ K}$, $h_{2i} = 412,418 \text{ kJ/kg}$; por tanto:

$$\Delta h_{ci} = h_{2i} - h_1 = 412,418 - 301,329 = 111,089 \text{ kJ/kg}$$

Si el rendimiento de la compresión es 0,8, entonces: $\Delta h_c = \Delta h_{ci} / 0,8 = 138,861 \text{ kJ/kg}$; por tanto, el valor de la entalpía y de la temperatura del aire, una vez comprimido, es:

$$h_2 = h_1 + \Delta h_c = 301,329 + 138,861 = 440,190 \text{ kJ/kg}$$

A partir de este valor de la entalpía, la tabla da $T_2 = 437,43\text{ K}$

El incremento de entropía que se genera en este proceso viene dado por la ecuación:

$$\Delta s = \phi_2 - \phi_1 - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Para $T_2 = 437,43\text{ K}$, se encuentra en la tabla $\phi_2 = 7,0844 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$; por consiguiente:

$$\Delta s = 7,0844 - 6,7035 - 0,28704 \ln(3) = 0,0655 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$



Propiedades termodinámicas del aire (tabla parcial)

t	h	u	ϕ	p_r	v_r	c_p	c_v	γ	a
K	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg-K			kJ/kg-K	kJ/kg-K		m/s
260	261,173	186,546	6,5599	.61949+0	.12046+6	1.0036	.7165	1.4006	323,30
265	266,191	190,129	6,5790	.66216+0	.11487+6	1.0036	.7166	1.4006	326,39
270	271,209	193,712	6,5977	.70688+0	.10963+6	1.0036	.7166	1.4005	329,45
275	276,228	197,295	6,6161	.75372+0	.10472+6	1.0037	.7167	1.4005	332,48
280	281,246	200,879	6,6342	.80275+0	.10012+6	1.0038	.7168	1.4004	335,48
285	286,266	204,463	6,6520	.85401+0	.95787+5	1.0040	.7169	1.4004	338,46
290	291,286	208,048	6,6695	.90758+0	.91714+5	1.0041	.7171	1.4003	341,40
295	296,307	211,634	6,6866	.96352+0	.87879+5	1.0043	.7173	1.4002	344,32
300	301,329	215,221	6,7035	.10219+1	.84264+5	1.0045	.7175	1.4000	347,21
305	306,353	218,809	6,7201	.10827+1	.80853+5	1.0048	.7177	1.3999	350,08
310	311,377	222,398	6,7365	.11462+1	.77631+5	1.0050	.7180	1.3998	352,92
315	316,403	225,989	6,7525	.12122+1	.74585+5	1.0053	.7183	1.3996	355,73
320	321,430	229,581	6,7684	.12810+1	.71702+5	1.0056	.7186	1.3994	358,52
325	326,459	233,175	6,7840	.13525+1	.68971+5	1.0059	.7189	1.3993	361,29
330	331,489	236,770	6,7995	.14269+1	.66363+5	1.0063	.7193	1.3991	364,03
335	336,522	240,367	6,8145	.15041+1	.63928+5	1.0067	.7196	1.3989	366,75
340	341,556	243,966	6,8294	.15843+1	.61596+5	1.0071	.7200	1.3986	369,45
345	346,592	247,568	6,8441	.16676+1	.59380+5	1.0075	.7204	1.3984	372,12
350	351,631	251,171	6,8586	.17540+1	.57274+5	1.0079	.7209	1.3982	374,78
355	356,671	254,776	6,8729	.18436+1	.55268+5	1.0084	.7213	1.3979	377,41
360	361,714	258,384	6,8870	.19365+1	.53359+5	1.0089	.7218	1.3976	380,02
365	366,760	261,995	6,9009	.20327+1	.51539+5	1.0094	.7223	1.3974	382,62
370	371,808	265,608	6,9146	.21324+1	.49804+5	1.0099	.7229	1.3971	385,19
375	376,859	269,223	6,9282	.22355+1	.48148+5	1.0104	.7234	1.3968	387,74
380	381,912	272,842	6,9416	.23423+1	.46566+5	1.0110	.7240	1.3965	390,27
385	386,969	276,463	6,9548	.24527+1	.45055+5	1.0116	.7246	1.3961	392,79
390	392,028	280,087	6,9679	.25668+1	.43611+5	1.0122	.7252	1.3958	395,28
395	397,091	283,715	6,9809	.26846+1	.42229+5	1.0128	.7258	1.3955	397,76
400	402,156	287,345	6,9935	.28067+1	.40906+5	1.0134	.7264	1.3951	400,22
405	407,225	290,979	7,0061	.29326+1	.39640+5	1.0141	.7271	1.3948	402,66
410	412,297	294,616	7,0186	.30625+1	.38426+5	1.0148	.7277	1.3944	405,09
415	417,373	298,256	7,0309	.31967+1	.37263+5	1.0155	.7284	1.3940	407,49
420	422,452	301,900	7,0430	.33351+1	.36147+5	1.0162	.7292	1.3936	409,89
425	427,535	305,548	7,0551	.34778+1	.35075+5	1.0169	.7299	1.3933	412,26
430	432,621	309,199	7,0670	.36250+1	.34047+5	1.0177	.7306	1.3929	414,62
435	437,711	312,854	7,0787	.37768+1	.33059+5	1.0184	.7314	1.3924	416,96
440	442,805	316,513	7,0904	.39331+1	.32110+5	1.0192	.7322	1.3920	419,29
445	447,903	320,176	7,1019	.40942+1	.31197+5	1.0200	.7330	1.3916	421,60
450	453,005	323,843	7,1133	.42601+1	.30319+5	1.0208	.7338	1.3912	423,90
455	458,111	327,513	7,1246	.44309+1	.29474+5	1.0216	.7346	1.3907	426,18
460	463,221	331,188	7,1357	.46067+1	.28661+5	1.0224	.7354	1.3903	428,44
465	468,335	334,868	7,1468	.47877+1	.27877+5	1.0233	.7363	1.3898	430,70
470	473,454	338,551	7,1577	.49738+1	.27122+5	1.0242	.7371	1.3894	432,93
475	478,577	342,239	7,1666	.51653+1	.26395+5	1.0250	.7380	1.3889	435,16
480	483,704	345,931	7,1793	.53622+1	.25693+5	1.0259	.7389	1.3885	437,37
485	488,836	349,628	7,1900	.55647+1	.25017+5	1.0268	.7398	1.3880	439,57
490	493,973	353,329	7,2005	.57727+1	.24363+5	1.0278	.7407	1.3875	441,75
495	499,114	357,035	7,2109	.59865+1	.23733+5	1.0287	.7417	1.3870	443,92
500	504,260	360,746	7,2213	.62062+1	.23124+5	1.0296	.7426	1.3865	446,08
505	509,410	364,461	7,2315	.64318+1	.22536+5	1.0306	.7436	1.3860	448,22
510	514,566	368,182	7,2417	.66636+1	.21968+5	1.0316	.7445	1.3855	450,35
515	519,726	371,907	7,2518	.69015+1	.21419+5	1.0325	.7455	1.3850	452,47
520	524,891	375,637	7,2617	.71457+1	.20887+5	1.0335	.7465	1.3845	454,56
525	530,061	379,372	7,2716	.73963+1	.20374+5	1.0345	.7475	1.3840	456,67
530	535,236	383,112	7,2814	.76535+1	.19877+5	1.0355	.7485	1.3835	458,76
535	540,417	386,857	7,2912	.79173+1	.19395+5	1.0366	.7495	1.3829	460,83
540	545,602	390,607	7,3008	.81880+1	.18930+5	1.0376	.7506	1.3824	462,89
545	550,792	394,362	7,3104	.84655+1	.18479+5	1.0386	.7516	1.3819	464,94
550	555,988	398,123	7,3199	.87501+1	.18042+5	1.0397	.7527	1.3814	466,98
555	561,189	401,889	7,3293	.90418+1	.17618+5	1.0407	.7537	1.3808	469,00
560	566,396	405,660	7,3386	.93408+1	.17208+5	1.0418	.7548	1.3803	471,02
565	571,607	409,437	7,3479	.96473+1	.16810+5	1.0429	.7559	1.3797	473,02
570	576,825	413,219	7,3571	.99613+1	.16424+5	1.0440	.7569	1.3792	475,02
575	582,047	417,006	7,3662	.10283+2	.16050+5	1.0451	.7580	1.3786	477,00
580	587,275	420,799	7,3753	.10612+2	.15687+5	1.0462	.7591	1.3781	478,98
585	592,509	424,598	7,3843	.10950+2	.15334+5	1.0473	.7603	1.3775	480,94
590	597,748	428,402	7,3932	.11295+2	.14992+5	1.0484	.7614	1.3770	482,90
595	602,993	432,211	7,4020	.11649+2	.14660+5	1.0495	.7625	1.3764	484,84
600	608,243	436,027	7,4108	.12011+2	.14338+5	1.0507	.7636	1.3759	486,77
605	613,499	439,848	7,4195	.12382+2	.14024+5	1.0518	.7648	1.3753	488,70
610	618,761	443,674	7,4282	.12761+2	.13720+5	1.0529	.7659	1.3748	490,61
615	624,029	447,507	7,4368	.13150+2	.13424+5	1.0541	.7671	1.3742	492,52
620	629,302	451,345	7,4453	.13547+2	.13137+5	1.0552	.7682	1.3736	494,42
625	634,581	455,189	7,4538	.13953+2	.12857+5	1.0564	.7694	1.3731	496,30
630	639,866	459,039	7,4622	.14368+2	.12585+5	1.0576	.7705	1.3725	498,18
635	645,157	462,894	7,4706	.14793+2	.12321+5	1.0587	.7717	1.3719	500,05
640	650,453	466,756	7,4789	.15228+2	.12063+5	1.0599	.7729	1.3714	501,92
645	655,756	470,623	7,4872	.15672+2	.11813+5	1.0611	.7741	1.3708	503,77
650	661,064	474,496	7,4954	.16126+2	.11569+5	1.0623	.7752	1.3702	505,61
655	666,378	478,375	7,5035	.16590+2	.11332+5	1.0635	.7764	1.3697	507,45
660	671,699	482,260	7,5116	.17065+2	.11101+5	1.0646	.7776	1.3691	509,28
665	677,025	486,151	7,5196	.17549+2	.10876+5	1.0658	.7788	1.3685	511,10

(Ver [ZH76])

**Ejercicio 2**

En una turbina multicelular de flujo axial, se expansiona aire desde la presión $P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a la presión final $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$, con una pérdida de presión en cada célula despreciable.

Sabiendo que la temperatura del aire en la entrada es $T_1 = 1.100 \text{ K}$, y suponiendo que el aire se comporta como un gas perfecto de relación de calores específicos $\gamma = 1,333$, calcula la temperatura de escape T_2 en los procesos siguientes:

1. Expansión adiabática reversible
2. Expansión adiabática irreversible de rendimiento politrópico $\eta = 0,85$
3. Expansión con una pérdida de calor en cada célula del 10 % de la caída de entalpía en la misma.
4. Expansión reversible con una pérdida de calor proporcional a la temperatura absoluta del aire.

Además, calcula los incrementos de entropía que se producen en los procesos (2) y (3), y representa cualitativamente en un diagrama T, s la evolución del estado del aire en los procesos (1), (2) y (3).

Resolución

1. En una expansión adiabática reversible, se cumple, e integrando entre los estado

$$S = \text{cte.} \rightarrow dS = 0 \rightarrow c_p dT = RT \frac{dP}{P} \text{ inicial y final resulta } T_1 / T_2 = (P_1 / P_2)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (1)$$

$$\text{Sustituyendo valores, se obtiene: } T_2 = 1.100 / (6)^{0,333/1,333} \rightarrow T_2 = 703,09 \text{ K}$$

2. En este caso, la ecuación (1) se transforma en $T_1 / T_2 = (P_1 / P_2)^{\eta \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)}$. Sustituyendo

$$\text{valores, se obtiene: } \frac{T_1}{T_2} = (6)^{0,85(0,333/1,333)}. \text{ O sea, } T_1 = 1.100 / (6)^{0,21234} \rightarrow$$

$$T_1 = 751,9 \text{ K}$$

3. La pérdida de calor se expresa:

$$dQ_r = 0,9 \cdot dh \rightarrow 0,9 \cdot c_p dT = RT \frac{dP}{P} \rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{R}{0,9 c_p} \frac{dP}{P} \text{ Integrando entre los estados,}$$

$$\text{resulta } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{0,9} \frac{\gamma-1}{\gamma}} \rightarrow T_2 = T_1 / (6)^{0,333/0,9 \cdot 1,333} \rightarrow T_2 = 668,96 \text{ K}$$



4. Por ser reversible la expansión, $dQ_r = T \cdot ds \rightarrow Tds = dh - \frac{dP}{P} \rightarrow$

$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$. Integrando, simplificando la expresión y ordenando términos, se obtiene:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\frac{P_1}{P_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left[\frac{P_1 / P_2}{e^{\frac{s_2 - s_1}{R}}} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

La evaluación de la temperatura exige conocer la variación de entropía en el proceso.

En el caso (2), la variación de entropía viene dada por $s_2 - s_1 = R(1 - \eta_p) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$ y,

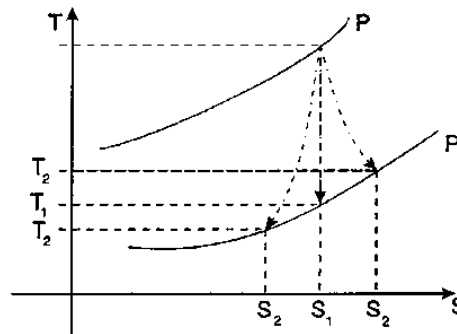
en términos de los datos, resulta $s_2 - s_1 = R \cdot 0,15 \cdot \ln(6) \rightarrow \frac{s_2 - s_1}{R} = 0,2688$.

En el caso (3), la variación de entropía viene dada por $ds = 0,1 \cdot c_p \cdot \frac{dT}{T} \rightarrow$

$s_2 - s_1 = 0,1 \cdot c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$ que, en términos de la relación de presión, se escribe:

$$s_2 - s_1 = -0,1 \cdot c_p \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{1}{0,9}} = -\frac{0,1}{0,9} R \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

de donde $\frac{s_2 - s_1}{R} = -0,199$



La figura anexa muestra la evolución del estado el aire en los procesos (1), (2) y (3):

(Ver [Vi93])



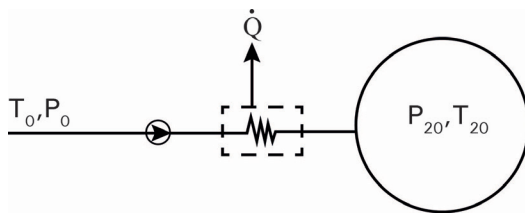
Ejercicio 3

En la figura, se representa el esquema de una instalación de compresión y almacenamiento de gas que comporta un conducto de aspiración de $0,1 \text{ m}^2$ de área de su sección recta, un compresor, un refrigerador externo, un conducto de impulsión y un depósito de almacenamiento.

El compresor impulsa un flujo másico de gas de 6 kg/s comprimiéndolo para que pase de las condiciones en el recinto de aspiración, $P_0 = 1,033 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (abs), $T_0 = 293 \text{ K}$, a las del depósito de almacenamiento, $P_{20} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (abs), $T_{20} = 400 \text{ K}$, habiéndose extraído en el refrigerador externo 150 Kcal/s .

El peso molecular del gas es 32 y se considera un gas perfecto de calores específicos constantes.

Si el rendimiento del compresor es del 65 %, ¿cuál es el valor de la potencia absorbida por el compresor?



Resolución

En principio, considerado el proceso de compresión y trasiego del gas diabático reversible, la potencia aplicada al sistema se expresa:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \dot{m}(\Delta h_0) - \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1)$$

donde \dot{m} es el flujo másico del gas, Δh_0 es el incremento de la entalpía de remanso del gas, y $\partial Q / \partial t$ es el flujo de calor cedido por el sistema, que se aplica con signo negativo.

El incremento de la entalpía de remanso del gas se escribe: $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}} \Delta T_0$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 6 \cdot \frac{1,4}{0,4} \frac{8,314}{32} (400 - 293) + \frac{150}{0,24 \cdot 10^{-3}}$$

donde $\frac{1}{0,24 \cdot 10^{-3}}$ es la inversa del equivalente térmico del trabajo (J / Kcal).



Resulta $\frac{\partial W}{\partial t} = 1.208,77 \cdot 10^3 \text{ W} = 1.208,77 \text{ kW}$, y la potencia absorbida por el compresor

$$\left. \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{abs} = \frac{\partial W}{\partial t} / 0,65 = 1.208,77 / 0,65 = 1.859,65 \text{ kW}.$$

Así pues, la potencia absorbida por el compresor es de 1.859,65 kW.

(Ver [Vi93])

→ 4



Flujo, tipos y ecuaciones fundamentales

4.1 Introducción

Por *flujo*, se entiende el movimiento de la materia en estado fluido. Como movimiento, puede ser estacionario, no estacionario, uniforme, no uniforme, rotacional, irrotacional, ordenado o laminar, caótico o turbulento, libre o confinado, entre otras modalidades de menor significación.

Como fluido, se puede tratar de un líquido, un gas o un vapor, incluyendo desde metales fundidos y vapores metálicos hasta gases y vapores a muy baja densidad. Además, según su módulo elástico y su módulo de rigidez, los flujos pueden ser incompresibles y compresibles, viscosos y de viscosidad despreciable a efectos prácticos, newtonianos y no newtonianos, sin olvidar que pueden tener una característica u otra según sea cuál su estado termodinámico, definido por sus variables T y P .

Como quiera que en este libro se trata esencialmente de la dinámica de gases de carácter newtoniano en régimen de flujo estacionario y no estacionario, confinado y libre, cabe considerar, según si el gas es ideal, perfecto o real, y en función de su estado termodinámico, los siguientes tipos genéricos de flujo:

- Flujo adiabático de un gas perfecto newtoniano sin efectos de compresibilidad
- Flujo de gases ideales en procesos isoentrópicos y homentrópicos
- Flujos de Fanno y de Rayleigh
- Flujo de gases con adición simultánea de calor, de masa y de cantidad de movimiento

A partir de las ecuaciones generales de estos flujos, se irán exponiendo otros que constituyen un complemento de apoyo para analizar el flujo en sistemas y dispositivos de interés para la ingeniería (transporte de gas por tuberías y sus accesorios, toberas de empuje, eyectores, chimeneas, etc.), como pueden ser los flujos libres (chorros y penachos), los flujos en contacto con una pared (capa límite) y los flujos confinados, prestando atención, cuando proceda, a los efectos de la compresibilidad (flujo transónico, sónico, supersónico e hipersónico), a la existencia de perturbaciones de presión (ondas de expansión, ondas de choque, etc.), a la influencia de la adición de calor, de masa y de cantidad de movimiento (mezclas reactivas, límites de explosión, etc.).



La deducción de las ecuaciones fundamentales del movimiento de los gases, ya sean considerados ideales, perfectos o reales, implica admitir que en ellos se cumple la hipótesis del continuo. La hipótesis del continuo, más conocida como *postulado del continuo*, establece que la estructura molecular de cualquier sustancia es tan pequeña, con respecto a las dimensiones características del dominio en que ocurren los fenómenos físicos y químicos, que se la puede ignorar. Bajo esta hipótesis, se describe el estado de una sustancia en términos de sus propiedades, que son los valores medios de las magnitudes susceptibles de medición de muchas moléculas como, por ejemplo, la densidad. Estas propiedades, asentadas en una distribución continua de materia, son descritas por funciones continuas de posición y de tiempo.

A continuación, se explica con más detalle el postulado del continuo.

4.1.1 El postulado del continuo

Para que un gas satisfaga el postulado del continuo, el recorrido libre medio molecular ha de ser pequeño, comparado con una dimensión lineal característica L significativa y pertinente para el campo de flujo. La relación entre ambas magnitudes (λ / L) se denomina *número de Knudsen*.

$$Kn = \lambda / L \quad (4.1)$$

El recorrido libre molecular λ es la distancia lineal que recorre, por término medio, una molécula antes de colisionar con otra. Este recorrido es habitualmente muy corto; así, el intervalo de tiempo transcurrido entre las colisiones también es muy corto. El valor de λ depende, además de las variables de estado P, T del gas, del tamaño de las moléculas. Para colisiones elásticas de moléculas que tienen una distribución de velocidad del modelo Maxwell, el valor de λ viene dado por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\pi \cdot N \cdot d^2)} \quad (4.2)$$

En la ecuación 4.2, N es el número de moléculas por metro cúbico y d es el diámetro efectivo molecular, en metros.

Si m denota la masa de una molécula y ρ la densidad del continuo gaseoso, entonces:

$$\lambda = \frac{m}{\sqrt{2} \cdot (\rho \cdot \pi \cdot d^2)} \quad (4.3)$$

La tabla 4.1 presenta valores típicos aproximados de los diámetros moleculares y de λ a $T = 298,15 \text{ K}$ y $P = 1 \text{ atm}$.

Tabla 4.1.
Valores típicos
aproximados de
diámetros mole-
culares y λ ($T =$
 $298,15 \text{ K}$ y $P = 1$
 atm)

	Gas					
	A	He	N ₂	O ₂	CO ₂	NH ₃
D, m · 10⁻¹⁰	2,90	2,00	3,50	2,95	3,30	3,00
λ, m · 10⁻⁸	10,90	22,90	7,46	10,50	8,39	10,20



El número de Knudsen está relacionado con el número de Reynolds, $Re = L \cdot v \cdot \rho / \mu$, y con el número de Mach, $M = v / a$ (a es la velocidad del sonido en el gas), de la forma:

$$K_n = 1,26 \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \left(\frac{M}{Re} \right) \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (4.4)$$

Para valores de $Re \gg 1$, una longitud característica significativa es el espesor de la capa límite δ . Se sabe que:

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{Re}} \quad (4.5)$$

siempre que se cumpla $M \leq 7$ y $Re \gg 1$.

Por consiguiente, para valores grandes de Re , resulta:

$$K_n \cong \frac{M}{\sqrt{Re}} \quad (4.6)$$

El postulado del continuo es aplicable a aquellos flujos para los cuales el número apropiado de Knudsen es inferior a 0,01, aproximadamente.

Resumiendo, un flujo de gas puede suponerse como continuo si:

$$K_n \cong M/Re < 0,01 \quad y \quad Re \cong 1 \quad (4.7)$$

$$K_n \cong M/\sqrt{Re} < 0,01 \quad y \quad Re \gg 1 \quad (4.8)$$

La tabla 4.2 presenta una clasificación de los regímenes de flujo de un gas sobre la base del valor del número de Knudsen.

$K_n = \lambda/L$	Régimen de flujo
$K_n < 0,01$	Continuo
$0,01 < K_n < 0,1$	Flujo de deslizamiento
$0,1 < K_n < 3,0$	Régimen de transición
$3,0 < K_n$	Flujo libre molecular

Tabla 4.2. Clasificación de los regímenes de flujo de un gas en base al valor de Kn

(Ver [ZH76])

4.2 Las ecuaciones fundamentales del movimiento de los gases

Como en cualquier problema de dinámica de fluidos, el análisis de un problema de dinámica de gases se basa en las relaciones entre las cuatro leyes físicas fundamentales:

- Ley de conservación de la masa
- Ley de conservación de la cantidad de movimiento
- Primera ley de la termodinámica
- Segunda ley de la termodinámica



Estas leyes son independientes tanto de las propiedades del fluido en movimiento como del proceso particular del flujo considerado.

Al aplicar las leyes anteriores a un fluido en movimiento, se han de considerar las propiedades del mismo, su estado termodinámico, las condiciones de valor inicial y de contorno, y suponer que el fluido es un medio continuo.

4.2.1 Breve relato de la evolución histórica de las ecuaciones que gobiernan el flujo y sus características fundamentales

Las ecuaciones que gobiernan el flujo sin efectos de viscosidad de un fluido homogéneo fueron deducidas por primera vez por Euler¹, que consideró que todas las propiedades del fluido eran funciones continuas de posición y de tiempo, representadas por relaciones funcionales de la forma:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \quad (4.9)$$

Euler supone que el fluido es continuo y aplica las leyes de conservación de la masa, de conservación de la cantidad de movimiento (ley de Newton) y de conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).

El hecho de despreciar la viscosidad no significa que las ecuaciones deducidas por Euler carezcan de utilidad, ya que en muchos problemas de dinámica de gases el efecto de la viscosidad es pequeño. Sin embargo, hay ciertos casos en que el efecto de la viscosidad es importante y, por tanto, no puede despreciarse. Fue Navier² el primero que modificó las ecuaciones de Euler para incluir los efectos de la viscosidad para los flujos de fluidos incompresibles, a cuyo fin propuso un modelo molecular. En 1845, Stokes³ volvió a deducir las ecuaciones de Navier utilizando una hipótesis macroscópica, más que molecular, acerca de la viscosidad. Además del denominado *coeficiente de viscosidad* μ , tal como fue definido por Newton⁴ (coeficiente de proporcionalidad en la relación tensión tangencial-gradiente de velocidad en un fluido en movimiento), considera un segundo coeficiente de viscosidad denotado por λ .

Basándose en la teoría cinética de gases, Stokes supone que, entre ambos coeficientes de viscosidad, se cumple la relación $\lambda = -(2/3) \mu$, conocida habitualmente como *hipótesis de Stokes*.

Se puede demostrar que esta hipótesis es correcta para un gas monoatómico ideal, pero en la práctica se ha observado que no restringe la aplicabilidad de las ecuaciones a los gases monoatómicos únicamente.

El resultado final de todas estas aportaciones se conoce como *ecuaciones de Navier-Stokes*, cuya expresión vectorial general es:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p - \frac{2}{3} \nabla \left[\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \left[\nabla \cdot (2\mu \nabla) \right] \vec{V} + \nabla \times \left[\mu \nabla \times \vec{V} \right] + \rho \vec{f} \quad (4.10)$$

En la ecuación 4.10, \vec{f} representa las fuerzas de campo por unidad de masa y p , la presión definida por Stokes como la tensión normal media que actúa sobre un elemento fluido:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4.11)$$



Es habitual aceptar que las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas tanto para el flujo laminar como para el flujo turbulento; sin embargo, en la práctica, no ha sido posible obtener soluciones exactas de $\vec{V}(x, y, z, t)$ en flujo turbulento.

La turbulencia no es una característica del fluido, sino del movimiento del fluido. Cada flujo turbulento es diferente. La turbulencia consiste en fluctuaciones aleatorias de velocidad, por lo cual no es factible una descripción espaciotemporal del flujo en todos los puntos. En su lugar, se han desarrollado ecuaciones que determinan los valores medios temporales de las magnitudes, como la velocidad media. A tal fin, se aplica la *descomposición de Reynolds* de la forma siguiente:

$$u = \bar{u} + u', \quad p = \bar{p} + p' \text{ etc}$$

donde la tilde (') indica la variación de la magnitud debida a fluctuación turbulenta, mientras que las magnitudes señaladas con la tilde ($\bar{}$) representan los valores medios temporales.

La transformación de las ecuaciones de Navier-Stokes al incorporar en ellas la descomposición de Reynolds da como resultado unas ecuaciones escritas para los valores medios de las magnitudes que intervienen, comprendidas las tensiones de Reynolds del tipo $[-(\rho u'_j u'_i)]$.

A título ilustrativo, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para un flujo turbulento bidimensional en una capa límite se escribe así:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} - \frac{\partial (\rho \bar{u}')}{\partial t} - \frac{\partial [(\rho u)' u']}{\partial x} - \frac{\partial [(\rho v)' u']}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por su parte, la ecuación de conservación de la energía propuesta por Van Driest⁵ se escribe:

$$\begin{aligned} \rho \bar{u} \frac{\partial (\bar{c}_p \bar{T})}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial (\bar{c}_p \bar{T})}{\partial y} = \\ = \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial \{ \overline{c_p (\rho v)' T'} \}}{\partial y} - (\rho v)' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.13)$$

En régimen laminar y $\dot{q} = 0$, se escribe:

$$\rho \frac{D(\bar{c}_p \bar{T})}{Dt} = \frac{D\bar{p}}{Dt} + \mu \varphi \quad (4.14)$$

Obsérvese que, entre ambos regímenes, se encuentran diferencias significativas. Evidentemente, además del gradiente de la tensión de presión \bar{p}_x y la tensión viscosa $\bar{\mu u}_y$,



hay la tensión turbulenta de Reynolds) $\left[\overline{(\rho v)' u'} \right]_y$, mucho mayor que la tensión viscosa, excepto cerca de la pared.

Por analogía con la viscosidad del fluido μ aplicada al régimen laminar, cabe definir una viscosidad turbulenta ε de la forma:

$$\overline{(\rho v)' u'} = \varepsilon \overline{u'_y} \quad (4.15)$$

La ecuación 4.15 se denomina *aproximación de Boussinesq*,⁶ y el coeficiente ε recibe el nombre de *viscosidad de remolino*.

Por otra parte, un examen de la ecuación de la energía muestra que se puede hacer otra analogía similar. En efecto, el término $-\left\{ \overline{c_p (\rho v)' T'} \right\}_y$ es la contribución que la turbulencia hace a la transferencia de calor, por lo cual puede definirse una conductividad térmica de remolino K_t tal que:

$$\overline{c_p (\rho v)' T'} = k_t \overline{T'_y} \quad (4.16)$$

A su vez, el término $-\overline{(\rho v)' u' u'_y}$ representa la energía cinética que es transformada en calor por la turbulencia. Por tanto, es análoga a la función de disipación viscosa ϕ definida por Rayleigh, denominada en ocasiones *función aparente de disipación*.

Llegados a este punto, cabe preguntarse: ¿Bajo qué condiciones las ecuaciones generales del movimiento de un fluido viscoso pueden ser sustituidas por las de Euler, de más fácil aplicación?

Un primer análisis de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido muestra, si este es laminar, que un mecanismo fundamental que se produce en él es el transporte de una cantidad de movimiento entre las capas contiguas del fluido, caracterizado por la componente del gradiente de velocidad en dirección ortogonal al movimiento y por un coeficiente de transporte a escala molecular que es la viscosidad del fluido.

Si el movimiento es turbulento, a este transporte de cantidad de movimiento a escala molecular se le añade el debido a las componentes de fluctuación de la velocidad, que puede ser dominante lejos de los contornos y, evidentemente, en los flujos libres.

Por otra parte, al analizar la ecuación de la energía, observamos que la disipación de energía está también asociada a las mismas magnitudes (función de disipación de Rayleigh), además de la que es atribuible a posibles procesos térmicos irreversibles en flujos reactivos.

Así pues, en aquellas regiones del movimiento de un fluido en que la componente del gradiente de velocidad es significativa, el estudio del movimiento requerirá mantener en sus ecuaciones los términos viscosos. Tales regiones pueden denominarse *capas de cortadura delgadas*, que comprenden no solo las capas límite, sino también los chorros y



las estelas. También todos los fenómenos de separación de la corriente están caracterizados por importantes disipaciones de energía, de modo que su estudio no solo requiere utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes completas, sino también disponer de información física adicional en forma de leyes empíricas que aseguren el cierre de las ecuaciones.

Evidentemente, todos los procesos con disipación de energía son irreversibles, lo cual se traduce en un incremento de la entropía del sistema en que ocurren. Ahora bien, a este incremento de entropía contribuyen también otros procesos distintos de los de transporte de una cantidad de movimiento, como son los de transporte de calor como resultado de la existencia de un gradiente de temperatura finito.

Para valorar los efectos de la viscosidad del fluido en sus procesos dinámicos y energéticos (fenómenos de transporte de cantidad de movimiento y de calor), se dispone de dos criterios de semejanza: el de Reynolds y el de Prandtl. Como es bien sabido, el primero se define como $Re = \rho V L / \mu$ y el segundo, como $Pr = c_p \mu / \lambda$.

La experiencia enseña que, en el movimiento de fluidos reales cuyo número de Reynolds es suficientemente alto, y en presencia de contornos, los términos de disipación viscosa y de conducción de calor pueden despreciarse a partir de una distancia a aquellos cuyo orden de magnitud esté definida por las relaciones:

- Movimientos por el interior de conductos

$$\frac{D}{L} \left(\frac{\rho V}{\mu} \right) \gg 1, \quad \frac{1}{Re} \left(\frac{V^2}{c_p T_m} \right) \ll 1, \quad \frac{1}{Re Pr} \gamma \frac{\Delta_e T}{T_m} \ll 1 \quad (4.17)$$

- Movimientos externos alrededor de cuerpos

$$\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \cdot Re \gg 1; \quad \frac{1}{Re \cdot \left(\frac{\delta}{L} \right)^2} \cdot \frac{V^2}{c_v \cdot T_m} \ll 1; \quad \frac{1}{Re \left(\frac{\delta}{L} \right) Pr} \gamma \cdot \frac{\Delta_e T}{T_m} \ll 1 \quad (4.18)$$

Una vez expuestos los argumentos y establecidos los criterios por los cuales las ecuaciones de Navier-Stokes pueden simplificarse sin que ello repercuta en su validez para el análisis de algunos tipos de flujo, a continuación se estudia el flujo de gases reales y después se para exponerá cómo se simplifican en las ecuaciones de Euler-Bernoulli.

4.3 El flujo estacionario unidimensional con rozamiento de gases perfectos en conductos de área transversal constante y los efectos de compresibilidad despreciables

El conjunto de ecuaciones que definen el movimiento de un gas perfecto es el siguiente:

- Ecuación de continuidad
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.19)$$



$$- \text{Ecuación de la cantidad de movimiento} \quad \rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.20)$$

$$- \text{Ecuación de la energía} \quad \rho \cdot T \cdot \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \vec{q} + \dot{q}_r + \dot{q}_q + \varphi_v \quad (4.21)$$

$$- \text{Ecuación de estado} \quad \rho = \rho(P, T) \quad (4.22)$$

En el caso que aquí interesa, las ecuaciones anteriores pueden simplificarse en gran medida. En efecto, las tasas de calor que el fluido recibe o cede, por unidad de volumen, debido a conducción, radiación y/o reacción química son nulas ($-\nabla \vec{q}, \dot{q}_r, \dot{q}_q = 0$), el flujo es estacionario $\partial \vec{V} / \partial t = 0$, la compresibilidad es despreciable $\rho = \text{cte.}$ y $\left(\vec{V} \nabla \right) \vec{V} = 0$, pues el área de la sección recta del conducto es constante. Por tanto, resulta:

$$- \text{Ecuación de continuidad} \quad \nabla \vec{V} = 0 \quad (4.23)$$

$$- \text{Ecuación de la energía} \quad \rho T \frac{Ds}{Dt} = \varphi_v \quad (4.24)$$

$$- \text{Ecuación de la cantidad de movimiento} \quad 0 = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4.25)$$

$$- \text{Ecuación de estado} \quad \rho = \rho(P, T) \quad (4.26)$$

Suponiendo un flujo unidimensional, eso es, que todas las propiedades del fluido sean uniformes en la sección transversal del conducto, la velocidad tendrá la dirección del eje del conducto y su módulo será el resultado de dividir el caudal que fluye por la tubería por el área de su sección recta.

Si bien las fuerzas másicas debidas al campo gravitatorio ($\vec{f} = -\nabla[gz]$) son, en general, despreciables, es posible que se deban tener en cuenta. Entonces, el problema de flujo se limita habitualmente al cálculo de la pérdida de *presión reducida* que el fluido en movimiento experimenta por rozamiento fluidodinámico en un tramo de conducto de longitud L cuando por él se transporta un caudal \vec{V} .

A tal fin, escrita la ecuación 4.25 para la componente del flujo en la dirección del eje del conducto, se obtiene:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho g z) + \mu (\nabla^2 \vec{V})_x \quad (4.27)$$

Introduciendo en la ecuación 4.27 la presión reducida $P_r = p + \rho g z$ y el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach λ , resulta:

$$0 = -\frac{\partial P_r}{\partial x} + g z \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2} \quad (4.28)$$



Como quiera que los efectos de la compresibilidad se han supuesto despreciables, podemos prescindir del término $gz \frac{\partial \rho}{\partial x}$.

Ahora, integrando la ecuación 4.28 entre $x = L$ y 0, se obtiene:

$$\Delta [P_r]_0^L = \rho \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad (4.29)$$

En términos del caudal, $\dot{V} = V \cdot \pi \frac{D^2}{4}$, la ecuación 4.29 se escribe:

$$\Delta [p + \rho gz]_0^L = \rho \lambda \frac{L}{D^5} 8 \frac{\dot{V}^2}{\pi^2} \quad (4.30)$$

El coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa equivalente de arena (ε/D) de la superficie interna del conducto. De hecho, la influencia de la rugosidad depende de la relación de su valor con respecto al valor del espesor de la subcapa límite laminar de la corriente. Según Von Karman,⁷ dicho espesor se define como:

$$\delta = \frac{32,5D}{Re\sqrt{\lambda}} \quad (4.31)$$

Si $\delta \geq 3\varepsilon$, la rugosidad del conducto no influye.

Si $\delta < 3\varepsilon$, el efecto de la rugosidad se manifiesta progresivamente.

Si $\varepsilon \approx (7 \text{ a } 8) \delta$, el efecto de la rugosidad es predominante.

El conducto cuya rugosidad relativa equivalente de arena satisface la primera relación se denomina “hidráulicamente liso” y el que satisface la tercera relación, “hidráulicamente rugoso”.

En la práctica, los conductos reales pueden dar lugar a un régimen entre liso y rugoso, lo cual en muchos casos obliga a determinar experimentalmente la pérdida unitaria de presión $\Delta P/L$ en función del caudal \dot{V} y del diámetro hidráulico D_h del conducto.

Para el cálculo del coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach λ , se utiliza, según sea el régimen de flujo, una de las ecuaciones siguientes:

$$\text{– Régimen laminar, } Re \leq 2300 \rightarrow \lambda = \frac{64}{Re} \quad (4.32)$$

$$\text{– Régimen turbulento: conducto liso } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log \frac{Re\sqrt{\lambda}}{2,51} \quad (4.33)$$

$$\text{O las fórmulas aproximadas (Blasius): } 3.000 < Re < 10^5 \rightarrow \lambda = 0,316 Re^{-1/4} \quad (4.34)$$



$$10^5 < Re < 10^6 \rightarrow \lambda = 0,18 Re^{-1/5} \quad (4.35)$$

$$\lambda = 0,0056 + 0,5 Re^{-0,32} \quad (4.36)$$

– Conducto rugoso $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{D}{\varepsilon} \right) + 1,14 \quad (4.37)$

O bien una de las fórmulas aproximadas siguientes:

$$20 < \frac{D}{\varepsilon} < 2000 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0,18 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0,33} \\ \lambda = 0,16 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0,31} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

– Régimen de transición

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right\} \quad (4.40)$$

Ecuación de Colebrook-White:

Otras fórmulas empíricas son:

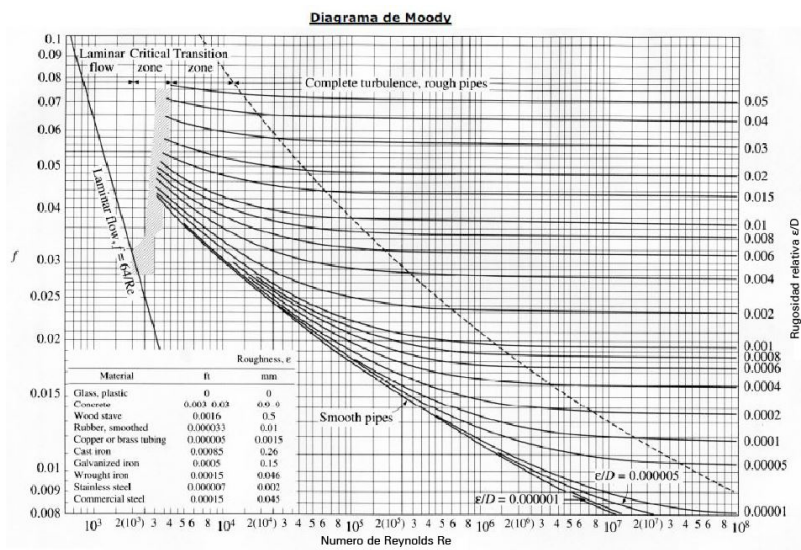
Para $Re < 470.000$, la fórmula de Leeds $\lambda = 0,00714 + 0,6104 \cdot Re^{-0,35} \quad (4.41)$

Para $105 < Re < 2.106$, la fórmula de Hermann $\lambda = 0,0054 + 0,395 \cdot Re^{-0,30} \quad (4.42)$

Para $106 < Re < 108$, la fórmula de Nikuradse $\lambda = 0,0032 + 0,221 \cdot Re^{-0,237} \quad (4.43)$

Los valores de λ también pueden obtenerse aproximadamente mediante el diagrama de Moody.

Fig. 4.1.
Diagrama de
Moody.





4.3.1 Las pérdidas singulares de carga

Las pérdidas de carga singulares se producen en las discontinuidades producidas por los accesorios que están montados en sistemas de tubería: cambios de sección, codos, curvas, válvulas, entronques, etc.

La pérdida se calcula mediante la expresión:

$$\Delta P_s = \zeta \rho \frac{V^2}{2}$$

donde ζ es el coeficiente de pérdida de carga singular sin efectos de compresibilidad y V es, en general, la velocidad de entrada en el accesorio. En el caso de que no puedan despreciarse los efectos de compresibilidad, dicho coeficiente deberá corregirse como se indica más adelante. En la práctica, cabe sustituir el accesorio por una longitud de tubo equivalente.

El coeficiente de pérdida de carga singular comprende los efectos de fricción y los dinámicos. Las pérdidas dinámicas son el resultado de las perturbaciones causadas en el flujo por los accesorios que se manifiestan por cambios de módulo y dirección de la velocidad del fluido a lo largo de una longitud particular de conducto, por lo cual no pueden separarse de las pérdidas por fricción. Los valores de los coeficientes ζ se encuentran en las tablas, en los diagramas incluidos en los catálogos de accesorios o en los manuales técnicos.^{8, 9 y 10} Hay que tener en cuenta que, en el caso de los accesorios instalados a corta distancia (inferior a seis diámetros hidráulicos), el modelo de flujo que llega a los accesorios sucesivos difiere del modelo utilizado para determinar los coeficientes de pérdida.

A título de ejemplo, se expone información básica sobre la pérdida de carga en los accesorios que se encuentran más frecuentemente en las instalaciones de las tuberías: codos, difusores, entroncamientos y válvulas.

Pérdida de carga en los codos

En la mayoría de los casos, para el cálculo en ingeniería, el coeficiente de resistencia total de codos viene determinado como la suma del coeficiente de resistencia local ζ_{loc} y el coeficiente de fricción ζ_{fr} , o sea: $\zeta = \zeta_{loc} + \zeta_{fr}$, donde $\zeta_{fr} = \lambda (l / d_h)$, con λ tomado del diagrama de Moody como función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, y $\frac{l}{d_h} = \pi \frac{\delta}{180^\circ} \frac{r_0}{d_h} = 0,0175 \frac{r_0}{d_h} \delta$ (δ en grados).

El coeficiente de resistencia local se calcula a partir de la fórmula sugerida por Abramovich $\zeta_{loc} = A_1 B_1 C_1$. La definición y el valor de los coeficientes, que son función de los parámetros que definen la forma del codo, se encuentran en la publicación [Id86].

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran el coeficiente de pérdida en codos de 90° en función del número de Reynolds y del ángulo de desviación del eje del codo con respecto a la dirección del conducto previo θ_b y la relación r / d , respectivamente.



Fig. 4.2
Coeficiente de
pérdida de carga
de codos en fun-
ción de Re y $r/d^{(9)}$

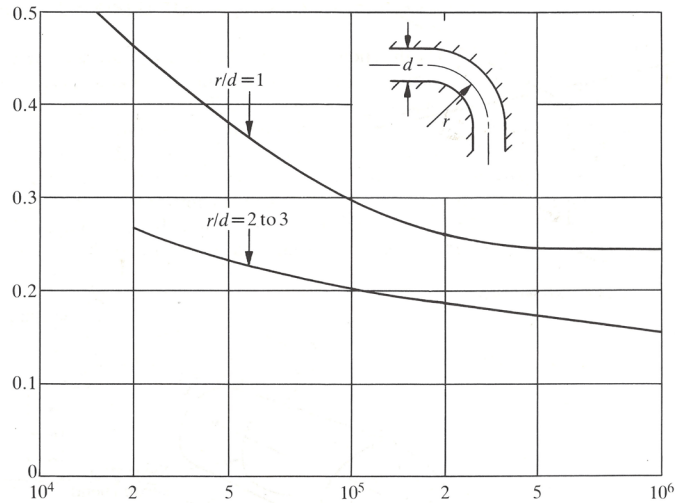
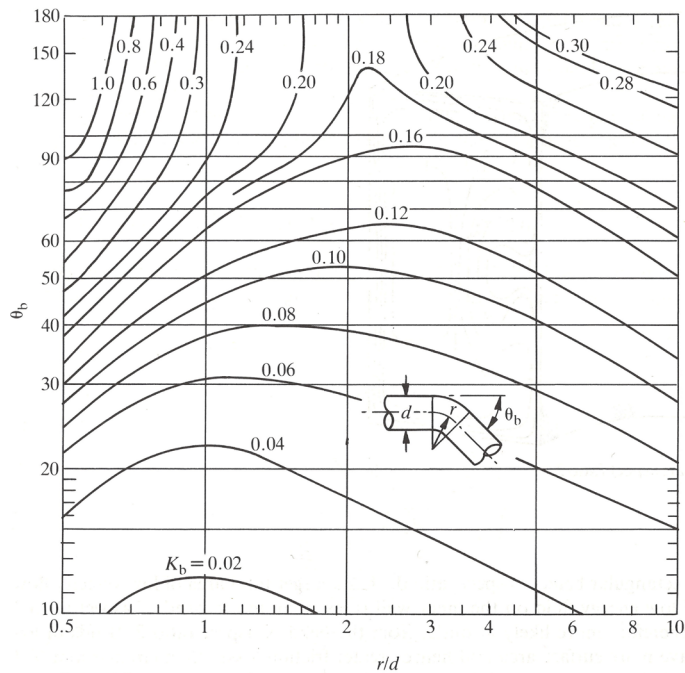


Fig. 4.3.
Coeficiente de
pérdida de carga
en función del án-
gulo de desvia-
ción del codo y de
 $r/d^{(9)}$



Pérdida de carga en los difusores

Cuando un difusor descarga en un gran recinto, denominado *difusor de descarga libre*, el coeficiente de pérdida tiene en cuenta toda la pérdida de energía del flujo. Para caracterizar el difusor, se utiliza el denominado *coeficiente de recuperación* C_p , definido como $C_p = 1 - \zeta_d$.

Si el difusor tiene un tubo recto a partir de su salida, entonces el coeficiente de recuperación se define como $C_p = 1 - (A_1 / A_2)^2 - \zeta_d$.

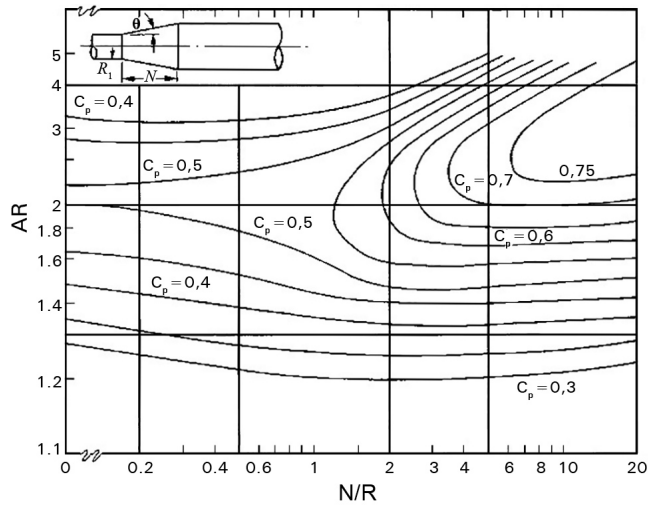


Fig. 4.4.
Coeficiente de recuperación de difusores⁹

En la figura 4.4, se muestran curvas de valores de C_p en el plano A_2 / A_1 , N / R_1 .

Como se ha dicho, en las publicaciones [Id86] y [Mi90] se halla información detallada sobre las pérdidas en estos accesorios.

Pérdida de carga en los entronques

La figura 4.5 muestra el coeficiente de pérdida de carga en los entronques de canto vivo a 45° y 90° , en función de la relación de caudales que se indican. Son muchas las variantes de entronque no solo por su geometría, sino también por la dirección de los flujos en él. Los comentarios anteriores son también aplicables en este caso.

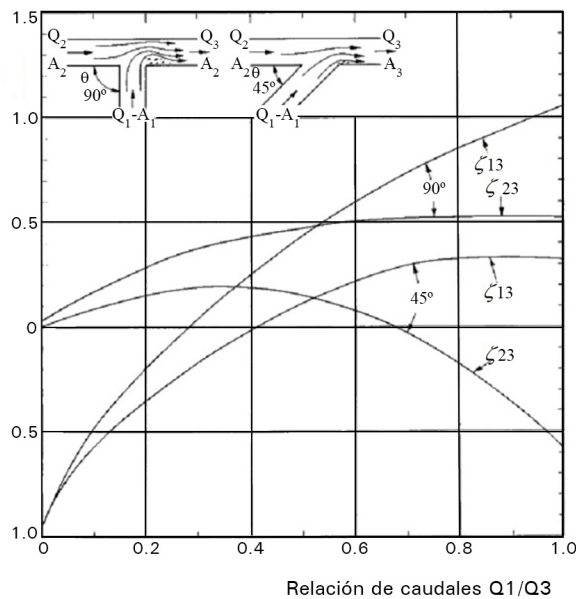
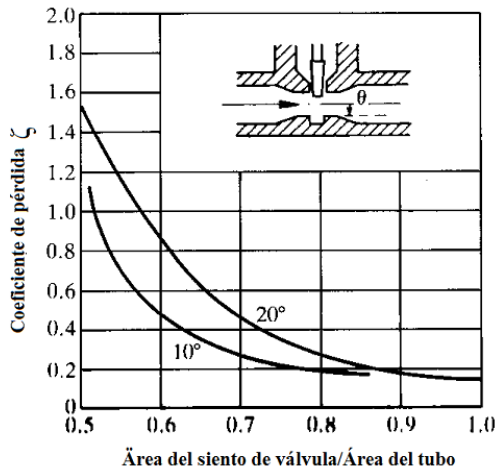
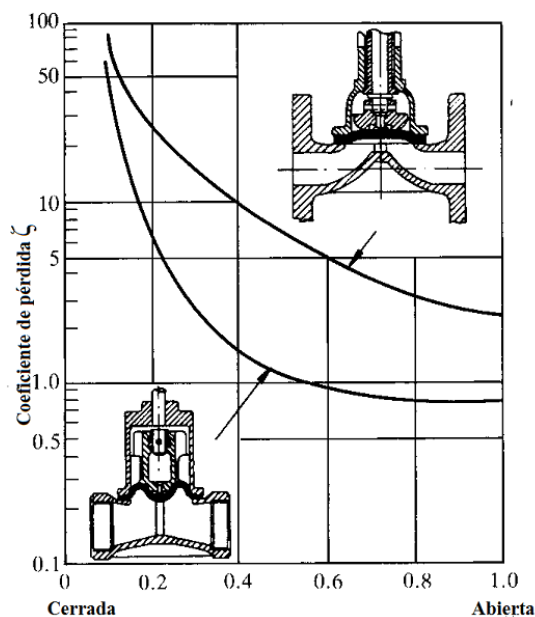


Fig. 4.5.
Coeficiente de pérdida de carga en los entronques⁹



Fig. 4.6.
Coeficiente de
pérdida de carga
en a) una válvula
de diafragma b)
una válvula de
compuerta⁹.



Coeficiente de pérdida de carga en las válvulas

Dada la gran variedad de válvulas y grados de abertura, se aconseja utilizar los datos suministrados por los fabricantes, siempre que sean fiables. En su defecto, pueden utilizarse los coeficientes de pérdidas que se indican en publicaciones especializadas, como [Id86] y [Mi90]. Las figuras 4.6.a y 4.6.b están tomadas de [Mi90].



4.4 Los movimientos isoentrópicos y homoentrópicos. La ecuación de Euler- Bernoulli para gases

En un apartado anterior, se ha dicho que, cuando el número de Reynolds es suficientemente grande, se pueden suprimir los términos de disipación viscosa y de conducción de calor de la ecuación de la energía.

En dichas condiciones, y en el supuesto de que existan transferencias de calor por radiación \dot{q}_r y por reacción química \dot{q}_q , las ecuaciones generales se simplifican en las siguientes:

$$- \text{Ecuación de continuidad} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (4.44)$$

$$- \text{Ecuación de cantidad de movimiento} \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \cdot \vec{f} \quad (4.45)$$

$$- \text{Ecuación de la energía} \quad \rho T \cdot \frac{Ds}{Dt} = \dot{q}_r + \dot{q}_q \quad (4.46)$$

Cuando el efecto de adición de calor por radiación o por reacción química es despreciable porque el incremento de entropía que produce es pequeño, las ecuaciones anteriores se pueden simplificar todavía más.

$$\text{En efecto, se sabe que} \quad \frac{\Delta_p s}{c_v} \propto \frac{\dot{q}_r t_c}{\rho c_v T_m} \quad (4.47)$$

Entonces, si el segundo miembro es muy pequeño:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \text{ y } s = s_p \quad (4.48)$$

Donde s_p es la entropía que tenía el elemento fluido en el instante inicial.

Los movimientos que cumplen la condición 4.48 reciben el nombre de *isoentrópicos*.

Cuando, además, todas las partículas tienen la misma entropía s_0 en el instante inicial, o sea, $s_p = s_0$, entonces se verifica:

$$\nabla s = 0 \quad (4.49)$$

La condición 4.49 define, matemáticamente, los movimientos homoentrópicos.

En los movimientos homoentrópicos, todas las partículas fluidas tienen, en cada instante, la misma entropía, que puede ser función del tiempo. Un movimiento es homoentrópico si es isotrópico y, además, tiene la misma entropía inicial para todas las partículas.

En movimientos cuasiestacionarios, para los cuales $t_0 \gg t_r = t_c$, la ecuación 4.46 se reduce a:



$$(\vec{V} \cdot \nabla) s = 0 \equiv \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.50)$$

donde $\partial s / \partial t$ es la variación temporal local de la entropía en la dirección de la línea de corriente. Resulta, pues, que $s = s_1(t)$, donde s_1 puede variar en el curso del tiempo y de una línea de corriente a otra.

Si, corriente arriba, todas las líneas de corriente provienen de una región donde la entropía es uniforme, $s_1 = s_0(t)$ el movimiento resulta homoentrópico.

El hecho de que en un fluido se satisfaga la ecuación $s = s_0(t)$ permite calcular dP / ρ y explicitar la ecuación que se aplica a un fluido compresible.

En efecto, cuando $s = s_0(t)$, se verifica:

$$\rho = \rho(P, s) = \rho(P, s_0) \quad (4.51)$$

Ahora bien, en procesos isoentrópicos, se cumple:

$$P \cdot \rho^{-\gamma} = C^{te} \quad (4.52)$$

Por tanto,
$$\int \frac{dP}{\rho} = C_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \cdot \rho^{\gamma-1} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \cdot RT = c_p \cdot T = h + C^{te} \quad (4.53)$$

Por otra parte, se sabe que, en el gas, se cumple la ecuación $T \cdot ds = dh - \frac{dP}{\rho}$,

que, para $s = \text{cte.}$, da:
$$dh = \frac{dP}{\rho} \quad (4.54)$$

En definitiva, $\frac{\partial h}{\partial l} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial l}$ y, por consiguiente, la ecuación del movimiento a lo largo de una línea de corriente se puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} + h + gz \right) = 0 \quad (4.55)$$

La ecuación 4.55 es conocida como *ecuación de Euler-Bernoulli* para gases a entropía constante.

(Ver [LR57])

4.5 La capa límite: parámetros y ecuaciones básicas

En todos aquellos problemas de dinámica de gases en que el flujo está limitado por una pared con la cual el gas está en contacto, su análisis se lleva a cabo dividiendo la corriente en dos regiones: una capa de pequeño espesor que está en contacto con la pared, denominada *capa límite*, en que el movimiento del gas está dominado por efectos de viscosidad, y un *núcleo* en que el gas se mueve como si no fuera viscoso. A este núcleo, se le

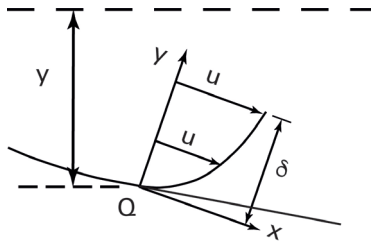


aplican las ecuaciones del movimiento isoentrópico en un dominio que difiere del real en el espesor de dicha capa límite, mientras que en dicho espesor rigen las ecuaciones de flujo viscoso cuya solución, fuera de la pared, debe coincidir con la del flujo en sus entrecaras con el núcleo (v. anexo II).

Así, resulta que en muchos problemas de dinámica de gases es necesario conocer y prever los efectos de la capa límite en las características de los flujos de masa, de cantidad de movimiento, de calor, etc., lo cual requiere estudiar, aunque con un alcance forzosa-mente limitado, los métodos de cálculo de la capa límite que no se desprende.

Al tratarse de las condiciones más habituales, procede estudiar la capa límite turbulenta y, en particular, la de flujos axisimétricos.

Fig. 4.7.



Sea un conducto axisimétrico de eje X y un punto Q cualquiera de su contorno. Sean x y y dos ejes locales asociados al contorno del conducto, e Y la distancia de Q al eje.

El conducto, en general, se caracteriza por la condición $k\delta \ll 1$, donde k es la curvatura de la pared en Q y δ es el espesor de la capa límite en dicho punto.

De la condición anterior, se deriva, según Prandtl, $\partial p / \partial y \ll 1$ para $y \ll \delta$. Así, las ecuaciones de la capa límite se escriben:

$$\text{Continuidad} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v Y) = 0 \quad (4.56)$$

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 Y) + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v Y) = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4.57)$$

$$\text{Energía} \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u h_0 Y) + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v h_0 Y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \tau - \dot{q} \right) \quad (4.58)$$

donde u y v son las componentes de la velocidad media local; ρ es la densidad media local; h_0 es la entalpía de remanso media local ($h_0 = h + u^2/2$); τ es la tensión de rozamiento turbulento; \dot{q} es el flujo específico de calor medio, y ρ_e, u_e son los valores de densidad y velocidad del fluido en $y = \delta$.

Habida cuenta del conocimiento insuficiente de τ y \dot{q} en flujo turbulento, la integración de las ecuaciones 4.56 a 4.58 se lleva a cabo, en muchos casos, por métodos aproximados. Estos métodos, inspirados en Prandtl y Von Karman, consisten en integrar las ecuaciones generales sobre el espesor δ y deducir las condiciones que han de satisfacer



ciertos parámetros globales que se introducen en el curso de la integración. Estos parámetros son: *espesor de desplazamiento*, δ^* ; *espesor de cantidad de movimiento*, δ^{**} , y *espesor de energía*, Δ .

Sus definiciones son:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (4.59)$$

$$\delta^{**} = \int \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (4.60)$$

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{h_0}{h_{0e}} - 1\right) dy \quad (4.61)$$

Ahora conviene ver el significado de cada uno de estos parámetros. Para ello, y en relación con el espesor de desplazamiento, se integra la ecuación de continuidad:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(\rho v Y) dy = 0$$

y, teniendo en cuenta las condiciones en los límites: $u = v = 0$, $y = 0$; $u = u_e$, $v = v_e$, $y = \delta$, resulta:

$$\int \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y) dy + \rho_e v_e Y = 0$$

Como quiera que δ varía con x , el primer término equivale a:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u Y dy - \rho_e u_e Y \frac{d\delta}{dx} \quad (4.62)$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la definición de δ' , se obtiene:

$$\frac{v_e}{u_e} = \frac{d\delta^*}{dx} - (\delta - \delta^*) \frac{d}{dx}(\ln \rho_e u_e Y) \quad (4.63)$$

Para interpretar esta ecuación, obsérvese que el primer miembro representa la pendiente del flujo exterior con respecto a la pared ($\delta\phi = v_e / u_e s$) en la frontera (δ) de la capa límite.

Conocidos $\delta(x)$, $\delta^*(x)$ y $\rho_e u_e$, la ecuación 4.63 da la condición que debe satisfacer el *flujo exterior no viscoso sobre la línea de frontera* (δ) a fin de que se conserve el flujo másico, de modo que, en un cálculo exacto del flujo no viscoso, es necesario sustituir la condición habitual $v = 0$ en la pared por la condición precedente escrita sobre la línea (δ).



En el caso de las capas límite de pequeño espesor, $\delta \ll Y$, la condición anterior es equivalente a $\frac{v_e}{u_e} = \frac{d\delta^*}{dx}$ escrita sobre $y = \delta^*$.

Para tener en cuenta este efecto, basta con calcular el flujo no viscoso en la región que resulta de desplazar la pared hacia el núcleo el espesor δ^* de la capa límite. Esta es la razón por la cual se denomina *efecto de desplazamiento*.

En cuanto a la ecuación integral de las cantidades de movimiento, aplicando la misma técnica de integración resulta:

$$\frac{1}{Y} \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 Y) dy + (\rho u v)_0^\delta = \int \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} dy + [\tau]_0^\delta$$

Las condiciones en los límites son $\tau = 0$ para $y = \delta$, y $\tau = \tau_p$ para $y = 0$. Integrando, resulta:

$$\frac{1}{Y} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 Y) dy + \rho_e u_e v_e - \rho_e u_e \delta \frac{du_e}{dx} = -\tau_p$$

A partir de la ecuación 4.63 y de la definición δ^* , se obtiene, después de algunas transformaciones, la *condición integral de las cantidades de movimiento*:

$$\frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left[\frac{H+1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{d}{dx} \ln(\rho_e u_e Y) \right], H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (4.64)$$

donde H es el *factor de forma* del perfil de velocidades y de temperaturas en la capa límite.

La ecuación diferencial ordinaria 4.64 se puede integrar paso a paso a lo largo de la pared si se conocen el flujo externo, el factor de forma H y el coeficiente de rozamiento:

$$C_f = \tau_f / \frac{1}{2} \rho_e u_e^2$$

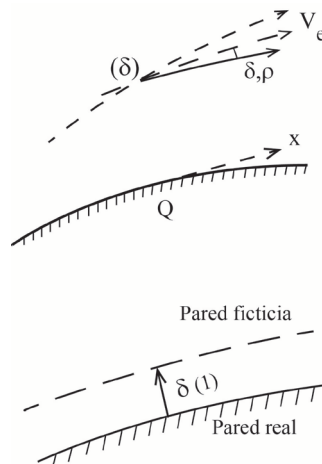


Fig. 4.8.



El mismo método, aplicado a la ecuación de la energía, conduce a la condición integral:

$$\frac{\dot{q}_p}{\rho_e u_e h_{0e}} = \frac{ds}{dx} + \Delta \frac{d}{dx} \ln(\rho_e u_e Y) \quad (4.65)$$

Esta ecuación puede integrarse también paso a paso, si podemos expresar el primer miembro en función de otros parámetros de la capa límite.

De hecho, esta ecuación es sustituida con frecuencia por una hipótesis sobre la relación \dot{q}/τ_p .

4.5.1 Los métodos de cálculo

Existen numerosos métodos de cálculo de la capa límite a partir de las ecuaciones anteriores. Todos tienen puntos en común y, generalmente, difieren solo en las hipótesis empíricas elegidas. Son conocidos como *métodos integrales* y requieren definir el movimiento en la capa límite por un perfil de velocidades. Aparte de estos métodos, hay otros que aportan soluciones elementales, como los que proponen Crocco y Busemann,¹¹ o Howarth y Stewartson,¹¹ este último para flujos con gradientes de presión en el caso de capas límites laminares, y los métodos de Eckert, Van Driest, Sommer y Short, White y Christoph,¹¹ entre otros, para la capa límite turbulenta. Por otra parte, dadas la gran capacidad y la rapidez de cálculo de los actuales ordenadores, es evidente que son muchos los problemas de capa límite que hallan solución por la resolución numérica de las ecuaciones fundamentales a partir de su *discretización numérica por el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método del volumen finito*. Su consideración queda fuera del alcance de este libro.

Por su interés, en relación con el diseño de toberas, se expone brevemente el método propuesto por R. Michel.¹²

Las hipótesis de partida son las siguientes:

a) El perfil de velocidades en la capa límite es $\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$ (4.66)

b) El perfil de temperaturas está relacionado con la distribución de velocidad por la ley de Crocco modificada:

$$T - T_p = (T_f - T_p) \frac{u}{u_e} + (T_e - T_f) \left(\frac{u}{u_e}\right)^2 \quad (4.67)$$

donde T_f representa la temperatura de equilibrio adiabático de la pared.

c) La ley del coeficiente de rozamiento, que adopta la forma:

$$C_f = \frac{0,0172}{\left(\frac{\rho_e u_e \delta^{**}}{\mu_e}\right)^{1/5}} \cdot g\left(M_e, \frac{T_p}{T_f}\right) \quad (4.68)$$

La función g se calcula por el método de la temperatura media T' de Eckert, que permite tener en cuenta los efectos de la compresibilidad. Esta función está representada en la figura 4.9.

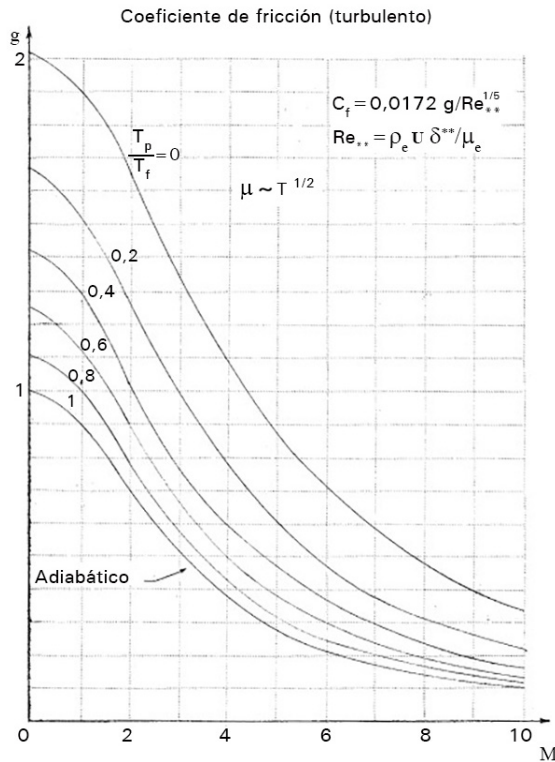


Fig. 4.9.

El método de Eckert consiste en admitir que la capa límite compresible se comporta como una capa límite incompresible de temperatura uniforme T' media, función de T_p , T_f y T_e .

Resulta, pues, que es necesario conocer la distribución de temperaturas parietales T_p , o sea, para todo x en $y = 0$, $u = 0$.

El flujo de calor en la pared viene dado por

$$\dot{q}_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = \lambda (T_p - T_f) \frac{1}{u_e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p \quad (4.69)$$

Por otra parte, la experiencia muestra que, en la capa límite turbulenta, se verifica:

$$T_f = T_e + r \cdot \frac{u_e^2}{2c_p}, \quad \text{con } r = \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

siendo $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ y r el número de Prandtl y el factor de recuperación térmica parietal, respectivamente.



Para flujos acelerados ($n \sim 7$), las hipótesis a y b permiten calcular, aceptando que la capa límite es isóbara, $\rho T = \rho_e T_e$, los espesores δ^* y δ^{**} y su relación H . R. Michel propone la expresión:

$$H = 1,4 + 0,4 M_e^2 + 1,22 \frac{T_p - T_f}{T_e} \quad (4.70)$$

4.5.2 Los métodos de cálculo del coeficiente de fricción y de la transferencia de calor en la pared

Muchos de los problemas de dinámica de gases en ingeniería requieren determinar el coeficiente de fricción de la capa límite en la pared y también, aunque no tanto, la transferencia de calor en ella.

A tal fin, se han propuesto varios métodos de análisis, entre los cuales cabe destacar los de Van Driest, Wilson, Eckert y Sommer-Short. A continuación, se exponen los fundamentos y los resultados de cada uno de ellos.

Método de análisis de Van Driest

La determinación del coeficiente de fricción parietal requiere conocer previamente la distribución de velocidad en la capa límite. A tal fin, una primera aproximación consiste en adoptar, para la tensión de cortadura en régimen turbulento, la ecuación $\tau_w = \bar{\rho} k^2 y^2 (d\bar{u}/dy)^2$ y considerar isoterma la pared. Esta aproximación conduce a una distribución de velocidad que no es completa, por lo cual Van Driest opta por el método integral, que da buenos resultados incluso cuando el perfil de velocidad es solo aproximadamente correcto. Así pues, sus ecuaciones de partida son las siguientes:

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \bar{\rho} \bar{u} (U - \bar{u}) dy, \quad c_p \bar{T}_{0w} = c_p \bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} = \text{cte.}$$

Resolviendo la integral utilizando para \bar{u} el valor encontrado por el primer procedimiento, y suponiendo para el valor de la viscosidad del gas una ley de potencia $\mu \sim T^\omega$, obtiene, después de las debidas transformaciones, el resultado siguiente:

$$\left[\frac{2T_\infty}{A^2 c_{f\infty} T_w} \right]^{1/2} (\sin^{-1} \alpha + \sin^{-1} \beta) = Cte + \frac{1}{k} \left[\ln(Re_\infty c_{f\infty}) - \frac{1+2\omega}{2} \ln \frac{T_w}{T_\infty} \right] \quad (4.71)$$

donde
$$c_{f\infty} = \frac{\tau_w}{1/2 \rho_\infty U^2}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty U x}{\mu_\infty}$$

El valor de la constante de integración y de k se puede evaluar por acuerdo de la solución 4.71 con una de flujo incompresible, como la de Von Karman,¹⁴ cuando $M_\infty \rightarrow 0$:

$$c_{f\infty}^{-1/2} = 1,70 + 4,15 \log(Re_\infty c_{f\infty})$$

De ello, resulta la ecuación:



$$\frac{0,242}{A\sqrt{c_{f\infty}T_w/T_\infty}}(\operatorname{sen}^{-1}\alpha + \operatorname{sen}^{-1}\beta) = 0,41 + \log(\operatorname{Re}_\infty c_{f\infty}) - \frac{1+2\omega}{2} \ln \frac{T_w}{T_\infty} \quad (4.72)$$

$$\alpha = \frac{2A^2 - B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}}, \quad \beta = \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}}, \quad A^2 = \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \frac{T_\infty}{T_w},$$

donde

$$B = \frac{T_\infty}{T_w} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) - 1$$

A su vez, el flujo de calor se expresa: $q_w = \frac{c_p \tau_w}{U} (T_{aw} - T_w)$.

(Ver ref. 3)

Método de Wilson

Wilson desarrolló un procedimiento alternativo, utilizando la fórmula de longitud de mezcla propuesta por Von Karman, en lugar de la de Prandtl.

Tras varias transformaciones, y supuesta adiabática la superficie, llega a deducir la siguiente ecuación diferencial, que relaciona el coeficiente de fricción con el número de Reynolds de la corriente a lo largo de la superficie (placa plana):

$$d\operatorname{Re}_w = \frac{1}{ck^3 e^{ks}} \left[-\frac{\sqrt{2}}{c_f^{3/2}} + \frac{2kc_1}{c_f^2} - \frac{\sqrt{2}k^2 c_1}{c_f^{5/2}} \right] \exp \left[kc_1 \sqrt{2/c_f} \right] dc_f \quad (4.73)$$

donde $c_1 = \frac{\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$ y $\sigma = \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 / \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)$

Integrando la ecuación 4.73 y adoptando para las constantes el valor que tienen en el modelo de Von Karman para flujo incompresible, resulta:

$$c_1 c_f^{-1/2} = 1,7 + 4,15 \log(c_f \operatorname{Re}_w) \quad (4.74)$$

(Ver ref. 14)

Método de Eckert

Eckert utiliza otro método, asumiendo que la ley de potencia un séptimo para la distribución de velocidad en el flujo incompresible turbulento a lo largo de un tubo es también válido para flujo compresible turbulento a lo largo de una pared plana si el diámetro del tubo d se sustituye por 2δ y la velocidad en la línea central del tubo se sustituye por la velocidad en el borde exterior de la capa límite. Además toma para ρ y μ los valores medios apropiados. Entonces, la tensión de cortadura es:



$$\tau_w = 0,0277 \rho_\infty U^2 \left(\frac{\mu_\infty}{2\delta \rho_\infty U} \right)^{1/4} \left(\frac{\bar{T}}{T_\infty} \right)^{(\omega-3)/4}$$

Realizadas varias transformaciones y aceptados algunos supuestos, se llega a la ecuación

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} = 0,0944 \left(\frac{\theta}{\delta} \right)^{1/5} \left(\frac{\bar{T}}{T_\infty} \right)^{(\omega-3)/4} \quad (4.75)$$

donde
$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\bar{u}}{U} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U} \right) d\left(\frac{y}{\delta} \right) \quad \text{con} \quad \frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

(Ver ref. 15)

Método de Sommer y Short

Sommer y Short desarrollaron un método empírico basado en el concepto de temperatura de referencia y en la fórmula de Von Karman para el arrastre total de una capa límite turbulenta de un fluido incompresible sobre una placa plana. Su definición de coeficiente global de arrastre de la capa límite se expresa del modo siguiente:

$$C'_f = \left(\frac{0,242}{\log(C'_f Re')} \right)^2 \quad (4.76)$$

donde $Re' = Ul\rho'/\mu'$ es el número de Reynolds con base en la viscosidad definida por la fórmula de Sutherland y en una temperatura de referencia dada por:

$$\frac{T'}{T_\infty} = 1 + 0,035 M_\infty^2 + 0,45 \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right)$$

A partir de la ecuación (4.76), hechas las oportunas transformaciones, llegan a la definición siguiente del coeficiente total de fricción del flujo compresible sobre una placa plana de longitud l :

$$C_f = C'_f \rho' / \rho_\infty \quad (4.77)$$

(Ver [Ca72], [Sch60])

(Ver ref. 16)



Ejercicios

Ejercicio 1

En un túnel de viento, se ensaya aerodinámicamente una maqueta cuyas dimensiones son: 0,02 m de altura y 0,2 m de longitud. Las condiciones del ensayo son:

$$\rho = 0,018 \text{ kg / m}^3, T = 154 \text{ K}, P = 833 \text{ Pa}, V = 1.743 \text{ m / s}$$

A dichas condiciones experimentales, corresponde $M = 7$.

Para medir la presión de remanso de la corriente, se instala en la parte frontal de la maqueta una aguja hipodérmica de $8 \cdot 10^{-5}$ m de diámetro exterior, que actúa como sonda de Pitot.

Determina si cabe o no esperar efectos de flujo rarificado sobre la maqueta y sobre la sonda.

Resolución

En primer lugar, hay que determinar el número de Reynolds de la corriente en cada una de las zonas, en la maqueta y en la sonda, para decidir qué fórmula del número de Knudsen debe aplicarse al problema para decidir la respuesta.

Para la maqueta, el número de Reynolds debe definirse en términos de su longitud 0,2 m y del valor de la viscosidad del gas, que para $T = 154 \text{ K}$ es $\mu = 12,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg / m} \cdot \text{s}$. Resulta:

$$\text{Re} = \frac{\rho L V}{\mu} = \frac{0,018 \cdot 0,2 \cdot 1.743}{12,2 \cdot 10^{-6}} = 5,14 \cdot 10^5 \gg 1$$

Por tanto, $\text{Kn} = \frac{M}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{7}{\sqrt{0,514 \cdot 10^6}} = 9,764 \cdot 10^{-3} \cong 0,01$; o sea: el régimen de flujo se

encuentra en el umbral continuo-deslizamiento, por lo cual cabe esperar efectos de flujo rarificado despreciables.

Para el tubo de Pitot, el número de Reynolds debe definirse en términos del diámetro de la sonda $8 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ y de las propiedades del fluido indicadas. Resulta:

$$\text{Re} = \frac{\rho D V}{\mu} = \frac{0,018 \cdot 8 \cdot 10^{-5} \cdot 1.743}{12,2 \cdot 10^{-6}} = 205,7$$

Para este régimen de flujo, el criterio del número de Knudsen antes adoptado tendría por valor 0,488, propio del régimen de transición; sin embargo, si se adopta el criterio $\text{Kn} = M / \text{Re}$, se obtiene $\text{Kn} = 7 / 205,7 = 0,034$, que corresponde más bien a un régimen de deslizamiento.

En principio, pues, cabe sospechar que, al nivel de la sonda, habrá que tener en cuenta los efectos del flujo rarificado.

(Ver [ZH76])

**Ejercicio 2**

Sea una capa límite turbulenta de aire sobre una placa plana cuya temperatura de superficie es igual a la de la corriente libre. La placa tiene un ancho de 0,35 m y una longitud 1,75 m. La temperatura de la corriente libre, la presión y la velocidad son de 900 K, 0,7 bar y 500 m.s⁻¹, respectivamente. Utilizando el método de Van Driest, calcula la tensión de cortadura en la pared, en función de x, el arrastre total de la placa y el calor transferido a la placa.

Resolución

Por el método de Van Driest, el coeficiente de fricción de la corriente de aire sobre la placa viene dado por la ecuación:

$$\frac{0,242}{A\sqrt{c_{f\infty}T_w/T_\infty}}(\operatorname{sen}^{-1}\alpha + \operatorname{sen}^{-1}\beta) = 0,41 + \log(Re_\infty c_{f\infty}) - \frac{1+2\omega}{2} \log \frac{T_w}{T_\infty}$$

donde

$$\alpha = \frac{2A^2 - B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}}, \quad \beta = \frac{B}{(B^2 + 4A^2)^{1/2}}, \quad A^2 = \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \frac{T_\infty}{T_w}, \quad B = \frac{T_\infty}{T_w} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right] - 1$$

$$Re_\infty = \rho_\infty Ux / \mu_\infty, \quad \mu / \mu_\infty = (T / T_\infty)^{0,76} \text{ y } M_\infty = V / a, \text{ con } a = \sqrt{\gamma RT}$$

Para el aire a 900 K y 0,7 bar, tenemos:

$$\gamma = 1,4, \quad R = 287,04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho_\infty = P_\infty / RT_\infty = 0,7 \cdot 10^5 / 287,04 \cdot 900 = 0,271 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$T / T_\infty = 1 \rightarrow \mu = \mu_\infty(900 \text{ K}) = 1,624 \cdot 10^{-7} \cdot 0,271 = 440,1 \cdot 10^{-7} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$M_\infty = 500 / \sqrt{1,4 \cdot 287,04 \cdot 900} = 0,8314$$

$$Re_\infty = 0,271 \cdot 500 \cdot x / 440,1 \cdot 10^{-7} = 0,3079 \cdot 10^7 x$$

$$A = 0,3718, B = 0,3718 \rightarrow \alpha = -0,1147,$$

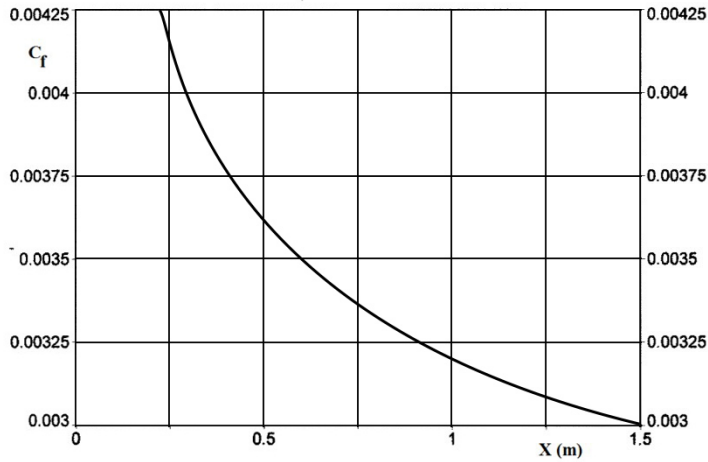
$$\operatorname{sen}^{-1}(-0,1147) = -0,1277, \quad \beta = 0,4472, \quad \operatorname{sen}^{-1}\beta = 0,515$$

$$0,2511 c_{f\infty}^{-1/2} = 0,41 + \log(0,3079 \cdot 10^7 x \cdot c_{f\infty}) \rightarrow c_{f\infty}^{-1/2} = 27,47 + 3,982 \log(x \cdot c_{f\infty})$$

O sea:

$$c_{f\infty}^{-1/2} = 27,47 + 3,982 \log x + 3,982 \log c_{f\infty}$$

Los resultados están representados en la figura siguiente:



La función de ajuste de los resultados es $C_f = 0,001823 + 0,001378x^{-0,3782}$ con $r^2 = 0,9997$

El arrastre total de la placa es $F = \int_0^L \tau_w \cdot a dx = \frac{1}{2} (\rho U)_\infty a \int_0^L c_f dx$

Sustituyendo c_f , se obtiene $F = \frac{1}{2} (\rho U)_\infty a \int_0^L (0,001823 + 0,001378x^{-0,3782}) dx$

Integrando y sustituyendo valores, se obtiene:

$$F = 0,5 \cdot 0,271 \cdot (500)^2 \cdot 0,35 \left(0,001823 \cdot 6 + 0,001378 \cdot \frac{(6)^{0,6218}}{0,6218} \right) = 209,74 \text{ N}$$

El calor transferido a la pared viene dado por:

$$Q_w = \int_0^L a \frac{c_p \tau_w}{U} (T_{aw} - T_w) dx = \frac{a}{U} \frac{U^2}{2} \int_0^L (0,001823 + 0,001378x^{-0,3782}) dx$$

Integrando y sustituyendo valores, se obtiene:

$$Q_w = \frac{0,35 \cdot 500}{2} \left(0,001823 \cdot 6 + 0,001378 \cdot \frac{(6)^{0,6218}}{0,6218} \right) = 1,548 \text{ Kcal} \cdot \text{s}^{-1}$$

(Ver [Vi15] y [Schr82])

**Ejercicio 3**

Sabiendo que la distribución de velocidad en la capa límite a 50 cm del borde de ataque de una placa delgada viene dada por la ecuación $\frac{u}{U_0} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$, determina:

1. El espesor de desplazamiento δ^* y el espesor de la cantidad de movimiento θ de la capa límite en dicho punto.
2. El valor de la tensión tangencial sobre la placa, admitiendo que a dicha distancia la capa límite es laminar.
3. El espesor de la capa límite allí, sabiendo que:
 - (i) el fluido es aire de densidad $1,29 \text{ kg/m}^3$ y viscosidad dinámica $1,81 \cdot 10^{-4}$ poises
 - (ii) la velocidad del aire fuera de la capa límite es de 6 m/s

Resolución

1. Por definición, el espesor de desplazamiento de la capa límite viene dado por

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy. \text{ Sustituyendo } \frac{u}{U_0} \text{ por su valor, se obtiene:}$$

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - 2\frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

Resulta: $\delta^* = (1/3) \delta$ (1)

Por definición, el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite viene dado por

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy. \text{ Procediendo como en el caso anterior, se obtiene:}$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \left(1 - 2\frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

Y resulta: $\theta = (2/15) \delta$ (2)

2. Para la capa límite laminar, la tensión tangencial sobre la placa viene dada por

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}$$

Sustituyendo el gradiente de velocidad derivado de la ecuación de distribución de velocidad en la capa límite, resulta:

$$\tau_0 = \mu \frac{d}{dy} \left[U_0 \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \right] \text{ en } y = 0.$$



Así pues:

$$\tau_0 = \frac{2\mu U_0}{\delta} \quad (3)$$

El cálculo de τ_0 requiere determinar el valor de δ . Para ello, se plantean dos ecuaciones para la misma magnitud, la fuerza de arrastre de la corriente sobre la placa, ambas en términos de δ :

$$F = \int_0^x \tau_0 dx = \frac{2\mu}{U_0} \int_0^x \frac{dx}{\delta}, \text{ que es la fuerza de arrastre sobre la placa, y}$$

$$F = \rho \int_0^\delta U_0 u dy - \rho \int_0^\delta u^2 dy = \rho U_0^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy = \frac{2}{15} \rho U_0^2 \delta$$

que es la misma fuerza expresada como variación de la cantidad de movimiento de la corriente en la capa límite, en x .

La igualdad entre ambas ecuaciones conduce a: $\int_0^x dx = \frac{U_0}{15\nu} \int_0^\delta \delta d\delta$, cuya integral es:

$$\delta = \sqrt{\frac{30\nu x}{U_0}} = 5,919 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en las ecuaciones (2) y (3), se obtiene:

$$\delta^* = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{30\nu x}{U_0}} = 1,973 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad , \quad \theta = \frac{2}{15} \sqrt{\frac{30\nu x}{U_0}} = 7,893 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Análogamente, sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3), se obtiene:

$$\tau_0 = 3,669 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$$

(Ver [Vi93])

Ejercicio 4

Desde una estación de compresión de un tramo de gaseoducto, de 30 km de longitud y 0,13 m de diámetro interior, se ha de impulsar un flujo másico de $1,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ de metano a un depósito de reserva de una fábrica de vidrio, cuya presión absoluta es de $2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ y la temperatura, de 20°C .

Sabiendo que la rugosidad relativa de la tubería ε/D es de 0,00078 y que la viscosidad dinámica del metano a 20°C es de $1,08 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, calcula la presión de impulsión en el supuesto de que el flujo sea isoterma.

**Resolución**

El estado de equilibrio del sistema en términos de presión y pérdida de carga de la corriente de gas en él se expresa del modo siguiente:

$$G^2 \left(\ln \frac{P_1}{P_2} + f \cdot \frac{L}{2D} \right) = \left(\frac{P_1^2 - P_2^2}{P_2} \right) \rho_2 \quad (19)$$

donde $G = \rho V = 4\dot{m} / \pi D^2$ es el flujo específico de gas en la tubería, P_1 es la presión de impulsión y P_2, ρ_2 son representativas del estado del gas en el punto de recepción.

Para calcular la pérdida de carga en la tubería, es necesario determinar el coeficiente de fricción en ella, función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

El valor del número de Reynolds es:

$$Re = 4\dot{m} / \pi D \mu = 41,2 / \pi \cdot 0,131,08 \cdot 10^{-5} = 1,088 \cdot 10^6$$

Se trata, pues, de un régimen de flujo turbulento rugoso. Para este número de Reynolds y el valor de la rugosidad relativa de la tubería, en el diagrama de Moody se encuentra $f = 0,018$. Sustituyendo valores en la ecuación (19), se obtiene:

$$\left(\frac{41,2}{\pi (0,13)^2} \right)^2 \left(\ln \frac{P_1}{2,5 \cdot 10^5} + 0,018 \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,13} \right) = \left(\frac{P_1^2}{2,5 \cdot 10^5} - 2,5 \cdot 10^5 \right) \rho_2 \quad (20)$$

Sabiendo que el peso molecular del metano es 16, el valor de ρ_2 es:

$$\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{2,5 \cdot 10^5}{(8,314 / 16)(273 + 20)} = 1,642 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Una estima de los órdenes de magnitud de los términos de la ecuación (2) permite suponer que $\ln \frac{P_1}{2,5 \cdot 10^5} \ll 2076,9$ es valor del término de fricción, estima que habrá que confirmar.

Por tanto, la ecuación (20) queda:

$$(90,4)^2 \cdot 2.076,9 = \left(\frac{P_1^2}{2,5 \cdot 10^5} - 2,5 \cdot 10^5 \right) \cdot 1,642$$

de donde resulta:

$$P_1 = 16,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Para este valor, se encuentra: $\ln \frac{P_1}{2,5 \cdot 10^5} = 1,869 \ll 2.076,9$

(Ver [Vi93])



→ 5



Flujo subsónico de fluidos compresibles por tuberías

5.1 Introducción

En el movimiento de fluidos compresibles por tuberías, el volumen, la densidad y la viscosidad pueden variar de forma muy sensible en función de la presión y de la temperatura. A la disminución de la presión, que se produce como consecuencia del rozamiento fluido-dinámico en la canalización, le acompaña una expansión del gas, que se traduce en un aumento del caudal (es decir, de la velocidad), una disminución de la densidad y un aumento de la viscosidad cinemática.

En no pocas aplicaciones, la utilización y/o la evacuación de fluidos compresibles – aire, gas combustible, humos, etc.– exige que las condiciones de servicio sean especificadas en condiciones normales ($T_n = 288\text{ K}$, $P_n = 1,013\text{ bar}$) o en condiciones de servicio (T, P). Si el fluido puede ser asimilado a un gas perfecto, las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac permiten calcular el valor de la presión, de la temperatura y de la densidad real del fluido en una u otra condición, y convertirlos de un estado al otro. Por otra parte, la fórmula de Sutherland sirve para determinar el valor de la viscosidad del fluido en un estado termodinámico conocido.

Si bien este libro no pretende transferir conocimientos que puedan aplicarse inmediatamente a problemas tecnológicos concretos, sí se considera necesario exponer aquellos fundamentos que es preciso conocer para aplicar correctamente la mecánica de fluidos en la práctica, y las normas, las instrucciones y los reglamentos que pueden acompañarla.

5.2 Flujo con pequeñas variaciones de densidad

Si los cambios de presión están limitados a pequeños porcentajes de la presión absoluta del gas, como máximo del orden del 5 % de la presión inicial, y las condiciones de este, tales como la densidad y la viscosidad, son conocidas en algún punto del sistema, puede obtenerse una estimación del flujo másico, de la presión o del tamaño de tubería mediante ecuaciones simplificadas del flujo de fluidos reales en conductos.



5.2.1 Ecuación de Bernoulli generalizada

El proyecto de sistemas de conductos de ventilación, acondicionamiento de aire, evacuación de humos y vapores, entre otros, se fundamenta en la ecuación de Bernoulli generalizada. Su aplicación más simple es a un conducto rectilíneo de sección recta constante, sin accesorios.

La ecuación de Bernoulli generalizada aplicada a lo largo de la línea de corriente media en un conducto rectilíneo inclinado se escribe:

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + gz + \phi_v = \text{cte.} \quad (5.1)$$

En la ecuación 5.1, ϕ_v es la energía disipada por unidad de masa a causa de los efectos viscosos, y $\int \frac{dP}{\rho}$ es igual a $\frac{P}{\rho} - \int Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$. El término integral representa la energía por unidad de masa asociada a la variación de densidad del fluido. Por consiguiente, la ecuación 5.1 se escribe:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} - \int Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + gz + \phi_v = \text{cte.} \quad (5.2)$$

Aplicando la ecuación 5.2 a dos secciones del conducto, se obtiene:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 + \int_1^2 Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + |\Delta\phi_v|_1^2 \quad (5.3)$$

En la ecuación anterior, $|\Delta\phi_v|_1^2$ es la pérdida de energía por unidad de masa del fluido entre dos secciones del tubo distantes una longitud L como consecuencia del rozamiento fluido-dinámico y de los efectos dinámicos, y el término $\int_1^2 Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$ representa

la energía por unidad de masa asociada a los cambios de densidad que el fluido experimenta en el tránsito de una sección del tubo a la otra.

Para un gas perfecto, una expresión más explícita es:

$$\int_1^2 Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\tilde{R}}{M} \int_1^2 T d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\tilde{R}}{M} \int_1^2 T \frac{d\rho}{\rho} \quad (5.4)$$

Habida cuenta de que la variación del valor de la densidad del fluido como consecuencia de su cambio de temperatura se expresa $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$, la ecuación 5.4 se escribe:

$$\int_1^2 Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\tilde{R}}{M\alpha} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{\tilde{R}}{M} \left(T_0 + \frac{1}{\alpha}\right) \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (5.5)$$



Sustituyendo la ecuación 5.5 en la ecuación 5.3, resulta:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{\tilde{R}}{M\alpha} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - (1 + T_0\alpha) \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] + |\Delta_v|_1^2 \quad (5.6)$$

5.2.2 Relación entre la energía disipada por unidad de masa en el flujo estacionario de fluido compresible entre dos secciones de un tubo de sección recta constante y el concepto de pérdida de carga por unidad de masa en caso de fluido incompresible

En el capítulo C4, la pérdida de energía por unidad de masa en el flujo estacionario, unidimensional, isotérmico de un fluido incompresible entre dos secciones (1,2) de un conducto de sección recta constante se ha denominado *pérdida de carga* y se ha definido por la ecuación genérica:

$$\frac{(\Delta P)_i}{\rho} = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2} \quad (5.7)$$

En el caso del flujo compresible isoterma, la pérdida de carga es, según la ecuación 5.2, la siguiente:

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho} \right)_c = - \int P d \left(\frac{1}{\rho} \right) + \phi_v \quad (5.8)$$

Al comparar las ecuaciones 5.7 y 5.8, se constata la relación:

$$(\Delta P)_c = \rho_c \left[- \int P d \left(\frac{1}{\rho} \right) + (\Delta P)_i \right] \quad (5.9)$$

Habida cuenta de que la pérdida de presión ΔP se produce entre los extremos de un tramo de tubería de longitud L en cuyos extremos la presión del gas es P_1 y P_2 , el segundo miembro de la ecuación 5.9 se puede escribir en la forma:

$$(\Delta P)_c = k_e (\Delta P)_i \quad (5.10)$$

donde $k_e = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2(\Delta P)_i}{P_1}}}$ es el coeficiente por el cual se ha de multiplicar la pérdida de carga en el flujo incompresible de idénticos estados inicial y final que los del flujo compresible para obtener la pérdida de carga en el flujo compresible.

En la figura 5.1, se ha representado la gráfica que da los valores de k_e en función de $\frac{\Delta P_i}{P_1}$. En general, la corrección se lleva a cabo cuando la pérdida de carga total del flujo incompresible, comprendidas las pérdidas de carga singulares, es igual o inferior al 5 % de la presión inicial.

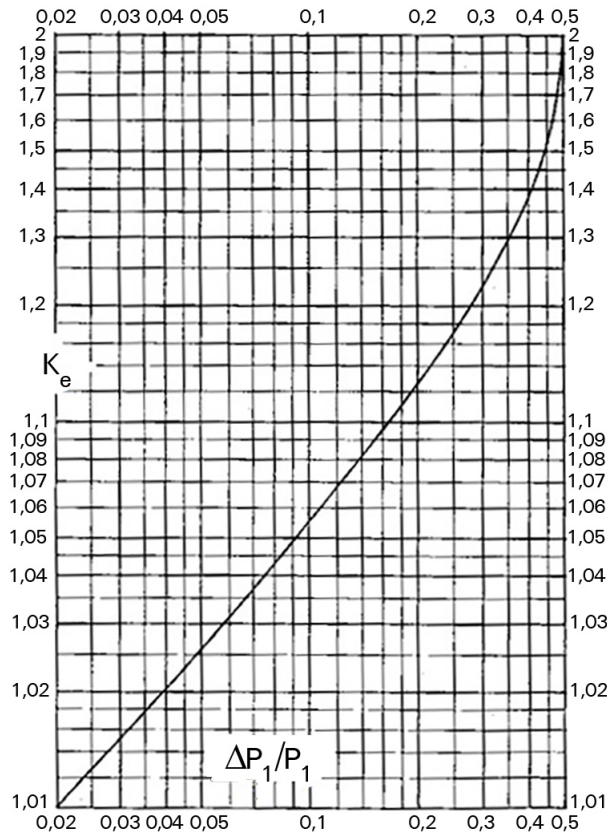


Ecuaciones de pérdida de carga

En la práctica, las pérdidas de carga se expresan por unidad de longitud de tubería en mbar/m, el caudal en m³/h y el diámetro del tubo en mm. Sin embargo, es más conveniente partir de una ecuación en términos de la velocidad del fluido en m/s, la densidad en kg/m³ y el diámetro en m.

Entonces, la ecuación general de las pérdidas de carga se escribe:

Fig. 5.1.



$$J = \lambda \frac{1}{D} \rho \frac{V^2}{200} \quad (5.11)$$

A efectos prácticos, se suele utilizar para λ una fórmula tal como:

$$\lambda = \alpha Re^{-n} = \alpha (VD/\nu)^{-n} \quad (5.12)$$

Sustituyendo la ecuación 5.12 en la 5.11, y agrupando términos, se obtiene:

$$J = \frac{\alpha}{200} \rho \nu^n \frac{V^{2-n}}{D^{1+n}} \quad (5.13)$$

Introduciendo el caudal \dot{V} , la ecuación 5.13 se escribe:



$$J = \frac{\alpha}{200} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2-n} \rho^{1-n} \mu^n \frac{\dot{V}^{2-n}}{D^{5-n}} \quad (5.14)$$

En esta ecuación, ρ y \dot{V} son la densidad y el caudal de gas en condiciones reales. Pasando a condiciones normales, se obtiene:

$$J = \frac{\alpha}{200} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{2-n} \rho_N^{1-n} \mu^n \left(\frac{TP_N}{T_N P} \right) \frac{\dot{V}_N^{2-n}}{D^{5-n}} \quad (5.15)$$

$$J = 5 \cdot 10^6 \cdot \alpha \cdot 0,354^{(2-n)} \rho_N^{(1-n)} \mu^n \left(\frac{TP_N}{T_N P} \right) \frac{\dot{V}_N^{(2-n)}}{D^{(5-n)}} \quad (5.16)$$

Las condiciones normales son $T_N (288 K)$, $P_N (1,013 \text{ bar})$. Las unidades del resto de magnitudes, excepto las de caudal y diámetro, que ya se han especificado, son las siguientes: $J (\text{mbar} / \text{m})$, $\rho (\text{kg}/\text{m}^3)$, $\mu (\text{Pa} \cdot \text{s})$.

La variación de la viscosidad del gas con la presión es prácticamente despreciable hasta 50 bar, como se muestra en la figura 5.2; sin embargo, varía mucho con la temperatura. Conviene, pues, modificar la ecuación 5.16 para que quede explícita dicha variación.

A tal fin, se parte de la ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_N (T / T_N)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{C}{T_N} \right) / \left(1 + \frac{C}{T} \right) \right] \quad (5.17)$$

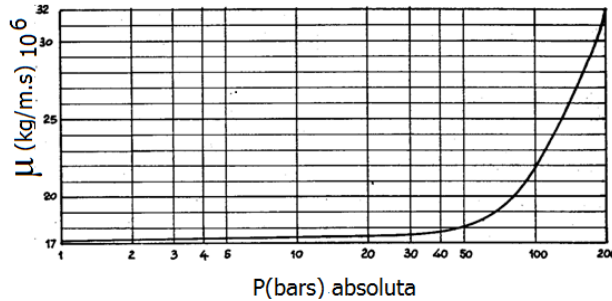


Fig. 5.2.
Viscosidad dinámica en función de la presión

Tomando la aproximación $\mu = \mu_N (T / T_N)^n$ y sustituyéndola en la ecuación 5.16, se obtiene:

$$J = 5 \cdot 10^6 \alpha \cdot 0,354^{(2-n)} \rho_N^{(1-n)} \mu_N^n \left(\frac{T}{T_N} \right)^{(1+mn)} \frac{P_N}{P} \frac{\dot{V}_N^{(2-n)}}{D^{(5-n)}} \quad (5.18)$$

A veces, la fórmula monomio es insuficiente para traducir la variación del coeficiente λ . En este caso, es necesario introducir un factor de corrección en términos de diámetro. La fórmula se presenta entonces de la forma:

$$\lambda = \alpha Re^{-n} D^{-x} \quad (5.19)$$



Por consiguiente, la ecuación 5.18 se escribe:

$$J = 5 \cdot 10^6 \cdot \alpha \cdot 0,354^{(2-n)} \cdot 1.000^x \cdot \rho_N^{(1-n)} \cdot \mu_N^n \left(\frac{T}{T_N} \right)^{(1+mn)} \frac{P_N}{P} \frac{\dot{V}_N^{(2-n)}}{D^{(5-n+x)}} \quad (5.20)$$

El valor de los exponentes m, n, x depende de la naturaleza del fluido considerado.

(Ver [AK75] y [Be80])

5.3 Flujo de gases combustibles por tubería

A lo largo de la tubería, ρ y V pueden variar significativamente como resultado de los cambios de temperatura y presión. En un tramo de longitud dl y diámetro hidráulico D_h , si el flujo es estacionario se verifica:

$$\frac{dP}{\rho} + V \cdot dV + gdh + \lambda \frac{dl}{D_h} \frac{V^2}{2} = 0 \quad (5.21)$$

donde $\rho = \tilde{M}P / \tilde{R}Tz$, $V = z \left(\frac{P_N T}{T_N P} \right) \frac{\dot{V}_N}{\pi D_h^2 / 4}$ y $dh = dl \cdot \sin \alpha$, y α es el ángulo que el eje de la tubería forma con la horizontal.

En general, $V \cdot dV \rightarrow 0$, o muy pequeño frente a los otros términos. Por consiguiente:

$$z \frac{\tilde{R}T}{\tilde{M}} \frac{dP}{P} + gdl \sin \alpha + z^2 \left(\frac{4P_N}{\pi T_N} \right)^2 \left(\frac{T}{P} \right)^2 \lambda \frac{dl}{D_h^5} \frac{\dot{V}_N^2}{2} = 0 \quad (5.22)$$

La ecuación 5.22 admite varias soluciones:

1. Flujo isotermo a la temperatura T en tubería inclinada

Sea h la diferencia de altura entre extremos de un tramo de tubería de longitud L . Entonces, en $L = 0$, $P = P_1$, y $\sin \alpha = h / L$.

La solución de la ecuación 5.22 es:

$$P_1^2 = P_2^2 e^{\frac{2gh\tilde{M}}{z\tilde{R}T}} + \left(\frac{4P_N}{\pi T_N} \right)^2 \frac{L}{2gh} \lambda \frac{(zT\dot{V}_N)^2}{D_h^5} \left(e^{\frac{2gh\tilde{M}}{z\tilde{R}T}} - 1 \right) \quad (5.23)$$

Para el valor de λ se pueden considerar varias fórmulas; una de las más utilizadas es la de Weymouth:¹

$$\lambda = \frac{0,009407}{D_h^{1/3}} \quad (5.24)$$

2. Flujo isotermo a la temperatura T en tubería horizontal, $h = 0$

$$P_1^2 = P_2^2 + \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{\tilde{M}}{\tilde{R}} \left(\frac{P_N}{T_N} \right)^2 \lambda \frac{L}{D_h^5} zT\dot{V}_N^2 \quad (5.25)$$



Introduciendo el valor de \tilde{R} y el de λ dado por la fórmula de Weymouth, se obtiene:

$$P_1^2 = P_2^2 + 1,834 \cdot 10^{-6} \left(\frac{P_N}{T_N} \right)^2 z T \tilde{M} \frac{L}{D_h^{16/3}} \dot{V}_N^2 \quad (5.26)$$

Las condiciones normales para estas ecuaciones son: $T_N = 288,2 \text{ K}$ y $P_N = 1,013 \text{ bar}$.

Una solución más exacta de la ecuación 5.22 se obtiene tomando para λ el valor dado por la fórmula:

$$\lambda = a \cdot Re^b \quad (5.27)$$

donde a y b son constantes características del valor de la rugosidad relativa de la tubería y del intervalo de valores de Re implicados. Por ejemplo, $a = 0,121$ $b = 0,15$.

En cualquier caso, es esencial considerar detenidamente la idoneidad de cualquier fórmula seleccionada.

Una serie de ensayos llevados a cabo en el Institute of Gas Technology (IGT) revelaron una considerable diferencia de comportamiento del tubo en el laboratorio y en la realidad.

5.3.1 Fórmulas del coeficiente de fricción fluidodinámica para el gas natural y para otros gases similares

Algunas de las fórmulas prácticas que se han propuesto hasta el momento son:

Lagache	$\lambda = 0,0228$	(5.28)
---------	--------------------	--------

Monnier	$\lambda = 0,0234$	(5.29)
---------	--------------------	--------

Chicago	$\lambda = 0,0123 \left(1 + \frac{91,5}{d} 0,00118 D \right)$	(5.30)
---------	--	--------

Oficina de Estudio del Tubo de Acero (Francia)	$\lambda = 0,0134 + 1,583 \cdot Re^{-0,5}$	(5.31)
---	--	--------

Y, sobre todo, las fórmulas propuestas por Renouard:²

Fórmula binomio	$\lambda = 0,0103 + 1,59 \cdot Re^{-0,44}$	(5.32)
-----------------	--	--------

Fórmulas monomio	$\lambda = 0,172 \cdot Re^{-0,18}$	(5.33)
------------------	------------------------------------	--------

	$\lambda = 0,21 \cdot Re^{-0,20}$	(5.34)
--	-----------------------------------	--------

En las figuras 5.3 y 5.4, se muestra la representación gráfica de las fórmulas (5.32), (5.33) y (5.34).

La fórmula binomio se utiliza en algunos países para calcular canalizaciones de transporte de una cierta importancia, mientras que las fórmulas monomio se aplican para proyectar redes de distribución con ramales relativamente cortos.



Fig. 5.3.
Zona de utilización
de la fórmula (32)
para el gas natural
de Lacq
(tubo de acero de 50
 $\leq \phi \leq 500$ mm) (15
°C – 1.013 mbar)

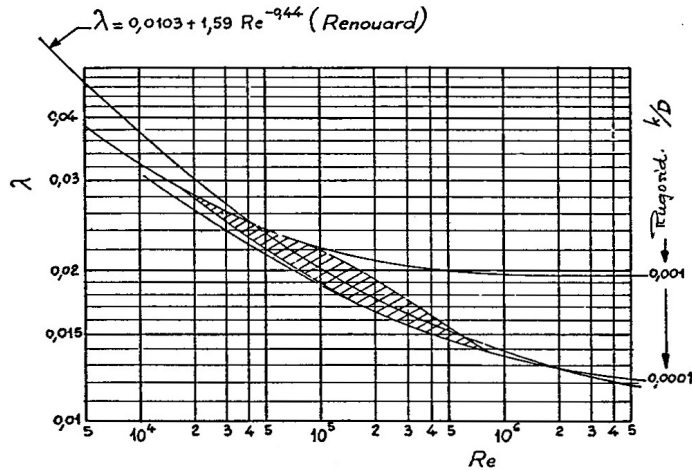
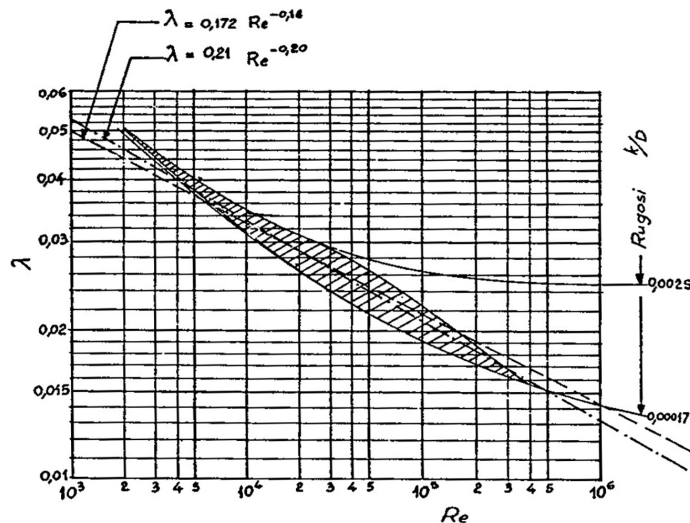


Fig. 5.4.
Zona de utilización
de las fórmulas
(5.33) y (5.34) para el
gas natural de Lacq
(tubo de acero de 20
 $\leq \phi \leq 300$ mm) (15
°C – 1.013 mbar)



La representación de dichas fórmulas en el diagrama de Moody muestra, para el gas natural de Lacq, que el mejor acuerdo corresponde a las fórmulas monomio, particularmente para $\lambda = 0,21 \text{ Re}^{-0,20}$.

En la práctica, los proyectos de redes de transporte o de suministro de gas, ya sean de un tipo o de otro, se realizan aplicando las normas y las instrucciones vigentes sobre la materia en los países donde se ejecutarán; no obstante, para calcular la pérdida de carga en las tuberías cabe la posibilidad de utilizar fórmulas como la siguiente:

$$J = 5 \cdot 10^6 \cdot \alpha \cdot 0,354^{(2-n)} \rho^{(1-n)} \mu^n \frac{TP_N}{T_N P} \frac{\dot{V}^{(2-n)}}{D_h^{(5-n)}} \quad (5.35)$$

Otra fórmula útil para el cálculo de la pérdida de carga lineal en el flujo de gases combustibles por tuberías, basada en la fórmula monomio de Renouard² para el valor de λ , se escribe:



$$J = \beta \frac{P_N}{P} \frac{\dot{V}_N^{1,8}}{D_h^{4,8}} \quad (5.36)$$

donde $\beta = 1,62 \cdot 10^5 \rho^{0,8} \mu^{0,2}$, \dot{V} se da en m^3/h en condiciones normales ($15^\circ C$ y 1.013 bar) y D en mm.

El producto $\beta \frac{P_N}{P}$ permite calcular la pérdida de carga teniendo en cuenta la presión de utilización P . La tabla 5.1 da los valores de dicho producto para los principales gases combustibles utilizados.

Tipo de gas	LACQ	Groningue	Aire Propanado 6,5	Aire Propanado 13,5	Aire Butanado 6,3	Butano	Propano	P (efectiva)	
$\rho(15^{\circ}\text{C})$ (kg/m ³)	0,697	0,782	1,41	1,59	1,47	2,46	1,89	<div>↓</div>	
$\mu(15^{\circ}\text{C})$ 10 ⁶ (Pa.s)	10,70	11,87	13,61	10,26	13,55	8,41	7,92		
β	12310	13770	22685	23600	23430	32155	25730		
$\beta \cdot \frac{P_n}{P}$			22510		23250			8	m i l i b a r e s
				23200				18	
	12100							20	
		13450						25	
						31300		28	
							24850	37	
						29000		112	
							22500	148	
	9500	10650				24850	20000	300	
	8250	9250				21550	17500	0.5	b a r e s
	6200	7000				16200	13000	1.0	
	5000	5600				13000	10500	1.5	
	4150	4650				10850	8700	2.0	
	3110	3500				8150	6500	3.0	
	2500	2800				6500	5200	4.0	
	2100	2350				5450	4500	5.0	
	1800	2000				4650	3800	6.0	

Tabla 5.1.
Valores de $\beta(P_N/P)$ en función de la presión efectiva P^3

(Ver [Se--])



5.3.2 Pérdidas de carga singulares

Las pérdidas de carga singulares se producen en las discontinuidades ocasionadas por los accesorios que están montados en sistemas de tubería: cambios de sección, codos, curvas, válvulas, entronques, etc.

Más adelante, se verá que las desviaciones en el comportamiento del flujo de gas compresible con respecto del mismo gas considerado incompresible se caracterizan por el valor del número de Mach $(M = V / \sqrt{\gamma RT})$, particularmente cuando se alcanza el estado crítico $(M = 1)$ y el flujo queda bloqueado.

Sin embargo, la mayoría de los fenómenos de flujo en la industria se producen con números de Mach inferiores a 0,2.

El cálculo de los flujos de gas con números de Mach bajos puede efectuarse suponiendo que el fluido se comporta como incompresible, excepto en sistemas que impliquen conducciones de gran longitud, en cuyo caso el sistema ha de subdividirse en secciones, en que los cambios de densidad representan solo un pequeño tanto por ciento. En este caso, para cada tramo de tubería o accesorio, se tomará el valor medio de la densidad del fluido en él.

Como es sabido, la pérdida de carga en un accesorio o singularidad se calcula mediante la expresión:

$$\Delta P_s = \zeta \rho \frac{V^2}{2} \quad (5.37)$$

donde ζ es el coeficiente de pérdida de carga singular sin efectos de compresibilidad y V es, en general, la velocidad de entrada en el accesorio.

En caso de que no puedan despreciarse los efectos de la compresibilidad, dicho coeficiente debe corregirse.

Según la ecuación 5.10 del subapartado 5.2.2, dicha corrección se expresa por un coeficiente K_e , de modo que $\Delta P_{sc} = K_e \cdot \Delta P_{si}$.

Los valores del factor de corrección se calculan por la fórmula dada en dicho subapartado o bien se toman de la figura 5.1.

Los valores de los coeficientes ζ para régimen de flujo incompresible se encuentran en las tablas, en los diagramas incluidos en los catálogos de accesorios o bien en manuales técnicos.^{4, 5 y 6} Hay que tener en cuenta que, en el caso de los accesorios instalados a corta distancia (inferior a seis diámetros hidráulicos), el modelo de flujo que llega a los accesorios sucesivos difiere del modelo utilizado para determinar los coeficientes de pérdida.

(Ver [Bg--], [Bg88], [As03] y [Mi88])



5.4 Fundamentos del proyecto de sistemas de conductos y tuberías para el transporte y la distribución de fluidos compresibles

En este apartado, se exponen los fundamentos para el cálculo de instalaciones de conductos para el transporte y la distribución de aire en sistemas de ventilación y/o acondicionamiento de aire, y de tuberías para el transporte y la distribución de gases.

En ambos casos, la instalación se compone de uno o múltiples conductos o tubos y de varios accesorios de conexión (codos, entronques, cambios de sección, etc.), así como de generación del flujo, su regulación y control (compresores, ventiladores, válvulas, reguladores, filtros, etc.).

Las instalaciones para el transporte y la distribución de aire, o de un gas asimilable a él, se denominan *de muy baja presión* o *de baja presión*; en ellas, los cambios de valor del volumen específico son despreciables, mientras que las instalaciones de transporte y distribución de gases combustibles o de uso industrial pueden ser *de media presión* o *de alta presión*, y en ellas los cambios de presión suponen cambios significativos del volumen específico. El flujo en los sistemas de transporte de gases es casi invariablemente transitorio; sin embargo, numerosos problemas de proyecto y de control operativo pueden resolverse suponiendo que el flujo es estacionario.

5.4.1 Proyecto de sistemas de conductos de ventilación, acondicionamiento de aire, evacuación y transporte de vapores, gases y humos

Los dos elementos básicos de una red de conductos son los nodos y los elementos de conexión de los nodos, que son los conductos o tuberías. Los nodos incluyen los puntos donde una tubería acaba o donde se reúnen dos o más elementos de conexión, o bien donde hay inyección o suministro de gas. El mapa de presión de la red de conducciones viene determinado por las presiones del nodo. Los accesorios del conducto, como son los codos, los entronques, las reducciones de sección, etc., se consideran nodos, mientras que los registros, las válvulas, los reguladores e, incluso, los ventiladores se consideran elementos de conexión de los nodos. Los nodos y los elementos de conexión han de identificarse por sus correspondientes relaciones presión-caudal.

Métodos de diseño

Los métodos de diseño de los sistemas de conductos de ventilación, acondicionamiento de aire, evacuación y transporte de vapores, gases y humos son:

- Método de idéntica fricción
- Método de recuperación de presión estática y
- Método T

De los tres métodos, el T, introducido por Tsal y otros,^{11 y 12} es el único método basado en la optimización. El método T encuentra los tamaños óptimos de conducto y el tipo-tamaño de ventilador para minimizar el coste del ciclo de vida del sistema.

En los sistemas diseñados por cualquiera de los métodos anteriores se deberán instalar registros, ya que el redondeo del tamaño de los conductos calculados y el efecto sobre



los cálculos de la pérdida de presión total del acoplamiento de los accesorios introducen errores de cálculo.

En particular, en los sistemas de acondicionamiento de aire, se debe analizar la generación de ruido y, donde se superen los límites que impone el reglamento, habrá que instalar conductos recubiertos, atenuadores del ruido.

Método de idéntica fricción

Por este método, los conductos se dimensionan de modo que produzcan una pérdida de presión idéntica por unidad de longitud. A título de ejemplo, en la figura incluida al final del capítulo, se muestra un diagrama de la pérdida de carga en mm de una columna de agua por metro de conducto circular de chapa de zinc o galvanizada.

El procedimiento para aplicar el método al diseño de un sistema de tubos, que incluye su equilibrio, comporta los pasos siguientes:

- Paso 1. Seleccionar el “camino crítico” como el ramal de mayor longitud entre el ventilador y los terminales.
- Paso 2. Asignar las pérdidas totales de presión a cada tramo del “camino crítico”, calculadas como el producto de la pérdida de presión por unidad de longitud del tubo, por su longitud real.
- Paso 3. Calcular las secciones transversales del “camino crítico” utilizando las pérdidas totales de presión asignadas previamente, y corregirlas, si es preciso, a fin de que se satisfagan las restricciones de velocidad y geométricas. En este paso, se ignoran las pérdidas de presión en los enlaces.
- Paso 4. Sumar las pérdidas de presión en el “camino crítico” y seleccionar un ventilador de modo que su característica caudal-presión coincida con la del camino crítico en un punto de funcionamiento de máximo rendimiento. El valor de la presión en dicho punto se denomina *presión raíz*.
- Paso 5. Asignar una presión total a cada nodo del camino crítico. Para lograr el equilibrio de presión, las presiones del nodo han de corresponder a las pérdidas de presión en los correspondientes tramos del ramal.
- Paso 6. Excluir los tramos que pertenecen al camino crítico y seleccionar el ramal más largo constituido con los tramos restantes. Este será el nuevo camino crítico y la presión en el nodo, su presión raíz.
- Paso 7. Calcular la pérdida total de presión por unidad de longitud del nuevo ramal como su presión raíz, dividida por la longitud. Esta pérdida de presión ha de ser mayor que la pérdida de presión inicial por unidad de longitud asumida para el camino crítico principal en el paso 2.
- Paso 8. Repetir el proceso de cálculo para el nuevo camino crítico, a partir del paso 2.
- Paso 9. Continuar este proceso hasta que se hayan calculado todas las secciones transversales de todos los tramos.

Después del dimensionado inicial, se calcula la pérdida total de presión de todos los tramos de conducto y, finalmente, se redimensionan las secciones del conducto a fin de equilibrar las pérdidas de presión en cada enlace.

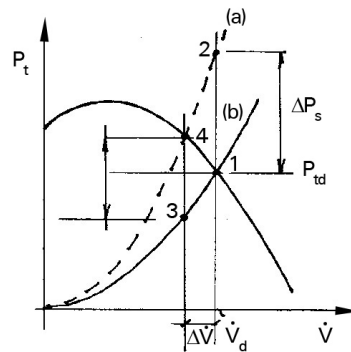


Fig. 5.5.
Interacción
ventilador-sis-
tema

Un problema relacionado con el paso 4 que requiere atención es la interacción ventilador-sistema. Si las condiciones de admisión y de descarga del ventilador en la instalación real difieren significativamente de las que se dieron en el ensayo del ventilador, que, según las normas, aseguran un flujo uniforme en la entrada y una recuperación eficaz de la presión estática en la salida, la prestación del ventilador puede verse reducida considerablemente. La figura 5.5 ilustra las consecuencias de la interacción ventilador-sistema.

En la figura 5.5, la curva (a) es la característica caudal-presión del sistema de conductos real, y la (b) es la característica calculada del sistema sin tener en cuenta el efecto de conexión ventilador-sistema.

La pérdida de presión debida al efecto conexión es ΔP_s , por lo cual se ha de añadir a la pérdida de presión del sistema para compensar el efecto de conexión ventilador-sistema.

Método de recuperación de la presión estática

Este método de dimensionamiento de los conductos se basa en la ecuación de Bernoulli como principio de transformación de la presión dinámica en presión estática. El objetivo de este método es obtener la misma presión estática antes y en cada ramal, o sea, el incremento de la presión estática en cada ramal ha de compensar la pérdida de presión por fricción en los tramos sucesivos del conducto. Este método aporta un medio conveniente para diseñar un conducto largo con varias derivaciones, de modo que en la entrada de cada ramal, en cada salida o en cada terminal exista la misma presión estática. Este método se aplica únicamente a los sistemas de suministro y su punto de partida es un parámetro arbitrario: la velocidad del fluido en el tramo raíz.

Sean P_1 y V_1 la presión y la velocidad del fluido en la entrada al enlace, y P_2, V_2 los valores correspondientes en la salida.

Despreciando el efecto chimenea, la relación entre las presiones estáticas en ambas secciones de flujo se expresa:

$$P_1 + \frac{V_1^2}{2} = \Delta P + P_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (5.38)$$

donde ΔP es la pérdida de presión total entre ambas secciones.



Como quiera que, según este método, P_1 ha de ser igual a P_2 , resulta:

$$\Delta P = \rho \frac{V_1^2}{2} - \rho \frac{V_2^2}{2} \quad (5.39)$$

Como ΔP se puede calcular, el tamaño del conducto inmediato corriente abajo que satisface la ecuación 5.39 se determina por iteración, teniendo en cuenta que la velocidad del fluido a su salida ha de ser inferior a la de entrada en el enlace. Las secciones de todos los tramos del sistema, salvo los terminales, se determinan por iteración, aplicando la ecuación 5.39. El tamaño del conducto de los tramos finales se determina mediante la ecuación 5.38, conocidos los requisitos de presión estática en el terminal. Si el componente terminal es un accesorio de salida, más que un registro o un difusor, la presión estática a la salida del terminal es cero.

Para iniciar el proyecto de un sistema de conductos de ventilación hay que seleccionar la máxima velocidad del fluido a la entrada al sistema, compatible con el nivel de ruido admisible, o bien a la salida del ventilador, si el circuito de impulsión es el dominante.

Tanto el método de idéntica fricción como el de recuperación de la presión estática tienen algunas deficiencias, como pusieron de manifiesto Tsal y Behls.¹³ Estos investigadores realizaron una revisión exhaustiva de los métodos existentes para el dimensionamiento de los conductos. Su análisis demostró que estos métodos, después de varias iteraciones, permiten seleccionar las secciones transversales de los conductos que han de suministrar el caudal requerido por cada terminal pero, sin embargo, no dejan seleccionar el sistema económicamente más eficiente.

Método T

Los cálculos del método T se basan en un caudal de aire constante a lo largo del año. A partir de este caudal, se determinan los tamaños del conducto, la pérdida de presión global del sistema y el coste de la energía requerida por el ventilador. El procedimiento de cálculo del método T consiste de tres etapas: condensación del sistema, selección del ventilador y expansión del sistema.

En la primera etapa, el sistema completo de conductos se condensa en un solo tramo de conducto para encontrar las relaciones de pérdida de presión óptimas utilizando características hidráulicas de sección. En la segunda etapa, se encuentra la pérdida de presión óptima del sistema. En la tercera etapa, la presión requerida por el sistema se distribuye entre sus secciones.

No importa cuál sea el método adoptado; siempre se requiere calcular la pérdida de presión, ya sea del conducto único, o bien, después, de cada sección o tramo del sistema.

Análisis de sistemas

Las pérdidas por fricción y dinámicas en cada sección de un sistema de conductos se calculan mediante la ecuación:

$$\Delta P_{t,i} = \Delta P_{f,i} + \sum_{j=1}^m \Delta P_{i,j} + \sum_{k=1}^n \Delta P_{i,k} - \sum_{r=1}^{\lambda} P_{ch,ir} \quad (5.40)$$



donde el subíndice i indica los diferentes tramos del sistema $i = 1, 2, 3, \dots, n_{u,p} + n_{d,p}$

Los diferentes términos de la ecuación 5.40 tienen el significado siguiente:

$\Delta P_{t,i}$	Cambio neto de presión total en el tramo i (Pa)
$\Delta P_{f,i}$	Pérdida de presión debida a la fricción en el tramo i (Pa)
$\Delta P_{i,j}$	Pérdida de presión total debida a j accesorios, incluyendo el efecto del acople del ventilador en el tramo i (Pa)
$\Delta P_{i,k}$	Pérdida de presión debida a los equipamientos k en la sección i (Pa)
$\Delta P_{ch,ir}$	Efecto chimenea debido a r chimeneas (conductos verticales o inclinados) en la sección i
m	Número de accesorios que se encuentran en el tramo i
n	Número de equipamientos que se encuentran en el tramo i
n_{dn}	Número de tramos de conducto corriente abajo del ventilador (subsistema de suministro de aire)
n_{up}	Número de tramos de conducto corriente arriba del ventilador (subsistema de evacuación/retorno del aire)
λ	Número de chimeneas en el tramo i

El efecto chimenea para cada conducto no horizontal, en que el aire tiene una densidad diferente de la atmosférica, viene determinado por la ecuación:

$$P_{ch} = g[\rho_a - \rho](z_2 - z_1) \quad (5.41)$$

Para determinar la presión total del ventilador requerida por un sistema, se aplica la ecuación siguiente:

$$P_{t,v} = \sum_{i \in F_{up}} \Delta P_{t,i} + \sum_{i \in F_{dn}} \Delta P_{t,i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_{up} + n_{dn} \quad (5.42)$$

donde F_{up} y F_{dn} son conjuntos de tramos de conducto corriente arriba y corriente abajo del ventilador, y el símbolo \in indica el enlace del tramo del conducto, dentro de los caminos del sistema, desde los terminales de evacuación/retorno de aire hasta los terminales de suministro.

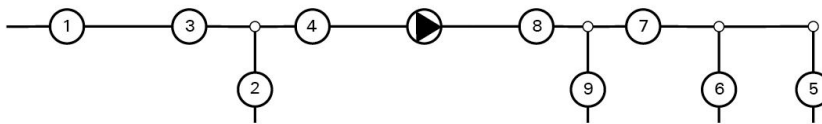


Fig. 5.6.
Esquema del circuito de ventilación

A título de ejemplo, la figura 5.6 ilustra la utilización de la ecuación 5.42 para el análisis de un simple sistema de ventilación que consta de tres terminales de suministro y dos de retorno, que dan lugar a seis caminos constituidos por un número diferente de tramos entre los nueve existentes. Los caminos son:

Camino I Tramos 1, 3, 4, 9, 7, 5 ; $P_t = \Delta P_1 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_7 + \Delta P_5$

Camino II Tramos 1, 3, 4, 9, 7, 6 ; $P_t = \Delta P_1 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_7 + \Delta P_6$

Camino III Tramos 1, 3, 4, 9, 8 ; $P_t = \Delta P_1 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_8$

Camino IV Tramos 2, 4, 9, 7, 5 ; $P_t = \Delta P_2 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_7 + \Delta P_5$

Camino V Tramos 2, 4, 9, 7, 6 ; $P_t = \Delta P_2 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_7 + \Delta P_6$

Camino VI Tramos 2, 4, 9, 8 ; $P_t = \Delta P_2 + \Delta P_4 + \Delta P_9 + \Delta P_8$

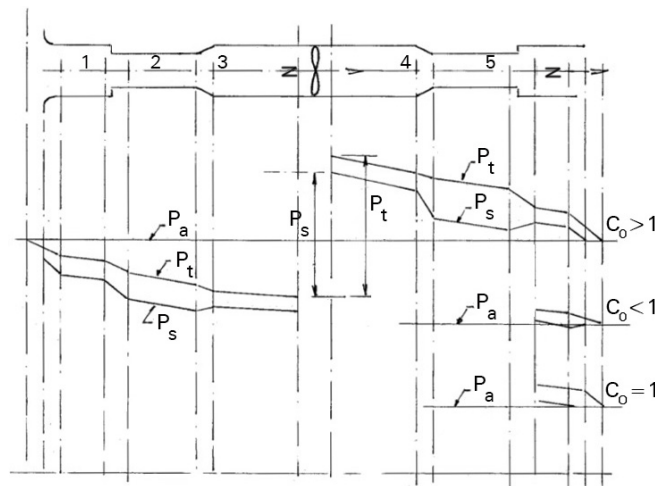
Definidos los caudales de aire del proyecto, se deben satisfacer las seis ecuaciones para que se cumpla la condición de equilibrio sin necesidad de instalar registros, que pueden generar un nivel de ruido inadmisibles.

Para obtener la presión estática requerida para el ventilador, conocida la presión total, se utiliza la ecuación:

$$P_s = P_t - P_{dv} \quad (5.43)$$

donde P_{dv} es la presión dinámica de la corriente en la boca de salida del ventilador.

Fig. 5.7.
Sistema de transferencia de aire entre recintos a presión atmosférica



A título de ejemplo, la figura 5.7 ilustra un sistema simple de transferencia de aire de un recinto a otro, ambos a la presión atmosférica, constituido por un conducto con varias singularidades de cambio de sección y un ventilador intermedio. En ella, se han trazado las líneas representativas de la evolución de la presión total del aire y de su presión estática a lo largo del conducto. La diferencia entre las presiones totales del aire en el oído de aspiración del ventilador y en su sección de descarga es la presión total que debe producir el ventilador.

(Ver ref. 9 y 10)



5.4.2 Cálculo de la pérdida de carga en los tramos del conducto y en los accesorios

Una vez definidos los tramos del sistema y los accesorios instalados en cada tramo, la pérdida de presión en cada uno de ellos se calcula mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$\text{Tramos sin efecto chimenea} \quad \Delta P = \left(\lambda \frac{L}{D_h} + \sum \zeta \right) \rho \frac{V^2}{2} \quad (5.44)$$

$$\text{Tramos con efecto chimenea} \quad \Delta P = \left(\lambda \frac{L}{D_h} + \sum \zeta \right) \bar{\rho} \frac{V^2}{2} + \bar{\rho}^2 V^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (5.45)$$

donde L es la longitud de conducto y D_h su diámetro hidráulico, ambos en metros; $\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ es la densidad media del aire en el tramo, en kg/m^3 ; V es la velocidad media del aire en la sección recta del conducto, en m/s ; ρ_1 y ρ_2 son las densidades del aire en el sentido de la corriente, que pueden ser $\rho_1 > \rho_2$ o $\rho_1 < \rho_2$ según si el aire se calienta en el sentido de la dirección de la corriente o se enfría.

El coeficiente de fricción λ se calcula por la fórmula de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{12\varepsilon}{3,7} \frac{1}{D_h} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (5.46)$$

o bien por la fórmula simplificada de Altshul, modificada por Tsal:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{12\varepsilon}{D_h} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (5.47)$$

donde Re se define en términos del diámetro hidráulico y de la velocidad V .

También se puede buscar en el diagrama de Moody, conocidos el número de Reynolds de la corriente y la rugosidad relativa del conducto, pues en él se representa:

$$\lambda = \lambda \left(Re, \frac{\varepsilon}{D_h} \right) \quad (5.48)$$

Por otra parte, $\sum \zeta$ representa la suma de coeficientes de pérdida de carga singular correspondientes a los accesorios instalados en el tramo. Los valores de estos coeficientes se encuentran en los catálogos de los suministradores de accesorios, o bien en los manuales técnicos.⁴

En cuanto al diámetro hidráulico, cabe recordar que es igual a cuatro veces el radio hidráulico, definido a su vez como el cociente entre el área de la sección recta del conducto y su perímetro. Así, para un conducto circular, el diámetro hidráulico es igual a su diámetro, pero para un conducto rectangular viene dado por la fórmula:

$$D_h = 1,3 \left[(ab)^{0,625} / (a+b)^{0,25} \right] \quad (5.49)$$

(Ver ref. 14 y 15)



Optimización del Método T

Una vez definido un sistema básico, cabe considerar su optimización. El método T, introducido por Tsal y sus colaboradores, es el único método de diseño de sistemas de conductos para el transporte y la distribución de aire o gases similares, basado en criterios de optimización para minimizar el coste del ciclo de vida del sistema.

La optimización del sistema se basa en la función objetivo $E = E_p(PWEF) + E_s$, donde E , que es el coste de funcionamiento y de adquisición del valor presente, incluye el coste del sistema E_s y el valor presente de la energía, que es el coste de la energía consumida el primer año E_p , afectado por el factor de escalonamiento de valor presente $PWEF$. La publicación de Tsal y otros¹² describe detalladamente el procedimiento de optimización de un sistema de caudal constante, y la de Kim, Spitler y Delahoussaye¹⁷ para un sistema de caudal variable (VAV).

En cualquier caso, dado que la diferencia entre las presiones del ventilador para un sistema optimizado y no optimizado es una pequeña parte de la demanda de energía, habitualmente se desprecia. Por tanto, la optimización concierne esencialmente a los conductos.

La optimización del sistema de conductos ha de tener en cuenta las restricciones siguientes:

- En cada nudo, se ha de satisfacer la ecuación de continuidad.
- En cada camino de flujo, la pérdida de presión total ha de ser igual a la presión total del ventilador. En cualquier unión, la pérdida de presión total a lo largo de todos los caminos que derivan de ella debe ser la misma, o sea, se ha de satisfacer la condición de equilibrio de presión.
- Dado que, en la práctica, los conductos se construyen en tamaños nominales distintos, cuyas dimensiones difieren algunos milímetros, la optimización debe considerar el redondeo de tamaño. Se ha de valorar si es mejor aumentar el tamaño del tramo, lo cual supone una disminución de la pérdida total de presión en él, o disminuirlo, lo cual implica un aumento de dicha pérdida de carga, pero una disminución del coste del tramo.

Elegido el tamaño del conducto conforme a las restricciones anteriores, es necesario comprobar que el nivel de ruido generado no supere los límites que la normativa impone.

(Ver [Ash01], [As03] y [Mi88])

(Ver ref. 7, 8 y 16)

5.5 Flujo estacionario de gas en redes de tuberías

Las redes de tuberías pueden ser de alta presión, en que los cambios de presión suponen cambios significativos del volumen específico, de media presión y de baja presión, en que dichos cambios son despreciables. El primer tipo incluye los sistemas de transporte por tubería a grandes distancias (gaseoductos), mientras que los otros dos son propios de redes de suministro de gas para el consumo industrial y doméstico.



5.5.1 Fundamentos del proyecto

Si bien las redes de transporte de gas, particularmente las de suministro industrial y doméstico, operan en régimen no estacionario, su proyecto se realiza considerando régimen estacionario con caudales correspondientes al consumo punta. Uno de los objetivos principales es determinar, en estas condiciones, la presión del gas en los nodos, estableciendo el *mapa de presiones* del sistema de distribución.

Los dos elementos básicos de una red de tuberías son los nodos y los elementos de conexión de los nodos (ECN). Los nodos incluyen los puntos donde una tubería acaba o donde se reúnen dos o más ECN, o bien donde hay inyección o suministro de gas. Los ECN más importantes son los tubos, las estaciones de compresión, los reguladores, las válvulas y los depósitos, en superficie o subterráneos, de almacenamiento de gas. Antes de construir el modelo de un sistema complejo es necesario establecer los modelos matemáticos de los ECN individuales. Estos modelos interrelacionan la presión con el caudal.

La ecuación característica del flujo de gas a alta presión en un tubo es:

$$P_1^2 - P_2^2 = 1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_N}{T_N} \right)^2 \bar{z} M \bar{T} \lambda \frac{L}{D_h^5} \dot{V}^2 \quad (5.50)$$

Por tanto, en condiciones normales, el caudal es:

$$\dot{V} = \left[\frac{P_1^2 - P_2^2}{1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_N}{T_N} \right)^2 \bar{z} M \bar{T} \lambda \frac{L}{D_h^5}} \right]^{1/2} = \left(\frac{P_1^2 - P_2^2}{K_1} \right)^{0,5} \quad (5.51)$$

En un tubo de baja presión, en que el gas se encuentra casi a la presión atmosférica, tenemos $\bar{z} = 1$ y

$$P_1^2 - P_2^2 = (P_1 + P_2)(P_1 - P_2) \cong 2P_N (P_1 - P_2) \quad (5.52)$$

Así, la ecuación 5.50 se simplifica del modo siguiente:

$$P_1 - P_2 = K_2 \dot{V}^2 \quad (5.53)$$

donde

$$K_2 = 0,975 \cdot 10^{-4} \frac{P_N}{T_N^2} M \bar{T} \lambda \frac{L}{D_h^5} \quad (5.54)$$

La modelización de un sistema de transmisión de gas comporta el cumplimiento de dos principios: el principio de continuidad y el principio de equilibrio de presión.

El primero se expresa por la ecuación de continuidad en cada nodo $\sum_{i=1}^m \dot{V} = 0$ (5.55)

donde m es el número de ECN que se reúnen en el nodo.

El principio de equilibrio de presión establece que la suma de las pérdidas de presión que se producen en los ECN que constituyen un bucle cerrado, tomadas con el signo que corresponde a un sentido adoptado de recorrido del bucle, es cero, es decir:



$$\sum_{i=1}^n (P_1^2 - P_2^2)_i = 0 \quad (5.56)$$

En la ecuación 5.56, n es el número de ECN que componen el bucle, y P_1 y P_2 son, respectivamente, las presiones del gas al principio y al final de cada tubo, extremos entendidos así con respecto al sentido del recorrido del bucle adoptado.

En las redes de distribución de gas de baja presión, se desprecia la compresibilidad del gas; por tanto, el principio de equilibrio de presión se escribe:

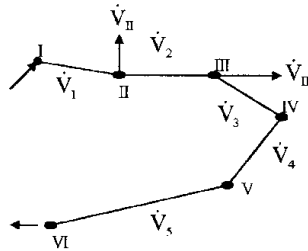
$$\sum_{i=1}^n (P_1 - P_2)_i = 0 \quad (5.57)$$

Los sistemas de transporte de gas se clasifican básicamente en dos tipos: sin mallas y mallados.

5.5.2 Análisis fluidodinámico de sistemas sin mallas

En un sistema sin mallas, los tubos no configuran bucles cerrados en ninguna parte. La figura 5.8 muestra el esquema de un hipotético sistema de tuberías sin mallas. El gas fluye del nodo I al nodo VI con descargas (entrada o salida de gas) en los nudos II y III.

Fig. 5.8.
Sistema de tuberías
sin mallas



Básicamente, los problemas que hay que analizar del sistema son dos:

- 1) Conocidas las características de los ECN y el caudal de gas que se transporta por cada uno de ellos, determinar la presión del gas en los extremos de cada tramo.
- 2) Conocidas la presión en entrada y de salida de la red, y los caudales de abastecimiento y de descarga de gas en los nudos intermedios de ella, determinar la máxima capacidad de transporte de gas en el extremo de descarga de la línea.

La relación entre las presiones en los extremos I y VI de la red se escribe:

$$P_1^2 = P_{VI}^2 + \sum_{i=1}^5 K_i \dot{V}_i^2 \quad (5.58)$$

En general, si el número de nudos es m , la presión en el nudo j es:

$$P_j^2 = P_m^2 + \sum_{i=j}^n K_i \dot{V}_i^2 \quad (5.59)$$



donde n es el número de ECN entre los nudos j y m .

La ecuación 5.59 resuelve el ejercicio 1.

La resolución del ejercicio 2 no es tan simple. La solución implica aplicar un método de aproximaciones sucesivas²² conforme a los pasos siguientes:

- Estimar el máximo caudal \dot{V}_1 en el primer tubo.
- Aplicando la ecuación de continuidad, encontrar, en una primera aproximación, los caudales \dot{V}_i en los tubos individuales.
- A partir de estos últimos, encontrar las pérdidas de presión en los tubos mediante la ecuación 5.50.
- Determinar las presiones de nodo que corresponden a los caudales \dot{V}_i calculados en la primera aproximación, mediante la relación:

$$P_j^2 = P_I^2 - \sum_{i=I}^{j-1} (P_i^2 - P_{i+1}^2) \quad (5.60)$$

donde $j = m$ es el número de los nodos.

Si el cuadrado de la presión final P_m difiere del valor del cuadrado de la presión final $P_{m(i)}$, calculado en primera aproximación, algo más que el error aceptado, entonces se han de corregir los caudales \dot{V}_i determinados en aproximación para los tubos individuales, utilizando la expresión: $\dot{V}_{i(2)} = \dot{V}_{i(1)} + \Delta \dot{V}$,

donde

$$\Delta \dot{V} = - \left\{ \left(P_m^2 - P_{m(1)}^2 \right) / 2 \sum_{i=1}^n K_i \dot{V}_i \right\} \quad (5.61)$$

El procedimiento se repite a partir del tercer paso, hasta que las presiones finales calculadas difieren de las prescritas solo en un valor igual o inferior al error admisible.

Si, en algún punto a lo largo de la tubería, está instalada una estación de elevación de presión, entonces la máxima capacidad de transporte de la tubería se calcula, según el método de Hain,²² como sigue:

- Los tres primeros pasos del método son idénticos a los descritos anteriormente.
- Conocidos el caudal de gas, la presión de la toma y la capacidad del compresor instalado, se puede determinar la presión de descarga del compresor en el nodo examinado.
- A partir de la presión de descarga del compresor y la pérdida de presión en los tubos individuales, se calcula la presión en el extremo de cola de la tubería.
- Si la presión calculada en el extremo de tubería difiere de la prescrita, se corrigen de nuevo los caudales en cada tubería utilizando la relación $\dot{V}_{i,2} = \dot{V}_{i,1} + \Delta \dot{V}$, donde:



$$\Delta V = - \left\{ \frac{P_m^2 - P_{m,1}^2}{2 \left(\frac{P_{2c} - P_{1c}}{\dot{V}_c} + \sum_{i=1}^n K_i \dot{V}_{i,1} \right)} \right\} \quad (5.62)$$

En la ecuación 5.62, P_{1c} , P_{2c} y \dot{V}_c son la presión en aspiración, la presión en descarga del compresor y su caudal, respectivamente.

Van den Hende²³ propuso un método gráfico simple y rápido para resolver problemas relacionados con los parámetros de caudal y presión en sistemas de transporte de gas. Por ejemplo, sea un gasoducto para el transporte de gas de masa molecular M y con un factor de compresibilidad media \bar{z} a la temperatura media \bar{T} , cuya longitud y cuyo diámetro hidráulico son L y D_h , respectivamente. Se supone que tanto z como λ , coeficiente de fricción, son constantes aun cuando, en realidad, son funciones de la presión y del caudal de gas.

El primer paso en la aplicación del método de Hende consiste en representar la familia de curvas del gasoducto considerado:

$$\Delta P = f(P_1)_{\dot{V}} \quad (5.63)$$

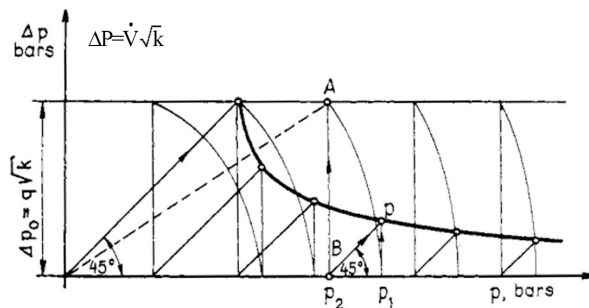
La figura 5.9 muestra las gráficas representativas de dicha función, definida explícitamente por la ecuación:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 - \sqrt{P_1^2 - K_1 \dot{V}^2} \quad (5.64)$$

donde

$$K_1 = 1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_N}{T_N} \right)^2 \cdot M \bar{T} \bar{z} \lambda \frac{L}{D_h^5} \quad (5.65)$$

Fig. 5.9.
Fuente ²³.



Los valores de λ y de z son realmente funciones de P y de \dot{V} ; no obstante, para realizar cálculos aproximados se les puede considerar constantes, lo cual permite simplificar la familia de curvas.

Van den Hende²³ desarrolló un procedimiento para el cálculo de K a partir de la función $K = CL$, donde el valor de C se encuentra tabulado en función del tamaño del



tubo D_h . Una vez determinado K , se pueden trazar, siguiendo un procedimiento gráfico, las curvas de la familia \dot{V} . El valor de P_0 viene dado por la ecuación 5.50, una vez aplicado $P_2 = 0$, es decir:

$$\Delta P_0 = \dot{V} \sqrt{K} \quad (5.66)$$

La representación de cualquier punto de la curva se realiza de manera similar a la determinación del punto de partida A.

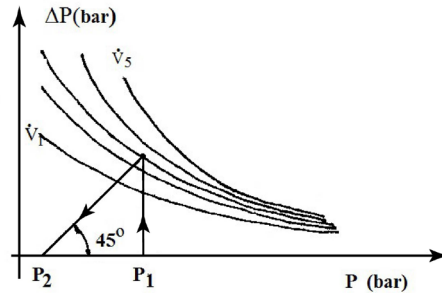


Fig. 5.10.
Gráfica
 $\Delta P = f(P)\dot{V}$
según Van den
Hende²³

Para determinar cualquier punto de esta curva, es válida la ecuación 5.53. Por ejemplo, está claro que la hipotenusa del triángulo OAB (v. figura 5.10) es precisamente igual a la abscisa del punto P y que en el triángulo se verifica:

$$P_1^2 = P_2^2 + k\dot{V}^2$$

Una vez se dispone de una familia de curvas caracterizada por un valor dado de k , se puede determinar cualquiera de los parámetros P_1 , P_2 , \dot{V} de la tubería, conocidos los otros dos.

5.5.3 Sistemas mallados

En la tabla 5.2, se resume la clasificación de las redes de tuberías de suministro de gas natural en función de la presión efectiva máxima de servicio. En las figuras 5.11 y 5.12, se muestra la morfología de una red mallada genérica y de una red ramificada arborescente.

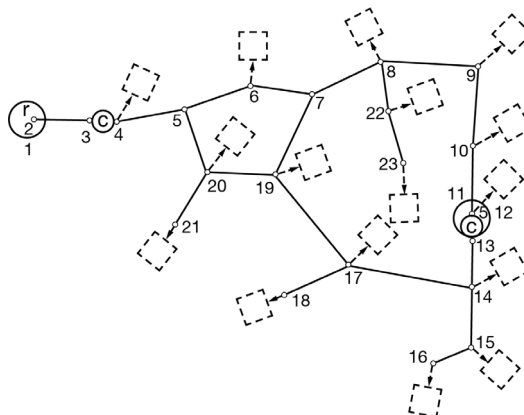
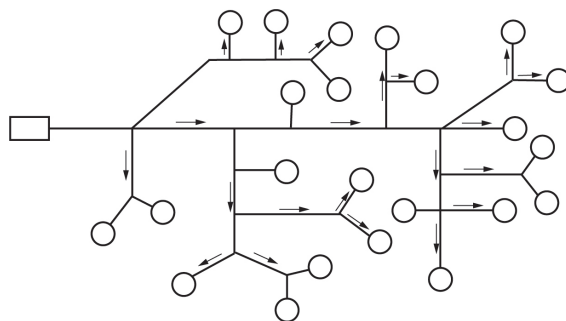


Fig. 5.11.
Red mallada genérica

Fig. 5.12.
Red ramificada



Las redes malladas de alta presión (por ejemplo, las redes de abastecimiento regional de gas) tienen una morfología como la que se ilustra en la figura 5.11.

Estas redes están constituidas, en general, por una estación de compresión, una instalación de regulación y control, un conjunto de tuberías entrelazadas mediante nodos, un depósito-acumulador y una serie de puntos de suministro (industrias, comunidades, etc.)

Tabla 5.2.
Clasificación de las
redes de tuberías de
suministro de gas
natural

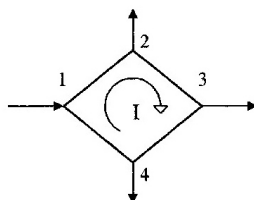
Red	Presión efectiva máxima de servicio
Baja Presión (BP)	$P < 0,05 \text{ bar}$
Media presión A (MPA)	$0,05 > P \leq 0,4 \text{ bar}$
Media presión B (MPB)	$0,4 < P \leq 16 \text{ bar}$
Alta presión A (APA)	$4 < P \leq 16 \text{ bar}$
Alta presión B (APB)	$P > 16 \text{ bar}$

El primer procedimiento para el modelado y/o el análisis de redes de suministro de gas a baja presión fue desarrollado por Cross²⁴ en 1936, y adaptado por Hain²² en 1968 para redes de alta presión, mediante la introducción de algunas modificaciones.

Cualquiera que sea el método de proyecto de red adoptado, todo bucle de la malla ha de satisfacer la ecuación de continuidad en los nodos y la de equilibrio de presión en cada bucle.

Sea, por ejemplo, el bucle que se muestra en la figura 5.13.

Fig. 5.13.
Bucle



En el nodo 1 se ha de satisfacer:

$$\sum_{i=1}^n \dot{V}_i = 0 \quad (5.67)$$

y, en la malla I:



$$\sum_{j=1}^p K_j (\dot{V}_{j,1} + \Delta \dot{V}) |\dot{V}_{j,1} + \Delta \dot{V}| = 0 \quad (5.68)$$

donde se ha supuesto que el caudal asignado en primera aproximación a la tubería j difiere del valor real en $\Delta \dot{V}$.

Un problema frecuente consiste en determinar los caudales que pasan por cada tubería del bucle y la presión en los nodos, conociendo los caudales de entrada y salida del bucle y la presión en el nodo de entrada P_1 .

El procedimiento de cálculo es el siguiente: Tomando como positivo el flujo en el sentido de giro de las agujas del reloj, se asigna a la tubería 1 un valor supuesto del caudal \dot{V}_1 como primera aproximación. Aplicando la ecuación de continuidad 5.67, se calculan los caudales en las demás tuberías.

A partir de estos caudales y del valor de K para cada tubería, calculados mediante la ecuación 5.65, se aplica la ecuación 5.68 con $\Delta \dot{V}$ igual a cero.

Si el resultado es distinto de cero, se entiende que el caudal supuesto en una primera aproximación para la tubería j , $\dot{V}_{j,1}$, difiere del real en $\Delta \dot{V}$. Si p es el número de tubos que configuran la malla, el factor de corrección $\Delta \dot{V}$ se calcula aplicando la ecuación siguiente:

$$\Delta \dot{V} = - \frac{\sum_{j=1}^p K_j |\dot{V}_{j,1}| \dot{V}_{j,1}}{2 \sum_{j=1}^p K_j |\dot{V}_{j,1}|} \quad (5.69)$$

siempre que $\Delta \dot{V} \ll \dot{V}_j$.

Calculado $\Delta \dot{V}$, se pueden determinar los valores de la segunda aproximación de los caudales de gas en las tuberías individuales:

$$\dot{V}_{j,2} = \dot{V}_{j,1} + \Delta \dot{V}$$

Si, después de la n -ésima aproximación, $\Delta \dot{V}$ es igual o inferior al margen de error admitido, entonces se da por finalizada la iteración y se calculan las presiones en los nodos, de acuerdo con las ecuaciones siguientes:

$$\text{Para una red de alta presión} \quad P_j^2 = P_1^2 - \sum_{i=1}^{j-1} K_i |\dot{V}_{i,k}| \dot{V}_{i,k} \quad (5.70)$$

donde los valores de K_i se calculan con el factor de la ecuación 5.65.

$$\text{Para una red de baja presión} \quad P_j = P_1 - \sum_{i=1}^{j-1} K_i |\dot{V}_{i,k}| \dot{V}_{i,k} \quad (5.71)$$

donde los valores de K_i se calculan con la ecuación 5.54.



Si el sistema (red) está compuesto por varias mallas, entonces, después de una estimación en una primera aproximación de los caudales en los tubos individuales, se calcula $\Delta\dot{V}$ para cada malla, y después se corrigen los caudales en cada tubo, malla tras malla. Los tubos comunes a dos mallas se corrigen utilizando los $\Delta\dot{V}$ determinados para ambas mallas, de acuerdo con sus correspondientes signos.

5.5.4 Método de Stoner

La ventaja principal del método de Cross es su simplicidad; su mayor inconveniente es la lentitud de convergencia. Con el fin de eliminar este inconveniente, Renouard² desarrolló una variante del método de Cross. El método de Renouard es apropiado para modelizar el funcionamiento en estado estacionario de redes malladas no demasiado complicadas. El método fue generalizado por Pernelle para redes de cualquier tamaño.

El método de Stoner²⁵ para resolver redes malladas se basa en la ecuación de continuidad del nodo. Tiene la ventaja de que aporta cualquier parámetro (tamaño de tubo, potencia requerida por el compresor, número de depósitos de almacenamiento, tamaño del regulador de presión, etc.) del sistema complejo, mientras que el método de Cross se puede utilizar únicamente para establecer mapas de caudal y de presión en la red. Sin embargo, es significativamente más complicado que los métodos anteriores y requiere mucha memoria y mucho tiempo de ordenador.

Sea la red representada en la figura 5.14. La elaboración del modelo de red comporta seleccionar un nodo, por ejemplo el 11, que recibe gas procedente de un depósito de almacenamiento y de la tubería 10-11, y suministra gas a la toma de un compresor (13-11) y al circuito de suministro de un consumidor acoplado directamente al nodo. La ecuación de continuidad aplicada a este nodo se escribe:

$$F_{11} = \dot{V}_{(12-11)d} - \dot{V}_{(13-11)c} + \dot{V}_{(10-11)t} - \dot{V}_{011} = 0 \quad (5.72)$$

donde los subíndices d , c , t se refieren, respectivamente, a depósito de almacenamiento, compresor y tubería, y \dot{V}_{011} es el caudal de gas que sale del nodo 11.

La medida de desequilibrio en el nodo es F_{11} ; su valor es cero si el nodo está equilibrado, eso es, si se satisface la condición $|F_j| < \varepsilon$, en que ε es el margen de tolerancia.

Introduciendo en la ecuación 5.72 las expresiones correspondientes en términos de presión, se obtiene:

$$F_{11} = J_{12-11} \left(|P_{12}^2 - P_{11}^2| \right) S_{12-11} - \frac{P_{13-11}}{K_3 \left(\frac{P_{13}}{P_{11}} \right)^{K_4} + K_5} + \frac{\left(|P_{10}^2 - P_{11}^2| \right)^{0.5}}{(K_1)_{10-11}^{0.5}} S_{10-11} - \dot{V}_{011} = 0 \quad (5.73)$$

donde J_{12-11} es un parámetro que caracteriza el flujo de gas desde el depósito de almacenamiento al tubo; K_3 , K_4 y K_5 son coeficientes con que se caracteriza el compresor;



K_1 es el factor conocido del flujo en el tubo, y S_{ij} es un factor de signo representativo de la dirección de flujo, definido así:

$$S_{i,j} \equiv \text{signo de } (P_i - P_j) = \begin{cases} +1 & \text{si } P_i > P_j \\ -1 & \text{si } P_i < P_j \end{cases} \quad (5.74)$$

Escribiendo de la misma forma n ecuaciones de continuidad para los n nodos del sistema, se obtiene un sistema de ecuaciones no lineal, que constituye el modelo matemático del sistema en estado estacionario.

Las ecuaciones contienen presiones de nodo, entradas/salidas de gas y los parámetros de los elementos que conectan el nodo, en total $(2n + m)$ parámetros, en que n es el número de nodos y m , el número de elementos que conectan nodos.

El modelo de n ecuaciones aporta la solución de cualesquiera n incógnitas de los $(2n + m)$ parámetros, si los restantes $(n + m)$ parámetros vienen dados. Estas ecuaciones se pueden escribir así:

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \text{ donde } j = 1, 2, \dots, n \quad (5.75)$$

El único criterio que se ha de satisfacer al elegir las n incógnitas que han de ser calculadas es que las ecuaciones de continuidad del tipo 5.73, escritas para los nodos, han de ser mutuamente independientes. Ya que el valor del caudal nodal de gas es independiente únicamente en $(n - 1)$ ecuaciones, hay que conocer al menos uno de los valores, $\dot{V}_{0,j}$. Por la misma razón, es necesario conocer una presión de nodo.

La solución del sistema no lineal de ecuaciones 5.75, que constituye el modelo matemático de la red, se puede obtener por el método de Newton-Raphson.

La esencia de este método es que aporta relaciones lineales para corregir los valores iniciales estimados de las incógnitas, de modo que los sucesivos pasos de iteración aseguren la convergencia hacia la solución.

Sea x_i el valor de la incógnita en el paso (i) , y $x_i^{(k)}$ su valor después del paso (k) de iteración; entonces:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}, \text{ donde } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.76)$$

En la ecuación 5.76, los términos de corrección Δx_i son aportados, a cada paso de iteración, por la solución del sistema lineal de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \Delta x_i = -F_j, \text{ donde } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.77)$$

En la ecuación 5.77, los factores $\partial F_j / \partial x_i$ son los valores de las derivadas de las ecuaciones de continuidad de nodo, tomados en las x_i , calculadas en el paso de iteración anterior.

El sistema lineal de ecuaciones 5.77 puede resolverse por eliminación directa. El método de Newton-Raphson requiere que estimar el valor inicial $x_i^{(1)}$ de las incógnitas



x_i . El comportamiento de convergencia de la iteración depende, a un nivel significativo, de la bondad de estas estimaciones, incluso en un sistema bastante sencillo. Stoner propone introducir el factor de aceleración α_i para asegurar una buena rapidez de convergencia.

La ecuación 5.76 se puede escribir en la forma: $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k+1)} \alpha_i$ (78)

El valor de α_i se puede expresar en términos de las correcciones Δx_i actual y precedente como sigue:

$$A_i = \frac{\Delta x_i^{(k+1)}}{\Delta x_i^{(k)}} \quad (79)$$

Si $A_i \leq -1$, entonces $\alpha_i = 0,5 A_i$

Si $-1 < A_i < 0$, entonces $\alpha_i = 1,0 - 0,5 |A_i|$

Si $0 < A_i < 1$, entonces $\alpha_i = 1,0 + 2,0 |A_i|$

Si $A_i \geq 1$, entonces $\alpha_i = 3$

En los dos primeros pasos de iteración, en los cuales lo más probable es que ocurra divergencia, es mejor poner $\alpha_i = 0,5$ para asegurar convergencia. En los pasos posteriores, los valores de α_i se determinan a partir de los valores de A_i dados por la ecuación 5.79.

Stoner^{26 y 27} propone un procedimiento, como desarrollo del método anterior, para determinar la sensibilidad del sistema en funcionamiento estacionario. En este caso, el propósito del cálculo es ver cómo algunos cambios en varios parámetros del sistema afectan los demás parámetros. Por ejemplo, qué cambios en los caudales y presiones de entrada, o bien de potencia de compresor, deben hacerse para satisfacer una variación de la demanda del consumidor. A grandes rasgos, el método propuesto puede explicarse del modo siguiente.

Sean y_i los n parámetros en cuyo cambio se está interesado, una vez que los otros m parámetros del sistema, denotados por x_i , ya han sido cambiados.

El sistema no lineal de ecuaciones del tipo 5.73 que constituye el modelo del sistema se puede escribir de esta forma:

$$F_j(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n; x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (5.80)$$

Un desarrollo en series de Taylor de la función F_j que prescinda de los términos de orden superior al primero conduce a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i = 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.81)$$

Cada uno de estos dos conjuntos de derivadas, $\partial F_j / \partial y_i$ y $\partial F_j / \partial x_i$, forma una matriz:



$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} ; \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Mediante estas identidades, la ecuación 5.81 se puede escribir:

$$[J]dy + [C]dx = 0, \text{ o sea } dy = -[J]^{-1}[C]dx \quad (5.83)$$

donde $[J]^{-1}$ es la matriz inversa de $[J]$. La matriz que resulta de la multiplicación $-[J]^{-1}[C]$ recibe el nombre de *matriz de sensibilidad del sistema*, equivalente a dy/dx , y es una medida del cambio en los parámetros y_i

Basta con establecer la matriz de sensibilidad una sola vez para poder determinar, mediante una simple multiplicación de matrices, el cambio en los parámetros y_i del sistema que resultan de cualquier cambio en los parámetros x_i , representados por el vector $\{\Delta x\}$;

$$\{\Delta y\} = \left[\frac{dy}{dx} \right] \{\Delta x\} \quad (5.84)$$

(Ver ref. 3, 18, 19, 20, 21, 25 y 26)

5.6 Métodos de simulación de redes de conductos de transporte y distribución de gases en régimen no estacionario

En el pasado, se han realizado muchos análisis del flujo no estacionario de los gases en las redes de distribución, en particular de aire y de gas natural, y se han propuesto varios modelos para el transporte del gas a grandes distancias y su distribución en redes de abastecimiento industrial y urbano, así como del aire en sistemas de ventilación y de acondicionamiento.

Entre las numerosas publicaciones sobre la materia, cabe destacar las de PSIG,²⁸ Banda y otros,²⁹ Herty y otros,³⁰ Osiadacz³¹ y Kim y otros.^{32 y 33} Paralelamente, se han propuesto métodos numéricos^{34 y 35} para la simulación de los varios modelos elaborados y para el diseño de instalaciones, que incluye no solo la determinación de la característica de caudal-presión en cualquier punto del sistema (FEA), sino también su implantación espacial (CAD). Estos métodos permiten a los ingenieros realizar cálculos que eran imposibles cuando se construyeron gran parte de las plantas e instalaciones actuales.

Como introducción al tema, se exponen los fundamentos de los modelos de flujo no estacionario de gas en gasoductos y redes de distribución, por una parte, y de aire en sistemas de ventilación y acondicionamiento, por otra.



El punto de partida del modelo de Banda, Herty y Klar²⁹ para describir el flujo no estacionario de gas son las ecuaciones de Euler-Bernoulli isotermas. Utilizando las propiedades de soluciones a los problemas de Riemann para estas ecuaciones, derivan condiciones de acoplamiento para intersecciones de múltiples tubos.

Para las redes de gas, estos autores suponen que las ecuaciones de Euler isotermas gobiernan la dinámica en cada tubo. A título de ejemplo, consideran que todos los tubos tienen un diámetro interior constante y que la celeridad de la onda acústica es constante y la misma en todos los tubos de la red, y suponen un coeficiente de fricción de estado estacionario que calculan utilizando la ecuación de Chen.³⁶

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7065} - \frac{5,0452}{Re} \log \left(\frac{1}{2,8257} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{0,8081 Re} \right) \right) \quad (5.85)$$

donde ε es la rugosidad de la tubería.

Finalmente, las ecuaciones que proponen para describir el flujo de gas en los tubos son las siguientes:

$$\partial_t \rho_j + \partial_x (\rho_j u_j) = 0 \quad (5.86)$$

$$\partial_t (\rho_j U_j) + \partial_x (\rho_j U_j^2 + a^2 \rho_j) = -\lambda \frac{\rho_j u_j |\rho_j u_j|}{2D \rho_j} \quad (5.87)$$

donde $a^2 = Z \tilde{R} T / \tilde{M}$.

Después, proponen unas condiciones de acoplamiento para las intersecciones tubo-tubo, y para simular el flujo en dichas intersecciones utilizan el procedimiento habitual: presión constante e igual en el interior de cada accesorio. De este modo, se simula el flujo en las principales partes de la red de tuberías.

Herty, Mohring y Sachers³⁰ proponen prácticamente el mismo modelo que el anterior mediante un análisis asintótico. Además del desarrollo del modelo, presentan unos resultados numéricos que ilustran la validez de su planteamiento y sus propiedades. Por otra parte, comparan el modelo con los existentes, en particular la aproximación SI-MONE y el modelo cuasiestático. Su aportación representa una mejora del esfuerzo de computación frente a los modelos tipo de ecuación isoterma y de Weymouth.

Para simular el flujo de aire en un sistema de conductos, se pueden utilizar varios métodos y programas de ordenador, pero no permiten conseguir por sí mismos un sistema de distribución de aire optimizado. El *ASHRAE Handbook* recomienda el método T, que integra el sistema de distribución de aire y el coste del ciclo de vida; sin embargo, este método no ha tenido buena aceptación, por varias razones.

Las publicaciones de Tim, Spitler y Delahoussage^{32 y 33} introducen un procedimiento de diseño óptimo de conductos para sistemas VAV para investigar la importancia de los flujos de aire variables en el diseño de los sistemas. En la parte 1, analizan el dominio de un problema de optimización de VAV para definir las características del problema y sugerir un procedimiento de optimización.

En la parte 2, desarrollan completamente el procedimiento de diseño de conductos de sistemas VAV y lo aplican a varios casos, con diferentes valores de los parámetros.



Después, analizan los resultados comparando algunos métodos de diseño de sistema de conductos, e investigan los efectos de varios factores que influyen en el diseño óptimo.

Los buenos diseños de sistemas de conductos, tanto desde el punto de vista de su flexibilidad como de su rendimiento energético, se pueden lograr únicamente utilizando extensos programas de simulación por ordenador, que resuelven los problemas de equilibrio del sistema basándose en el flujo másico más que en el flujo volumétrico. Estos programas requieren disponer de amplias librerías de datos sobre accesorios y rugosidad de los conductos.



Ejercicios

Ejercicio 1

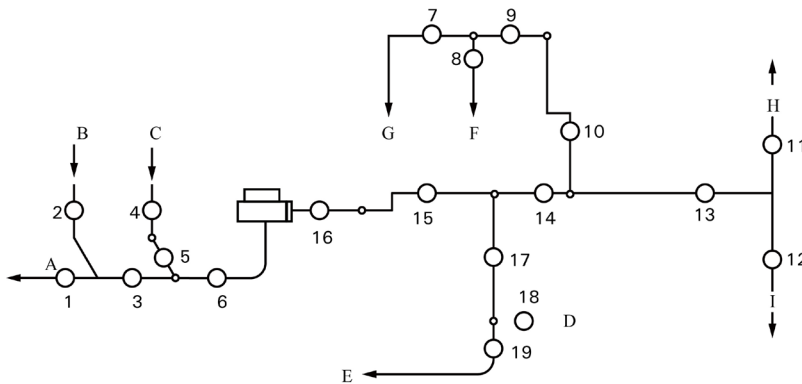
Sea el sistema de conducción y distribución de aire representado en la siguiente figura. Las longitudes y los diámetros de los diferentes tramos de conducto, el caudal y el número de Reynolds de la corriente en cada uno de ellos se indican en la tabla I.

El estado del aire atmosférico es $T = 288\text{ K}$, $P = 1,8 \cdot 10^5\text{ Pa}$

La viscosidad cinemática es $\nu = 1,462 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$

Determina la potencia requerida por el ventilador suponiendo un rendimiento de $\eta = 0,75$

Todos los conductos y accesorios son de chapa de hierro galvanizada. Su rugosidad equivalente de arena es $\varepsilon = 9,14 \cdot 10^{-4}\text{ m}$.



Resolución

A partir de los datos de la tabla I, se calcula el número de Reynolds $Re = D_h V / \nu$, con $V = 4\dot{V} / \pi D_h^2$, y ε / D_h de los cuales dependen los coeficientes de fricción en los conductos λ y en los accesorios ζ .

Para calcular dichos coeficientes, se supone que los efectos de compresibilidad del aire son despreciables, lo cual se deberá comprobar posteriormente, de modo que se adoptan los valores del flujo incompresible. Para el cálculo del coeficiente de fricción en los conductos, se utiliza la fórmula:

$$\lambda = 0,25 / \left[\log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2$$

cuya precisión es similar a la de la fórmula de Colebrook-White y tiene la ventaja que permite el cálculo directo de λ . Los valores de ζ se toman de los manuales de los suministradores de los accesorios. Los resultados del cálculo de λ se muestran en la tabla 1.



A partir de los valores calculados de λ , la pérdida de presión del fluido en cada tramo de tubería se calcula mediante la ecuación $\Delta P_{tr} = \lambda \frac{L}{D_h} \rho \frac{V^2}{2}$, con

$\rho(15^\circ) = 1,229 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Los resultados se muestran en la tabla en función de la velocidad calculada, considerando que todos los tubos son de sección recta circular. En realidad, los conductos son de sección recta rectangular o cuadrada pero, para simplificar la determinación de las pérdidas singulares, se consideran de sección recta circular.

Para elegir el circuito que se utiliza para calcular la potencia absorbida por el ventilador, procede calcular, en primer lugar, las pérdidas en los conductos (sin tener en cuenta los accesorios que les corresponden) que constituyen los diferentes circuitos del sistema, que son:

A-Vent-D, A-Vent-E, A-Vent-F, A-Vent-G, A-Vent-H, A-Vent-I, y análogamente para las admisiones B y C.

En los ramales de aspiración, se tiene: $\sum_{A-V} \Delta P_{tr} = 26,16 + 59,72 + 43,39 = 129,27 \text{ Pa}$

$$\sum_{B-V} \Delta P_{tr} = 95,87 + 59,72 + 43,39 = 198,98 \text{ Pa}$$

$$\sum_{C-V} \Delta P_{tr} = 0,01 + 73,65 + 43,39 = 117,05 \text{ Pa}$$

En los ramales de impulsión, se tiene:

$$\sum_{V-D} \Delta P_{tr} = 123,65 + 247,28 + 3,18 + 0,0056 = 374,11 \text{ Pa}$$

$$\sum_{V-E} \Delta P_{tr} = 123,65 + 247,28 + 3,18 + 0,0021 = 374,11 \text{ Pa}$$

$$\sum_{V-G} \Delta P_{tr} = 123,65 + 247,28 + 1,094 + 1,087 + 0,406 + 0,263 = 373,78 \text{ Pa}$$

Tanto en aspiración como en impulsión, a las pérdidas de presión continuas calculadas se han de añadir las pérdidas de presión debidas a los accesorios, comprendidas las de toma.

Los otros recorridos se calculan de idéntica manera. Como quiera que tanto en aspiración como en impulsión todos los circuitos del sistema han de dar lugar el mismo incremento de presión en el ventilador, pues las condiciones atmosféricas de los recintos en que se aspira y en que se impulsa el aire son las mismas, dicho incremento se determina aplicando Bernoulli entre los puntos A y E.

La ecuación se escribe:

$$\Delta P_{vt} = \sum_{V-E} \Delta P_{tr} + \sum_{V-E} kV^2 - \left[- \left(\sum_{A-V} \Delta P_{tr} + \sum_{A-V} kV^2 \right) \right] + P_{dV} \quad (1)$$

Los accesorios montados en el circuito de aspiración son los siguientes: toma de aire abocinada (0,3 m); dos válvulas de mariposa, ambas de 0,3 m de diámetro; un difusor



cónico de 0,3 m a 0,43 m de diámetro, y un codo de 0,65 m de radio de curvatura y 0,43 m de diámetro. Los accesorios montados en el circuito de impulsión son los siguientes: un cono difusor de 0,25 m a 0,34 m de diámetro; una derivación en T 0,34/0,38; dos válvulas de mariposa de 0,38 m y 0,34 m de diámetro, respectivamente; un codo de 0,38 m de diámetro y 0,76 m de radio de curvatura, y un ensanchamiento brusco de 0,38-1,12 m de diámetro.

Las pérdidas producidas por estos accesorios se calculan mediante la fórmula

$$\Delta P_{si} = \zeta_i \rho \frac{V_i^2}{2}, \text{ donde los coeficientes de pérdida se obtienen de [Id75] y [Mi88]. En}$$

la tabla II, se muestran los detalles del cálculo de las pérdidas singulares.

Tabla 1

Nº	Long.(m)	Dh(m)	Caudal(m³s⁻¹)	Re/10⁵	ε/D_h	λ	$V(m.s^{-1})$	$\Delta P_{tr}(Pa)$
1	4,60	0,30	0,717	2,08	0,00305	0,0270	10,14	26,16
2	18,40	0,20	0,233	1,01	0,00457	0,0308	7,42	95,87
3	6,00	0,30	0,95	2,75	0,00305	0,0269	13,44	59,72
4	1,50	1,20	0,943	2,15	0,00076	0,0200	0,834	0,01
5	16,80	0,35	0,943	1,99	0,00261	0,0260	9,80	73,65
6	9,00	0,43	1,893	3,83	0,00213	0,0244	13,035	43,39
7	4,25	0,50	0,283	1,55	0,00183	0,0243	1,44	0,263
8	1,20	0,50	0,283	1,55	0,00183	0,0243	1,44	0,074
9	7,60	0,67	0,567	2,06	0,00137	0,0225	1,608	0,406
10	13,70	0,62	0,567	2,38	0,00149	0,0227	1,878	1,087
11	3,00	0,50	0,475	2,59	0,00183	0,0238	2,419	0,513
12	6,70	0,50	0,475	2,59	0,00183	0,0238	2,419	1,146
13	10,70	0,59	0,95	4,29	0,00156	0,0226	3,475	3,043
14	4,60	0,73	1,517	4,55	0,00126	0,0215	3,625	1,094
15	12,20	0,34	1,893	4,85	0,00269	0,0258	20,85	247,28
16	6,10	0,34	1,893	4,85	0,00269	0,0258	20,85	123,65
17	6,70	0,38	0,377	0,864	0,00240	0,0266	3,324	3,18
18	1,53	0,77	0,188	0,212	0,00119	0,0282	0,403	0,0056
19	3,65	1,13	0,188	0,145	0,00081	0,0297	0,188	0,0021

Tabla 2

Toma 0,5 ^φ -0,3 ^d	Valv 0,3 ^φ	Valv 0,3 ^φ	Dif 0,3 ^φ /0,43 ^d $\alpha=10^5$ Re= 3,83.10 ⁵	Cod 0,43 ^φ /0,65 ^φ	Dif 0,30 ^φ / 0,34 ^φ	Un.T 0,34 ^φ / 0,38 ^φ	Valv 0,38 ^d	Valv 0,34 ^φ	Cod 0,38 ^φ , 0,76 ^r	Ens. Brsc 0,38 ^φ / 1,12 ^φ	
0,03	0,6	0,6	0,209	0,233	0,209	1	0,6	0,6	0,233	0,264	ζ
10,14	10,14	13,4	9,80	13,04	20,85	3,324	2,071	3,324	0,403	3,324	V (m/s)
1,895	37,90	66,6	12,33	24,35	55,83	6,79	1,58	4,07	0,023	1,79	ΔP (Pa)
102,82	0,00	0,00	-45,39	0,00	282,47	267,9	0,00	0,00	0,00	11,0	$\frac{\Delta V^2}{(m^2/s^2)}$
63,18	0,00	0,00	-27,89	0,00	-97,59	-58	0,00	0,00	0,00	-6,77	$\frac{\Delta P}{(Pa)(\Delta V^2)}$



Dando a las magnitudes de la ecuación 1 los valores calculados mostrados en las tablas I y II, resulta:

$$\Delta P_{vt} = 374,11 - 92,28 + 129,67 + 178,36 + 913,87 = 1.503,73$$

La potencia requerida por el ventilador es: $W = \Delta P_{vt} V / \eta = 1.503,73 \cdot 1,893 / 0,75$

$$W = 3.795,4 \text{ w}$$

(Ver [Ash01])

Ejercicio 2

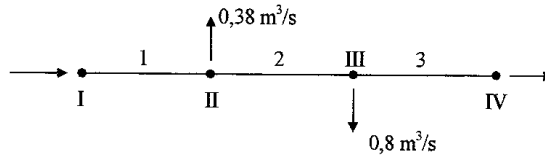
Sea la tubería entre los nudos I y IV que se ilustra en la figura. Conocidos los parámetros del flujo en los tubos desde 1 a 3 y la presión final prescrita en el nudo IV ($P_{IV}=18$ bar), determina la presión de entrada P_I necesaria para asegurar los caudales prefijados, y la presión final prescrita, y halla las presiones en los nudos.

Resolución

Los valores de K_i se han calculado por la expresión:

$$K_i = 1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_n}{T_n} \right)^2 \frac{\text{Im} \bar{T} \bar{z} \bar{\lambda}}{d_i^5}$$

y los caudales mediante la ecuación de continuidad $\sum_{i=1}^m \dot{V}_i = 0$.



Partiendo del nudo IV, se ha de verificar:

$$P_j^2 = P_{IV}^2 + \sum_{i=j}^3 K_i \dot{V}_i^2$$

Los resultados de cálculo se muestran en la tabla siguiente:

Nudo	Tub.	K_i $10^{10} \frac{N^2 \cdot s^2}{m^{10}}$	\dot{V}_j m^3/s	\dot{V}_i m^3/s	$K_i \dot{V}_i$ $10^{10} \frac{N^2 \cdot s}{m^7}$	$K_i \dot{V}_i^2$ $10^{10} \frac{N^2}{m^4}$	P_j^2 $10^{10} \frac{N^2}{m^4}$	P_j $10^5 \frac{N}{m^2}$
I			+2,38				3.008,5	54,9
II	1	249,0	-0,38	2,38	592,6	1.410,4	1.598,1	40,0
III	2	145,0	-0,80	2,00	290,0	580,0	1.018,1	31,9
IV	3	482,0	-1,20	1,20	578,4	694,1	324	18,0

(Ver [Vi15])



Ejercicio 3

Considérese de nuevo la tubería del ejemplo 1. El problema es algo más complicado si, fijadas la presión en la entrada, P_I , y la salida, P_{IV} , se ha de determinar el máximo caudal de gas que se puede asegurar en el extremo de la línea, conocidos los caudales derivados en los nudos II y III.

Resolución

La solución implica la aplicación de un procedimiento de aproximaciones sucesivas (Hain, 1968), conforme a los pasos siguientes:

- (i) Estimar el máximo caudal $\dot{V}_1^{(1)}$ en la primera tubería.
- (ii) A partir de la ecuación de continuidad, encontrar en primera aproximación los caudales $\dot{V}_i^{(1)}$ de las tuberías individuales.
- (iii) A partir de estos últimos valores, hallar las pérdidas de presión en los tubos.
- (iv) Utilizando la relación $P_j^2 = P_1^2 - \sum_{i=1}^{j-1} (P_1^2 - P_2^2)_i$; $j = II, III, \dots, m$ donde m es el número de nodos, encontrar las presiones en los nodos que corresponden a los $\dot{V}_i^{(1)}$ calculados en la primera aproximación.
- (v) Si el cuadrado de la presión final, P_m , se desvía de su valor en la primera aproximación $P_m^{(1)}$ en más que el error permitido, entonces los caudales calculados en el paso (ii) para los tubos individuales deben corregirse aplicando la expresión $\dot{V}_i^{(2)} = \dot{V}_i^{(1)} + \Delta \dot{V}$,

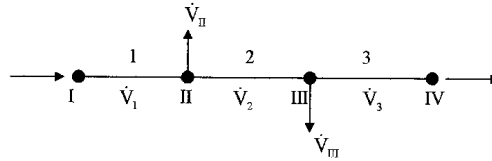
$$\text{Donde } \Delta \dot{V} = - \frac{(P_m^2 - P_m^{(1)2})}{2 \sum_{i=1}^n K_i \dot{V}_i}$$

- (vi) Se repite el procedimiento a partir del paso (iii) hasta que las presiones finales prescrita y calculada difieren solo en la tolerancia prescrita.

A título de ejemplo, sea la tubería cuyo esquema se muestra en la figura 1. Se conocen los caudales de gas extraídos en los nudos II y III, y los parámetros que caracterizan la pérdida de presión por caudal unidad en cada tubería (K_i). Halla el caudal máximo de gas en el nudo IV sabiendo que la presión en la entrada es $P_I = 55$ bar y en el nudo IV, $P_{IV} = 16$ bar.

$$K_i = 1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_n}{T_n} \right)^2 \frac{l \cdot M \cdot \bar{T} \cdot \bar{z} \cdot \bar{\lambda}}{d_i^5}$$

$$K_1 = 249 \cdot 10^{10} \left(\frac{N^2 \cdot s^2}{m^{10}} \right) ; K_2 = 145 \cdot 10^{10} ; K_3 = 482 \cdot 10^{10}$$



1ª iteración $\dot{V}_I^{(1)} = 2,45 \text{ m}^3 / \text{s}$

Nudo	Tub.	K_i	\dot{V}_j	$\dot{V}_i^{(1)}$	$K_i \cdot \dot{V}_i^{(1)}$	$K_i \cdot \dot{V}_i^{(1)2}$	P_j^2	P_j	P_{IV}
I							$3.025 \cdot 10^{10}$	$55 \cdot 10^5$	
II	1	$249 \cdot 10^{10}$		2,45	$610,05 \cdot 10^{10}$	$1.494,62 \cdot 10^{10}$	$1.530,38 \cdot 10^{10}$		
III	2	$145 \cdot 10^{10}$	-0,38	2,07	$300,15 \cdot 10^{10}$	$621,31 \cdot 10^{10}$	$909,07 \cdot 10^{10}$		
IV	3	$482 \cdot 10^{10}$	-0,8	1,27	$612,14 \cdot 10^{10}$	$777,42 \cdot 10^{10}$	$131,65 \cdot 10^{10}$	$11,47 \cdot 10^5$	$16 \cdot 10^5$

$$\Sigma 1.522,34$$

$$\Delta \dot{V} = - \frac{(P_{IV}^2 - P_{IV}^{(1)2})}{2 \sum_{i=1}^3 K_i \cdot \dot{V}_i} \rightarrow \Delta \dot{V} = - \frac{(16 \cdot 10^5)^2 - (11,47 \cdot 10^5)^2}{3044,68 \cdot 10^{10}} \cong -0,0409$$

2ª iteración $\dot{V}_I^{(2)} = 2,41 \text{ m}^3 / \text{s}$

\dot{V}_j	$\dot{V}_i^{(2)}$	$K_i \cdot \dot{V}_i^{(2)}$	$K_i \cdot \dot{V}_i^{(2)2}$	P_j^2	P_j
				$3.025 \cdot 10^{10}$	$55 \cdot 10^5$
	2,41	$600,1 \cdot 10^{10}$	$1.446,2 \cdot 10^{10}$		
-0,38				$1.578 \cdot 10^{10}$	$39,7 \cdot 10^5$
	2,03	$296,2 \cdot 10^{10}$	$601,2 \cdot 10^{10}$		
-0,8				$977,6 \cdot 10^{10}$	$31,3 \cdot 10^5$
	1,23	$592,9 \cdot 10^{10}$	$729,2 \cdot 10^{10}$		
				$248,4 \cdot 10^{10}$	$15,76 \cdot 10^5 \cong 16 \cdot 10^5$

$$\Sigma 1.489,2 \cdot 10^{10}$$

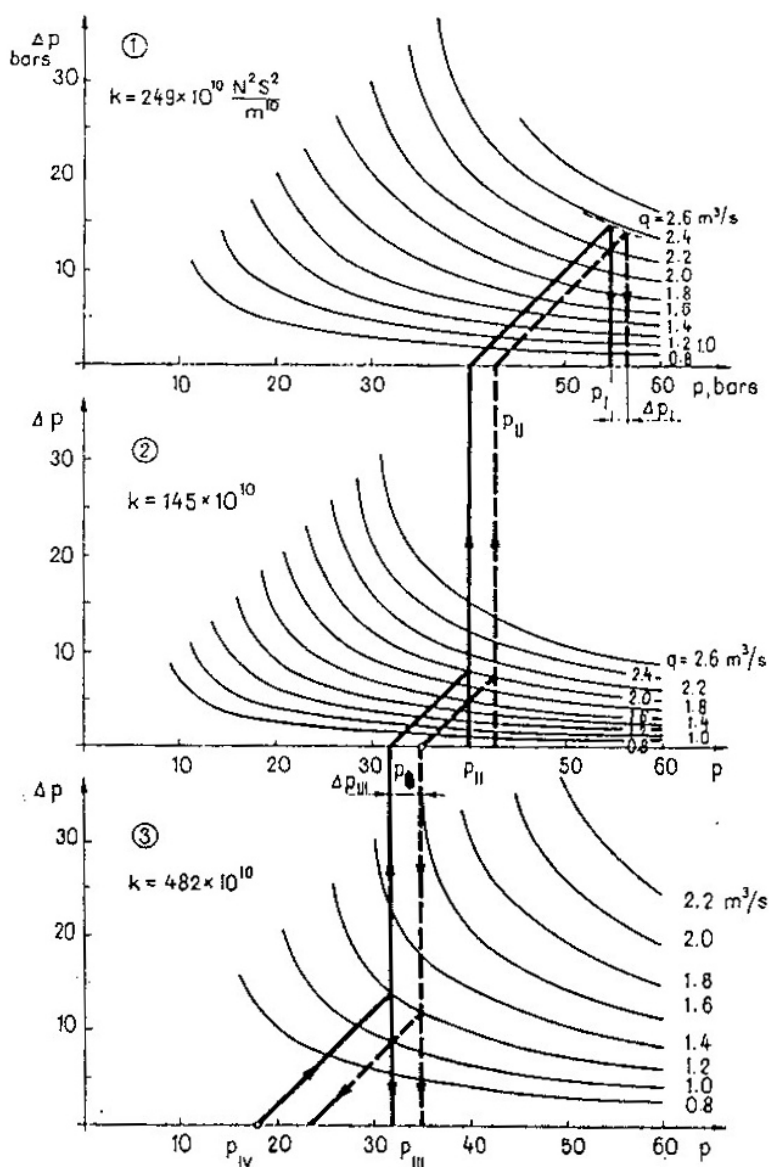
$$\Delta \dot{V} = - \frac{\left\{ (16 \cdot 10^5)^2 - (15,76 \cdot 10^5)^2 \right\}}{2 (1489,2 \cdot 10^{10})} = -0,00256 \quad (Final)$$

$$\dot{V}_{IV,max} = 1,23 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

(Ver [Vi15])

**Ejercicio 4**

En la tubería caracterizada anteriormente, se desea elevar la presión en el nudo III de 31,3 a 35 bar. ¿Cuál es el incremento de presión requerido en la entrada y cuáles serán los valores de presión en los nudos II y IV?

Resolución

(Ver [Vi15])



Ejercicio 5

En la figura, se muestra el esquema en planta de una red de distribución de gas natural. Las dimensiones, la longitud y el diámetro de las tuberías de la red y los caudales de gas en los nudos se indican en la tabla I. Además, la presión efectiva del gas en el nudo A es de 3.300 Pa. Calcula el caudal de gas que pasa por cada una de las tuberías individuales y las presiones en los nodos.

Resolución

Para de calcular las caídas de presión en cada tubería, se utilizará la expresión:

$$\Delta P_i = K_i \cdot |\dot{V}_i| \cdot \dot{V}_i$$

tomando para K_i la ecuación:

$$K_i = 0,975 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{P_n}{T_n^2} \cdot \frac{L_i}{D_i^5} \cdot M < T \lambda >$$

con $P_n = 1,014 \cdot 10^5$ (Pa), $T_n = 288,2$ (K), $M = 16,03$ (kg/kmol) y $T = 283$ (K). Y para λ se toma la ecuación de Weymouth:

$$\lambda = \frac{0,009407}{(D_i)^{1/3}}$$

Al aplicar el método de Hardy Cross, se considerará que cada malla está equilibrada si $\left| \sum \Delta P_i \right| \leq 5 \text{ Pa}$

Nudo	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Caudal m ³ /h	1.200	60	220	200	300	80	40	140	160

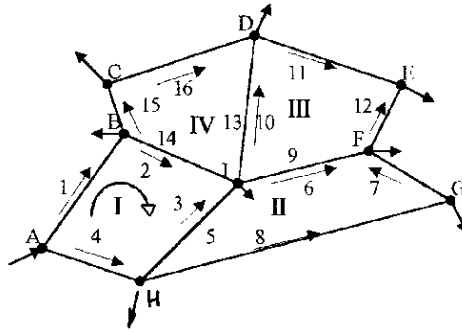
La red se considera de baja presión, o sea: $P_1 - P_2 = K \cdot \dot{V}^2$

$$\Delta \dot{V} = \frac{\sum_{i=1}^n K_i |\dot{V}_i| \dot{V}_i}{2 \left| \sum_{i=1}^n K_i \dot{V}_i \right|}$$

En caso de redes de alta presión:

$$P_1^2 - P_2^2 = K_1 \dot{V}^2$$

$$K_1 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \tilde{R}} \left(\frac{P_n}{T_n} \right)^2 \frac{L \cdot \tilde{M} \cdot < T_2 \lambda >}{D_i^5} \cong 1,95 \cdot 10^{-4} \left(\frac{P_n}{T_n} \right)^2 \frac{L \cdot \tilde{M} \cdot < T_2 \lambda >}{D_i^5}$$



Malla	Tbr	D_i m	L_i m	K_i $10^4 \frac{N \cdot s^2}{m^8}$	$\dot{V}_i(1)$ $10^{-2} \frac{m^3}{s}$	$K_i \dot{V}_i $ $10^4 \frac{N \cdot s}{m \cdot s}$	ΔP_i $\frac{N}{m^2}$	$\Delta \dot{V}$ $10^{-2} \frac{m^3}{s}$	$\dot{V}_i(2)$ $10^{-2} \frac{m^3}{s}$
I	1	0,3071	450	0,124	19,444	0,0241	46,87		19,192
	2 (14)	0,1541	420	4,5759	5,556	0,2542	141,23		4,076
	3 (5)	0,1541	370	4,0311	-5,556	0,224	-124,42		-6,298
	4	0,2489	280	0,1917	-13,889	0,0266	-36,99		-14,141
Σ						0,5289	26,7	0,252	
II	5(3)	0,1541	370	4,0311	5,556	0,224	124,44		6,298
	5(9)	0,1023	290	28,087	5,556	1,5604	866,89		3,846
	7	0,1023	240	23,245	-3,333	0,7748	-258,27		-2,843
	8	0,1023	660	63,923	-4,444	2,841	-1262,7		-3,954
Σ						5,4002	-529,64	-0,49	
III	9(6)	0,1023	290	28,087	-5,556	1,5604	-866,89		-3,846
	10(13)	0,1541	480	5,2296	1,111	0,0581	6,46		2,083
	11	0,1023	480	46,489	1,667	0,7748	129,14		3,867
	12	0,1023	220	21,308	-6,667	1,4205	-947		-4,466
Σ						3,8138	-1678,3	-2,2	
IV	13(10)	0,1541	480	5,2295	-1,111	0,0581	-6,46		-2,083
	14(2)	0,1541	420	4,5759	-5,556	0,2542	-142,23		-4,076
	15	0,3071	180	0,0496	12,22	0,0061	7,41		13,45
	16	0,2051	500	1,1859	6,111	0,0725	44,29		7,339
Σ						0,3909	-95,94	-1,228	

En este primer cálculo, $\left| \sum \Delta P_i \right|$ en todas las mallas supera 5 Pa. Por consiguiente, se ha de iterar:



Resultados finales después de ocho iteraciones.

Malla	Tbr	D _i	L _i	$10^{-2} \frac{m^3}{s}$	$\dot{V}_i (8)$ $10^{-2} \frac{m^3}{s}$	P _i (8) (Pa)	P _e (Pa)	P _s (Pa)
I	1	0,3071	450	0,124	20,96	54,47	3300	3246
	2 (14)	0,1541	420	4,5759	4,532	93,98	3246	3152
	3 (5)	0,1541	370	4,0311	-5,486	-121,3	3152	3273
	4	0,2489	280	0,1917	-12,373	-29,35	3273	3302
Σ						-2,2		
II	5(3)	0,1541	370	4,0311	5,486	121,3	3273	3152
	5(9)	0,1023	290	28,087	4,353	532,14	3152	2619
	7	0,1023	240	23,245	-1,888	-82,81	2619	2702
	8	0,1023	660	63,923	-2,999	-574,75	2702	3277
Σ						-4,12		
III	9(6)	0,1023	290	28,087	-4,353	-532,14	2619	3152
	10(13)	0,1541	480	5,2296	1,22	7,79	3152	3144
	11	0,1023	480	46,489	4,315	865,76	3144	2278
	12	0,1023	220	21,308	4,018	-343,99	2278	2622
Σ						-2,58		
IV	13(10)	0,1541	480	5,2295	-1,22	-7,79	3144	3152
	14(2)	0,1541	420	4,5759	-4,532	-93,98	3152	3246
	15	0,3071	180	0,0496	14,762	10,81	3246	3235
	16	0,2051	500	1,1859	8,651	88,74	3235	3146
Σ						-2,22		

→6



Efectos de la compresibilidad sobre el flujo.

Perturbaciones de presión: su propagación.

Ondas de choque y ondas de expansión

6.1 Introducción

En el flujo del gas, como fluido compresible, son muchas y diversas las causas que se encuentran en el origen de las perturbaciones de la presión a partir de un foco puntual. Los experimentos realizados para verificarlo así lo demuestran.

En el punto 7 del capítulo C3, se demostró que una pequeña perturbación de presión en un gas se propaga a la velocidad del sonido (a), dada por la ecuación $a^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$.

La onda acústica tiene propiedades muy simples: su velocidad es constante y su forma es permanente, debido a la linealización de las ecuaciones del movimiento. Esta linealización presupone amplitudes de onda y gradientes de velocidad infinitesimales, una simplificación que no siempre es admisible. Por el contrario, en dinámica de gases, se trata en general con perturbaciones de amplitud finita. En ellas, la velocidad de la onda difiere de punto a punto.

En dinámica de gases, la velocidad de propagación de una pequeña perturbación de presión y su relación con la velocidad del gas en una corriente, denominada *número de Mach*, son propiedades importantes del proceso de flujo.

A continuación, se presenta cómo se promueve la perturbación de la presión en un gas en reposo, asociada a su compresibilidad.

6.2 Relación entre la velocidad del foco que produce la perturbación de presión y la velocidad de la onda acústica. Número de Mach y Onda de Mach

La propagación de una pequeña perturbación de presión de frente plano se ilustra mediante el esquema que se muestra en la figura 6.1. Como una consecuencia del barrido del gas por la onda de presión, de amplitud infinitesimal dP , el fluido experimenta



cambios infinitesimales en el valor de las propiedades del fluido, tales como $d\rho$ y dT , entre otras.

Sea, por ejemplo, un cuerpo que se mueve a una velocidad V en el seno de un gas (v. figura 6.2).

Cada elemento de la superficie del cuerpo provoca en el gas un pequeño incremento de presión, que se propaga a la velocidad del sonido.

Fig. 6.1.
Propagación de
una perturbación
de presión de
frente plano

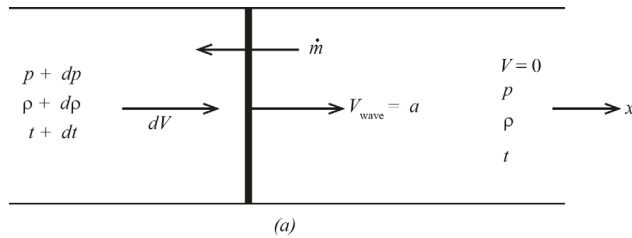
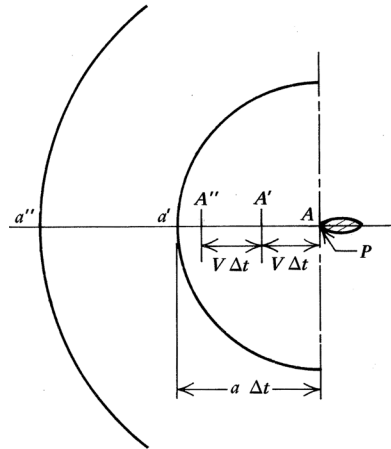


Fig. 6.2.
Perturbación de
presión producida por
un cuerpo con
velocidad subsónica
[ZH76]



Esta onda acústica recorre una distancia $a\Delta t$, a partir del foco, en el intervalo de tiempo Δt . En el mismo intervalo de tiempo, el cuerpo se ha desplazado la distancia $V\Delta t$. La experiencia enseña, y la teoría explica, que los fenómenos que ocurren en el gas difieren en función de la relación entre la velocidad del cuerpo y la velocidad del sonido en el gas. Esta relación puede ser inferior, igual o superior a la unidad. En aerodinámica, el cuerpo que se mueve en un gas en reposo se dice que lo hace en régimen subsónico, sónico o transónico o supersónico, según se cumpla una de dichas relaciones.

La figura 6.2 ilustra las perturbaciones de presión producidas por un cuerpo que se mueve a velocidad subsónica, por lo cual $V\Delta t < a\Delta t$, es decir: el frente de la onda acústica está siempre por delante del cuerpo. La situación es distinta cuando $V \geq a$. La figura 6.3 ilustra las perturbaciones de presión producidas por un cuerpo que se mueve a la velocidad del sonido, y la figura 6.4, cuando se mueve a una velocidad superior a la del sonido.



En el caso $V = a$, todas las perturbaciones producidas por el cuerpo se reúnen en un mismo punto, el foco, y dan lugar a modelos de flujo muy complicados: los regímenes denominados *sónico* y *transónico*.

En el caso $V > a$, el frente de onda de la perturbación creada por el cuerpo queda retrasado respecto a él, de modo que el frente de onda no puede dejarlo atrás.

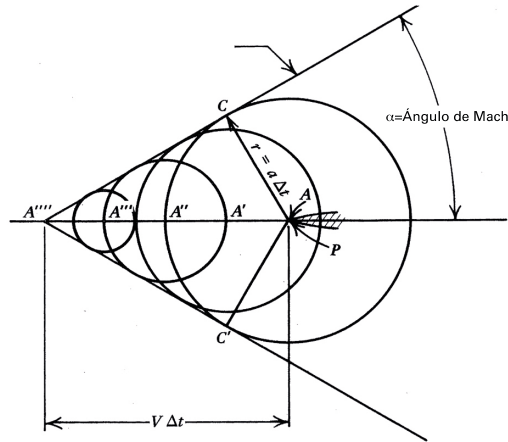
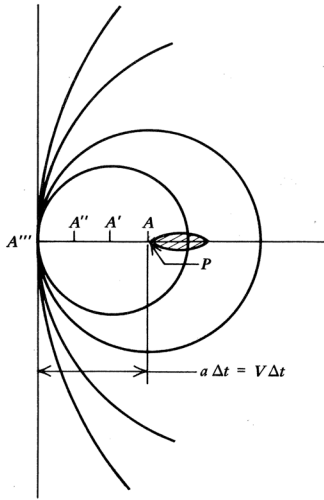


Fig. 6.3. (izda.)
Perturbación de presión producida por un cuerpo con la velocidad del sonido [ZH76]

Fig. 6.4. (dcha.)
Perturbación de presión producida por un cuerpo con velocidad supersónica [ZH76]

Es decir, en todas las posiciones del cuerpo, este se encuentra delante de los frentes de onda de las perturbaciones que ha producido, que atraviesa.

Los diferentes frentes de onda asociados a las correspondientes perturbaciones de presión en el fluido quedan envueltos por una superficie cónica, denominada *cono de Mach*.

El ángulo mitad de este cono α se denomina *ángulo de Mach*; su valor viene dado por la expresión:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \quad (6.1)$$

La superficie del cono representa el frente de la onda de Mach. Se trata de una onda de choque sumamente débil, que separa el dominio del fluido en dos regiones: la interior al cono, en que el fluido es afectado por las perturbaciones, y la externa, en que el fluido no se ve afectado por las perturbaciones.

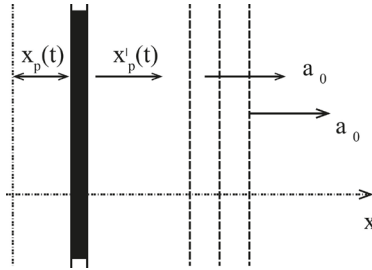
6.3 Movimiento unidireccional no estacionario

Como punto de partida, se estudia qué ocurre en el gas cuando se ve desplazado por una pared plana que se mueve en la dirección de su normal a una velocidad $u(t)$.

Sea el movimiento unidireccional de un gas que inicialmente está en reposo. Por ejemplo, el provocado por el desplazamiento de una pared plana que se mueve en la dirección de su normal a una velocidad $u(t)$ (v. figura 6.5).



Fig. 6.5.



Se trata de un movimiento homentrópico en la dirección x normal a la pared. En estas condiciones, u, ρ, P son funciones solo de x y t .

Las ecuaciones del movimiento se reducen a:

$$\text{Continuidad} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{Energía} \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

$$\text{Estado termodinámico} \quad s = s(\rho, P) \quad (6.5)$$

La ecuación 6.5 nos dice que la presión es una función única de la densidad; por tanto, la ecuación 6.3 se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (6.6)$$

donde $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$ es una variable del estado termodinámico, cuadrado de una velocidad que, como ya se ha visto, se denomina *velocidad del sonido*:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \quad (6.7)$$

El sistema constituido por las ecuaciones 6.2 a 6.6 admite solución, como mínimo, en dos casos particulares:

- Pequeñas perturbaciones con respecto al reposo
- Ondas simples no lineales

6.3.1 Pequeñas perturbaciones con respecto al reposo

En este caso, se puede escribir:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P', \quad u = u', \quad a = a_0 + a' \quad (6.8)$$



donde ρ', P', u' y a' tienen unos órdenes de magnitud que hacen que sus productos sean despreciables.

Sustituyendo las relaciones 6.8 en las ecuaciones 6.2 y 6.6, y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} a_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (6.9)$$

El sistema de ecuaciones anterior, se puede escribir así:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}\quad (6.10)$$

Las soluciones generales del sistema (10) son las ecuaciones de onda:

$$\begin{aligned}u' &= F(x - a_0 t) + G(x + a_0 t) \\ \rho' &= F_1(x - a_0 t) + G_1(x + a_0 t)\end{aligned}\quad (6.11)$$

donde F y G son arbitrarias, y F_1 y G_1 están relacionadas con las anteriores, que dependen de las condiciones inicial y de contorno, mediante las ecuaciones 6.9.

Dos soluciones particulares son:

$$\left. \begin{aligned}u' &= F(x - a_0 t), \quad \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{u'}{a_0}, \quad P' = a_0^2 \rho' \\ u' &= G(x + a_0 t), \quad \frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{u'}{a_0}, \quad P' = a_0^2 \rho'\end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

La primera representa una onda que viaja a la derecha sin modificarse con la velocidad a_0 ; la segunda representa una onda que viaja a la izquierda sin modificarse con la velocidad a_0 .

Las ecuaciones $x - a_0 t = c_1$ y $x + a_0 t = c_2$ son las líneas características de las ecuaciones de onda 6.10. A lo largo de estas características, en el plano x, t , las perturbaciones u' , ρ' y P' permanecen constantes.

Volviendo al esquema del movimiento unidireccional no estacionario mostrado en la figura 6.1, cabe concluir que, para $u'_x x = x_p(t)$, $u' = x'_p(t)$, se tiene:

$$x_p(t) = F\{x_p(t) - a_0 t\} \quad (6.13)$$

Cuando la pared se acelera a la derecha (en la misma dirección que la onda), de manera que $u'_x < 0$, entonces $\rho'_x < 0$, y se origina una onda de compresión. Si la pared se acelera a la izquierda, > 0 y la onda generada es de expansión ($\rho'_x > 0$, $P'_x > 0$).



6.3.2 Ondas simples no lineales

En las ondas simples no lineales, que se pueden originar también por el movimiento de una pared en un dominio infinito ocupado por un gas inicialmente en reposo, se cumple no solo $P = P(\rho)$ como consecuencia de la homoentropía, sino también $u = u(\rho)$.

Bajo estas condiciones, la ecuación 6.2 y la ecuación 6.3 se escriben:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \cdot \frac{d\rho}{du} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.14)$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \cdot \frac{d\rho}{du} = \left\{ -\frac{1}{\rho} a^2 \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{d\rho}{du} \quad (6.15)$$

Por consiguiente:

$$-\rho \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2$$

de donde se deduce:

$$\frac{du}{a} = \pm \frac{d\rho}{\rho} \quad (6.16)$$

Por otra parte, la relación de homoentropía $S(a, \rho) = S_0$ proporciona $a(\rho)$. En efecto, para un gas calóricamente perfecto, se cumple:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = C^{te} \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = C^{te} \rho^{\gamma-1} = a^2$$

de donde se deduce:

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\left(\frac{\gamma-1}{2} \right)} \quad (6.17)$$

Sustituyendo la ecuación 6.16 en la 6.15 e integrando, se obtiene:

$$a = a_0 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) u; \quad a = a_0 - \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) u \quad (6.18)$$

Ahora, introduciendo la ecuación 6.15 en las ecuaciones 6.2 y 6.3, resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (6.20)$$

cuya solución general es:

$$u = F[x - (u \pm a)t]; \quad \rho = F_1[x - (u \pm a)t] \quad (6.21)$$

donde F y F_1 son funciones relacionadas por la ecuación 6.15 y la condición de homoentropía.



El cálculo de u y de ρ como funciones de x, t requiere sustituir a en las ecuaciones 6.20 y 6.21 por su valor en función de u .

Así, por ejemplo, para un gas calóricamente perfecto, se obtiene:

$$u = F \left[x - \left(\frac{\gamma+1}{2} u_p + a_0 \right) t \right] \quad (6.22)$$

El conocimiento de u nos permite calcular a y las variables termodinámicas restantes.

A título de ejemplo, se vuelve a considerar el movimiento de un gas inicialmente en reposo generado por el movimiento en su seno de una placa plana, paralelamente a ella misma, a una velocidad u_p . La velocidad que adquiere el gas viene definida por la ecuación 6.22. Si la pared se acelera en la misma dirección que se propaga la onda, $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$, la onda es de compresión. Entonces, la presión que aparece viene dada por:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \left[\frac{a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u_p}{a_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.23)$$

En estas condiciones, la celeridad de la onda aumenta en el transcurso del tiempo, por lo cual las primeras ondas pueden verse atrapadas por las generadas posteriormente, y eso hace que $\frac{\partial u}{\partial x}$ resulte infinita en las condiciones límite.

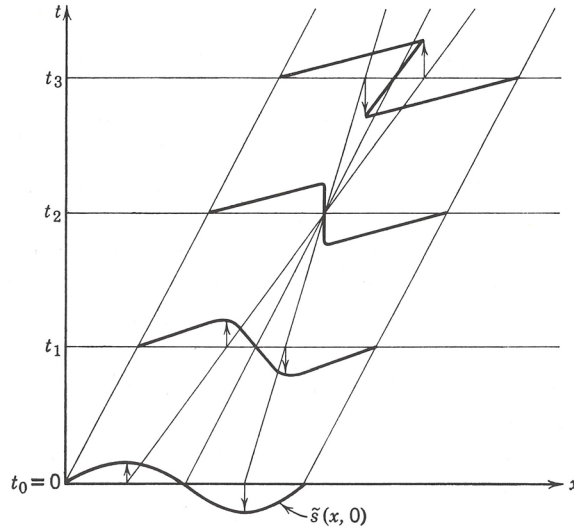
En la propagación tanto de ondas de compresión como de ondas de expansión, el perfil del frente de onda en tiempos sucesivos se distorsiona, lo cual no ocurre en la teoría lineal. El frente de onda se encrespa y da lugar a una onda de choque. Llegados a este estado, la ecuación 6.22 deja de ser válida, ya que entran en juego los efectos de la viscosidad.

En la figura 6.6, se muestra cómo se distorsiona una onda simple a medida que se propaga. Las regiones de la onda en que la variación relativa de densidad del gas, definida por $(\rho - \rho_0) / \rho_0$, es más alta tienden a solapar las de valor menor, lo cual se refleja en la mayor inclinación de las líneas características (líneas en el plano x, t de pendiente $(dx/dt) = \pm a_0$), ya que la pendiente es proporcional a la velocidad. El encrestamiento de la onda en la etapa t_3 , representado por el avance de la región de alta presión de la onda a la de baja presión, es prácticamente imposible, pues en el mismo punto x deberían coexistir tres valores distintos de la densidad. En esta etapa, los gradientes de velocidad y de temperatura en el gas resultan tan importantes que los efectos de fricción y transferencia de calor ya no pueden ser despreciados y se produce una onda de choque que se propaga sin ulterior distorsión.

Los estados del gas a ambos lados de la onda de choque son isoentrópicos, pero no en el seno de la onda, donde se produce un incremento de la entropía.



Fig. 6.6.
Propagación de
una onda de
amplitud finita.
[LR76]



6.3.3 Ondas isoentrópicas de amplitud finita

La descripción de la onda de amplitud finita requiere resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

La solución, encontrada por Riemann y Earnshaw, ya se ha descrito anteriormente:

$$u = F[x - (u \pm a)t] \quad (6.25)$$

La ecuación 6.25 significa que, para un observador que se mueve con la velocidad local del gas u , la perturbación se propaga a la velocidad acústica local a , mientras que, con relación a un referencial fijo en el gas no perturbado, se propaga a la velocidad $u + a$. En general, a la velocidad:

$$c = u \pm a \quad (6.26)$$

en que el signo menos significa que la onda viaja hacia la izquierda.

La ecuación de la velocidad de onda c se evalúa en términos de la densidad del gas, a cuyo fin se aplica localmente la teoría de la onda acústica siguiendo el proceso siguiente:



- Supuestos un gas perfecto y un proceso isoentrópico $du = \pm a \left(\frac{d\rho}{\rho} \right)$
- Sustituyendo en la ecuación 6.27 a por $a = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2}$ e integrando entre ρ y ρ_0 (estado inicial no perturbado), se obtiene:

$$u = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} a \frac{d\rho}{\rho} = \pm \frac{2a_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right] = \pm \frac{2}{\gamma-1} (a - a_0) \quad (6.28)$$

O sea:

$$a = a_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} u \quad (6.29)$$

y

$$c = a_0 \pm \frac{\gamma+1}{2} u \quad (6.30)$$

Por consiguiente, la ecuación de la velocidad de la onda es:

$$c = a_0 \left\{ 1 \pm \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right] \right\} \quad (6.31)$$

donde a_0 es la velocidad del sonido en el gas no perturbado.

6.4 Movimiento de onda unidimensional

El tipo de movimiento clásico de la onda unidimensional es el que ocurre por el desplazamiento de un pistón en un tubo de sección constante, que es el caso de las *ondas planas*.

Como avance al estudio de la onda de choque, parece oportuno comentar que ocurre en el caso del movimiento impulsivo de un pistón a una velocidad u_p . Debido a la inercia del gas inicialmente en reposo, se genera sobre la superficie del pistón en contacto con el gas una presión P y se establece una onda de choque que se propaga por el gas en reposo a una velocidad c .

La región de fluido comprimido entre la onda de choque y el pistón aumenta su longitud a la velocidad $(c-u_p)$ transcurrido un tiempo.

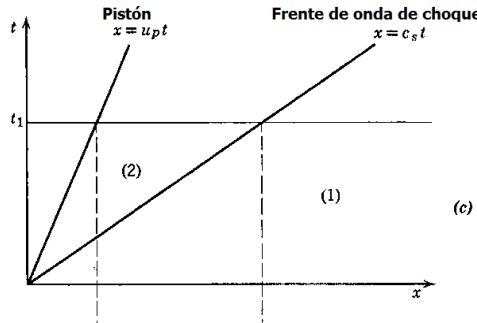
En la figura 6.7, se ilustra en un diagrama x, t la trayectoria del pistón y la de la onda generada.

Si la presión en la región del gas no perturbado es P_0 , la presión del gas perturbado ante la onda de choque es $P_1 > P_0$. Parece conveniente, pues, elegir la relación entre presiones P/P_1 como parámetro independiente básico para establecer todas las rela-



ciones entre las variables de estado del fluido detrás y delante de la onda de choque. A partir del estudio de la onda de choque, se deduce la relación entre presiones, que en este caso se expresa:

Fig. 6.7.
Trayectorias.



$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (6.32)$$

donde $M_1 = c / a_1$

Las ecuaciones anteriores permiten determinar la velocidad de propagación de la onda de choque. En efecto:

$$c = a_1 M_1 = a_1 \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{P_1} \right)^{1/2} \quad (6.33)$$

A su vez, la velocidad del gas detrás de la onda de choque u_2 está relacionada con la velocidad de desplazamiento del pistón por la condición $u_p = u_1 - u_2$, condición que permite determinar la velocidad del pistón para que se alcance la relación de presiones P / P_1 .

Ahora bien, $u_1 = c$ y, por continuidad, $(u_2 / u_1) = (\rho_1 / \rho_2)$; luego, $u_p = c \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$.

Sustituyendo (ρ_1 / ρ_2) en términos de $(P_2 / P_1) \cong (P / P_1)$, aplicando las relaciones de la adiabática dinámica de Hugoniot,⁴ se llega a la expresión siguiente para la velocidad del pistón:

$$u_p \cong \frac{a_1}{\gamma} \left(\frac{P}{P_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{P}{P_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)^{1/2} \quad (6.34)$$

Como se explica en el apartado siguiente, la onda de choque generada en el gas estacionario por el desplazamiento del pistón a una velocidad u_p puede ser fuerte o débil.



En el primer caso, $(P/P_1) \gg 1$ y también $\gg \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$; por tanto, se ha de admitir:

$$\lim_{P/P_1 \gg 1} u_p = a_1 \left(\frac{2}{\gamma[\gamma+1]} \frac{P}{P_1} \right)^{1/2} \quad (6.35)$$

6.5 Discontinuidades de velocidad

La experiencia enseña que, entre los fenómenos en que se producen discontinuidades del vector velocidad, las capas de remolino y las ondas de choque son los más notorios.

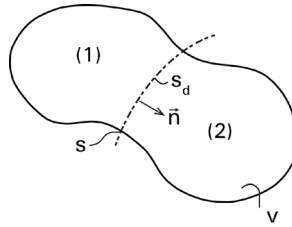
Para las discontinuidades de velocidad, no existen condiciones de compatibilidad cinemática; sí existen, sin embargo, condiciones de compatibilidad dinámica.

La deducción de las condiciones de compatibilidad dinámica necesita basarse en los principios generales de la conservación, formulados de forma integral sobre un dominio que contenga una región de la superficie de discontinuidad S_d y proceder por paso al límite cuando la frontera del dominio tienda a confundirse con esta región.

Sea el dominio representado en la figura 6.8, de volumen V , ocupado por un gas ideal, en el que la superficie frontera es S .

Este volumen fluido está dividido por una superficie de discontinuidad S_d en dos regiones, 1 y 2. Está claro que esta deducción no puede hacerse directamente a partir de las ecuaciones generales del movimiento, dado que en ellas intervienen las derivadas de la velocidad.

Fig. 6.8³.



Sea una magnitud intensiva del gas $f(\vec{r}, t)$ con derivadas continuas en V_1 y V_2 pero de magnitud f en el volumen de gas V , con discontinuidades de primera especie sobre S_d . La cantidad de f contenida en el volumen V es:

$$F = \int_V f(\vec{r}, t) dV \quad (6.36)$$

La variación temporal de F es:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int f(r, t) dv = \int \frac{\partial}{\partial t} f(r, t) dv + f(r, t) \nabla \cdot \hat{n} ds \quad (6.37)$$

cuando S_1 y S_2 tienden a S_d , V_1 y V_2 tienden a cero.



Por consiguiente:

$$\lim_{S_1, S_2 \rightarrow S_d} \frac{dF}{dt} = \int_{S_d} (f_2 V_{2n} - f_1 V_{1n}) dS \quad (6.38)$$

donde f_2 y f_1 son los límites de $f(\vec{r}, t)$ a ambos lados de S_d sobre las superficies fluidas S_2 y S_1 cuando tienden a S_d , y V_{2n} y V_{1n} son las componentes normales de las correspondientes velocidades relativas a S_2 y S_1 con respecto a S_d .

Sean f_2^* y f_1^* los valores de $f(\vec{r}, t)$ en cada una de las caras de S_d ; entonces, se verifica:

$$\lim_{S_1, S_2 \rightarrow S_d} \frac{dF}{dt} \int_{S_d} (f_2^* - f_1^*) \hat{n} dS \quad (6.39)$$

Combinando las ecuaciones 6.39 y 6.38, obtenemos:

$$\int_{S_d} \left\{ (f_2 V_{2n} - f_1 V_{1n}) - (f_2^* - f_1^*) \hat{n} \right\} dS = 0 \quad (6.40)$$

La ecuación 6.40 se ha de verificar en cualquier región S_d considerada, y, dado que el integrando es continuo por hipótesis, dicha relación ha de ser nula; o sea, se ha de cumplir:

$$|f V_n - f^* \hat{n}|^2 = 0 \quad (6.41)$$

La relación 6.41 expresa que la magnitud $(f V_n - f^* \hat{n})$ es invariante al atravesar la superficie de discontinuidad.

6.5.1 Invariantes mecánicos de la discontinuidad

La aplicación de la ecuación 6.41 a los principios de conservación de la masa, del impulso y de la energía proporciona los tres invariantes mecánicos de la discontinuidad:

– Conservación de la masa:

$$f = \rho, \quad f^* = 0; \quad \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} = G \quad (6.42)$$

donde G es el flujo másico específico a través de S_d

– Conservación del impulso: $f = \rho \vec{V}$, $f^* = -P$;

$$\rho_1 V_{1n} \vec{V} + P_1 \hat{n} = \rho_2 V_{2n} \vec{V} + P_2 \hat{n} \quad (6.43)$$

– Conservación de la energía: $f = \rho \left(u + \frac{V^2}{2} \right)$; $f^* = -P \vec{V}$

$$\rho_1 V_{1n} \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) + P_1 V_1 = \rho_2 V_{2n} \left(u_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) + P_2 V_2 \quad (6.44)$$



6.6 Ondas de choque

Más adelante, se explica cómo, al examinar y analizar el fenómeno de la descarga homentrópica de gases por toberas convergentes-divergentes, se constata que, cuando la presión ambiente es inferior a la presión de los gases en la sección de salida de la tobera que produce bloqueo sónico, aparecen transformaciones de las características del flujo en secciones alejadas de la garganta, en el tramo divergente de la tobera, que no pueden explicarse en el contexto de la teoría del continuo y las ecuaciones de Euler. Estas transformaciones se producen en capas de discontinuidad muy estrechas, en que los mecanismos por los cuales la viscosidad del fluido y la transmisión de calor disipan energía son importantes. Estas regiones muy estrechas reciben el nombre de *ondas de choque* y son *discontinuidades normales*.

La experiencia también enseña que un gas puede experimentar, bajo ciertas condiciones, un cambio de estado abrupto. Ello ocurre, por ejemplo, en los fenómenos relacionados con explosiones y detonaciones.

En estos y otros casos, el sistema de onda que se forma tiene un frente muy escarpado a través del cual la presión y la densidad del gas experimentan un gran incremento.

Como quiera que la génesis de las ondas de choque es un proceso casi instantáneo en que la energía para comprimir el gas que fluye a través de la onda es aportada a expensas de la energía cinética del flujo corriente arriba de la onda, el proceso es irreversible. Ello significa que el gas, a su paso por la onda, disminuye su energía disponible y experimenta un incremento en su entropía, o sea, la temperatura del gas alcanza un valor superior al que correspondería en caso de compresión isoentrópica.

Para hallar una solución a los problemas de dinámica de gases en que las discontinuidades enunciadas se encuentran involucradas, se han de establecer las relaciones que han de satisfacer los valores de las magnitudes fluidas a ambos lados de la discontinuidad, en que el gas se comporta como ideal. Estas relaciones se obtienen considerando las propiedades que son invariantes a través de la superficie de discontinuidad. Como se ha visto, estas propiedades son la masa, el impulso y la energía.

La figura 6.9 ilustra, mediante un esquema, la región de un campo fluido en que se encuentra una onda de choque fija. El fluido se mueve en esta región con una velocidad local \vec{V} que, con respecto al plano de la onda, se descompone en una componente normal V_n y una componente tangencial V_t , que tiene idéntico valor a ambos lados de la onda. A través de la onda, se ha de verificar:

$$\text{Conservación de la masa: } \rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n} \quad (6.45)$$

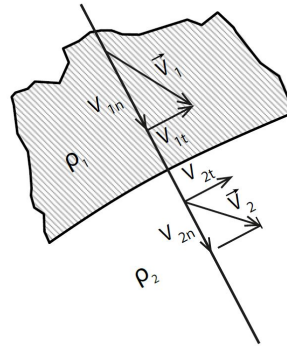
$$\text{Conservación del impulso: } P_1 + \rho_1 V_{1n}^2 = P_2 + \rho_2 V_{2n}^2 \quad (6.46)$$

$$\text{Conservación de la energía: } h_1 + \frac{V_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{2n}^2}{2} \quad (6.47)$$

$$\text{Conservación de la componente tangencial de la velocidad: } V_{t1} = V_{t2} \quad (6.48)$$



Fig. 6.9.



El problema del flujo detrás de la onda de choque consiste en encontrar los valores de las componentes de velocidad del gas y de las dos variables de estado del mismo. Ello representa cinco incógnitas, de modo que se necesitan cinco ecuaciones independientes.

A las cuatro ecuaciones ya planteadas, hay que añadir una quinta: la ecuación de estado, que se puede expresar de la manera siguiente:

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT \quad (6.49)$$

Hay varios tipos diferentes de ondas de choque; sin embargo, en este libro se analizan únicamente las propiedades de las ondas de *choque normal* y de *choque oblicuo* en gases perfectos.

6.6.1 Evolución de la velocidad y de la entropía del gas a través de una onda de choque

En una onda de choque, los cambios de velocidad, presión, temperatura, etc., ocurren en la dirección del movimiento, o sea, la onda de choque es una *onda longitudinal*. A través de la onda de choque estacionaria, el flujo de gas es unidimensional, compresible y viscoso.

Las ecuaciones que definen la variación de la velocidad del gas en dicho movimiento son las siguientes:

– Ecuación de continuidad: $\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (6.50)$

– Ecuación de cantidad de movimiento: $\frac{d}{dx}(\rho u^2) = -\frac{dP}{dx} + \frac{d\sigma}{dx} \quad (6.51)$

donde σ es la tensión de compresión.

– Ecuación de la energía: $\frac{d}{dx}(\rho u h_0) = \frac{d}{dx}(u\sigma - \dot{q}) \quad (6.52)$

donde h_0 es la entalpía específica de remanso y \dot{q} es el flujo específico de calor.



Integrando estas ecuaciones entre un punto del flujo antes de la onda de choque, donde tanto σ como \dot{q} son nulos, y otro en el seno de la onda, donde \dot{q} también es cero – proceso adiabático–, se obtiene:

$$\rho u = \dot{m} = \text{cte.} \quad (6.53)$$

$$\rho u^2 - \rho_1 u_1^2 = -(P - P_1) + \sigma \quad (6.54)$$

$$(\rho u - \rho_1 u_1) = \sigma u \quad (6.55)$$

Resulta, pues, que la distribución de velocidad del gas en el seno de la onda requiere conocer la distribución de P y de σ a lo largo del espesor de onda.

Es evidente que la disipación de energía en el interior de la onda, debido al trabajo irreversible σu de las tensiones de compresión, se traduce, de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, en un incremento de la entropía del gas a través de la onda, cuyo valor puede ser determinado aplicando dicha ley. A tal fin, la forma diferencial de la variación de la entropía por unidad de masa de gas al paso por la onda se escribe:

$$ds = \frac{1}{T} \left(dh - \frac{1}{\rho} dP \right) \quad (6.56)$$

La ecuación 6.56 se simplifica teniendo en cuenta que, a través de la onda, se satisface:

$$h = h_0 - \frac{1}{2} u^2, \text{ y } \sigma = f(\nabla u) \quad (6.57)$$

Por consiguiente, la ecuación 6.56 resulta:

$$ds = -\frac{1}{T} \left(u du + \frac{1}{\rho} dP \right) \quad (6.58)$$

A su vez, de acuerdo con los fundamentos de equilibrio dinámico subyacentes en las ecuaciones de Navier-Stokes, cabe admitir la ecuación:

$$u du + \frac{1}{\rho} dP = d\sigma(\nabla u) \quad (6.59)$$

Sustituyendo la relación 6.59 en la ecuación 6.58, e integrando la expresión resultante entre un punto de una línea de corriente antes de la onda de choque y el punto correspondiente en su interior, resulta:

$$s_1 - s = - \int_{\frac{1}{T}\sigma(\nabla u) > 0}^0 \frac{1}{T} d\sigma(\nabla u) \quad (6.60)$$

A la vista de la distribución de velocidad en la onda (v. figura 6.11) y de los resultados de perfil de temperatura obtenidos en ella por Sherman (1) (v. figura 6.10), el segundo miembro de la ecuación 6.60 resulta negativo, lo cual significa que la entropía del gas aumenta a medida que atraviesa la onda de choque. Conocidas la evolución de T y



$\sigma(\nabla u)$ a través del espesor de onda, se puede integrar la ecuación 6.60 para después encontrar $u(x)$, $T(x)$ y $P(x)$.

Fig. 6.10.
Distribución de
temperatura a
través del espesor
de una onda de
choque

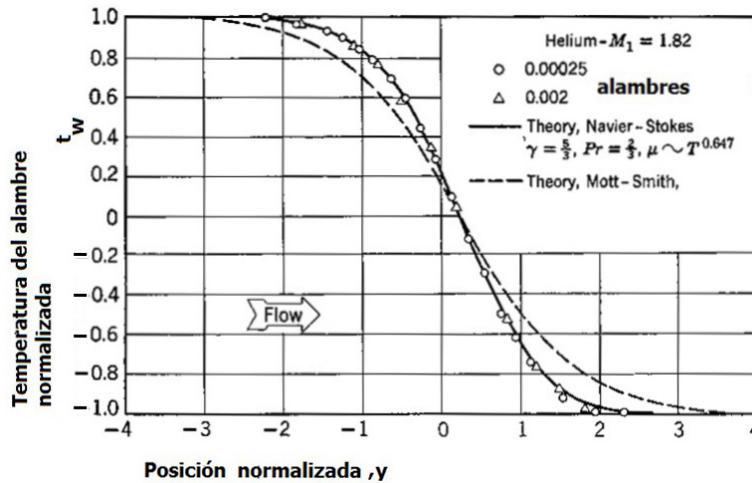
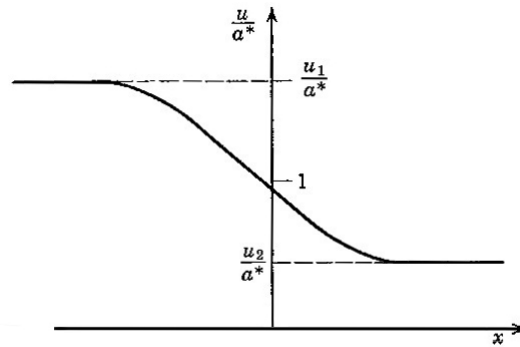


Fig. 6.11.
Distribución de
velocidad a
través del espesor
de una onda de
choque.



6.6.2 Onda de choque normal, o recto

En este caso, $V_t = 0$; por consiguiente, las ecuaciones 6.45, 6.46 y 6.47 se escriben:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (6.61)$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (6.62)$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (6.63)$$

Combinando las ecuaciones 6.61 y 6.62 e introduciendo los volúmenes específicos del gas $v = \frac{1}{\rho}$, se obtiene:



$$\left. \begin{aligned} V_1^2 &= v_1^2 \left(\frac{P_1 - P_2}{v_2 - v_1} \right) \\ V_2^2 &= v_2^2 \left(\frac{P_1 - P_2}{v_2 - v_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.64 en la ecuación 6.63, tomando $h = u + Pv$, resulta:

$$(P_1 + P_2)(v_1 + v_2) = 2(u_2 - u_1) \quad (6.65)$$

que es la denominada *ecuación de Hugoniot*,¹ también conocida con el nombre de *adiabática dinámica*.

Teniendo en cuenta que $u = \frac{1}{\gamma - 1} Pv$, la ecuación de Hugoniot se escribe de la forma:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma + 1)v_1 - (\gamma - 1)v_2}{(\gamma + 1)v_2 - (\gamma - 1)v_1} \quad (6.66)$$

La ecuación 6.66 sustituye la ecuación de Laplace ($Pv^\gamma = Cte$) en cuanto concierne a la ley de compresibilidad en el caso de una onda de choque.

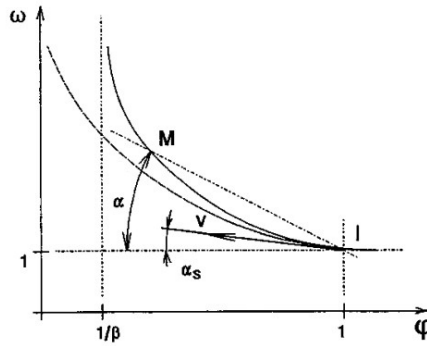


Fig. 6.12.

La comparación entre ambas ecuaciones se ilustra en la figura 6.12, en que las curvas correspondientes se han representado en términos de las variables adimensionales:

$$\omega = (P_2 / P_1), \quad \phi = (v_2 / v_1) \text{ y } \beta = (\gamma + 1 / \gamma - 1)$$

Incorporando estos parámetros en la ecuación 6.43, se obtiene:

$$\omega = (\beta - \phi) / (\beta\phi - 1) \quad (6.67)$$

La curva representativa de la ecuación 6.67 es una hipérbola equilátera. Solo la curva situada en el primer cuadrante tiene significado físico.

En ella, también se ha representado la ecuación de Laplace, cuya expresión en variables adimensionales es:



$$\omega = 1 / \varphi^\gamma \quad (6.68)$$

Como se observa en la representación gráfica de las ecuaciones 6.44 y 6.45, la adiábica dinámica de Hugoniot⁸ y la adiábica isoentrópica de Laplace tienen un punto en común que tiene por coordenadas $\omega = 1$, $\varphi = 1$. Este punto representa el estado del gas antes de la onda de choque. En él, la adiábica dinámica y la adiábica isoentrópica tienen la misma tangente y el mismo radio de curvatura, cuyos valores para $\varphi = 1$ son:

$$\left(\frac{d\omega}{d\varphi} \right)_{ad} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = -\gamma \quad (6.69)$$

$$\left(\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} \right)_{ad} = \gamma(\gamma+1) \quad (6.70)$$

La adiábica dinámica admite por asíntota la recta $\varphi = 1/\beta$ y corta el eje de las φ en el punto de abscisa $\beta = \varphi$. La existencia de esta asíntota significa, desde el punto de vista físico, que la densidad del gas conserva un valor finito $\rho_2 < \beta\rho_1$, sea cual sea la relación de presiones ω .

Relaciones entre las magnitudes del flujo, las propiedades termodinámicas del gas y el número de Mach

Como se ha visto, la velocidad del gas antes de la onda de choque V_1 viene dada por la ecuación:

$$V_1^2 = v_1^2 \{ (P_2 - P_1) / (-v_2 v_1) \}$$

Introduciendo en ella los parámetros ω , φ resulta:

$$V_1 = \sqrt{\frac{P_1}{\rho_1}} \sqrt{\frac{\omega-1}{1-\varphi}} = \sqrt{\frac{P_1}{\rho_1}} \sqrt{\tan \alpha} \quad (6.71)$$

donde α es el ángulo, con respecto al eje φ , formado por la secante que pasa por los puntos 1,1 y M de la adiábica dinámica, de modo que, en el punto 1,1, $\alpha = \alpha_{is}$ y la velocidad V_1 toma el valor:

$$V_{1,is} = \sqrt{\frac{P_1}{\rho_1}} \sqrt{\tan \alpha_{is}} = \sqrt{\gamma \frac{P_1}{\rho_1}} = a_1 \quad (6.72)$$

La ecuación 6.72 impone la conclusión siguiente: mientras la velocidad V_1 no sobrepase la celeridad del sonido a_1 en el gas antes del choque, no hay onda de choque. Esto significa que el flujo antes de la onda de choque ha de ser supersónico $M_1 > 1$ para que el choque ocurra. Ello comporta, como se va a comprobar, que el flujo de gas después de la onda de choque ha de ser subsónico.

En efecto, sean V_2 la velocidad del gas después de la onda de choque, y T_2, P_2, ρ_2 el valor de sus variables de estado. Se ha de verificar:



$$h_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} \quad (6.73)$$

Sustituyendo en la ecuación 6.73 ρ_2 y P_2 por $\rho_1 (V_1 / V_2)$ y $P_1 - \rho_1 V_1 (V_2 - V_1)$, respectivamente, y simplificando, se obtiene:

$$a^{*2} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = V_2 (V_2 - V_1) ; \text{ o sea, } a^{*2} = V_1 V_2 \quad (6.74)$$

Introduciendo en la ecuación 6.74 las velocidades reducidas $\mu_c = (V / a^*)$, resulta:

$$\mu_{c1} \mu_{c2} = 1 \quad (6.75)$$

Esta es la denominada *relación de Prandtl*, que establece lo siguiente: dado que el flujo de gas antes de la onda de choque es supersónico $M_1 > 1 \rightarrow \mu_{c1} > 1$, el flujo de gas después de la onda ha de ser subsónico $M_2 < 1 \rightarrow \mu_{c2} < 1$.

Conocido el estado del gas y su movimiento antes de la onda de choque, caracterizados por el número de Mach M_1 , se puede determinar la relación de presiones estáticas del gas P_2 / P_1 , o sea, la relación de compresión del gas a través de la onda de choque.

En efecto, sustituyendo en la ecuación 6.65 de la adiabática de Hugoniot⁸ las relaciones:

$$(v_2 / v_1) = (V_2 / V_1), \quad P_1 - P_2 = \frac{V_1}{v_1} (V_2 - V_1)$$

se obtiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \frac{V_1^2}{P_1 v_1} - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)$$

e introduciendo el número de Mach $M_1 = V_1 / \sqrt{\gamma P_1 v_1}$, resulta:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) M_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad (6.76)$$

A partir de la ecuación 6.76 y de las relaciones isoentrópicas de las variables de estado del gas antes y después de la onda de choque, se deducen fácilmente las relaciones:

$$M_2 / M_1, T_2 / T_1, P_{20} / P_{10}, s_2 / s_1, \text{ etc.}$$

En efecto, dado que a través de la onda se conserva el impulso $P + \rho V^2 = \text{cte.}$, se obtiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (6.77)$$

Combinando las ecuaciones 6.76 y 6.77 se obtiene:



$$M_2 = \left\{ \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right\}^{1/2} \quad (6.78)$$

A su vez, dado que la temperatura de remanso del gas se mantiene a través de la onda, se cumple $T_{20} = T_{10}$; luego:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \quad (6.79)$$

Sustituyendo en esta relación M_2 por su valor (6.78), se obtiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2 - 1\right)}{\frac{(\gamma+1)^2}{2(\gamma-1)}M_1^2} \quad (6.80)$$

Si bien la temperatura de remanso del gas se mantiene a través de la onda por tratarse de un proceso adiabático, no es así para la presión de remanso, que disminuye a medida que aumenta el número de Mach del flujo de gas antes de la onda. La relación entre las presiones de remanso del flujo antes y después del paso del gas a través de la onda viene dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{P_{20}}{P_{10}} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)M_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \right\} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.81)$$

En términos únicamente de M_1 , la ecuación 6.81 se expresa:

$$\frac{P_{20}}{P_{10}} = \frac{1}{\left\{ \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (6.82)$$

La variación de la densidad del gas a través de la onda se obtiene a partir de la relación entre ecuaciones de estado del gas antes y después de la onda, o sea, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2}$.

Sustituyendo las relaciones entre presiones y entre temperaturas por sus valores en función de γ y M_1 , se obtiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\right)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \quad (6.83)$$



Las ondas de choque se describen frecuentemente en términos de los parámetros δ (*condensación*) y β (*intensidad de choque*), definidos por las expresiones $\delta \equiv \frac{P_2}{P_1} - 1$ y $\beta \equiv \frac{P_2}{P_1} - 1$, respectivamente.

Mediante el parámetro β , la ecuación 6.76 se escribe:

$$\beta = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) (M_1^2 - 1) \quad (6.84)$$

de modo que:

$$M_1^2 = 1 + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \beta \quad (6.85)$$

Esta expresión sirve para escribir en términos de β todas las relaciones entre las propiedades de estado del gas deducidas anteriormente.

Ondas de choque no estacionarias

Las ondas de choque pueden también ser no estacionarias. En este caso, es la onda de choque la que se desplaza en el gas inicialmente en reposo. Para poder aplicar los resultados precedentes, es necesario imprimir a todo el conjunto una velocidad de arrastre igual y opuesta a la velocidad corriente arriba V_1 . La onda de choque se desplaza entonces a la velocidad V_1 en el gas en reposo, como se muestra en la figura 6.13.

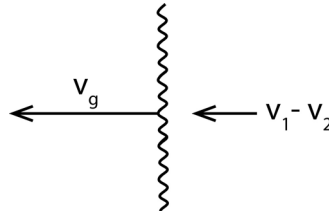


Fig. 6.13.

El gas, después de ser barrido por la onda, se mueve tras ella a una velocidad $V_1 - V_2$.

La relación entre los valores de las magnitudes de estado del gas se obtiene de las ecuaciones deducidas para la onda de choque normal estacionario poniendo en ellas $M_1 = (V_1 / a_1)$, donde a_1 sería la velocidad del sonido en el gas sin perturbar. La ecuación 6.78 daría el número de Mach M_2 relativo a la onda.

$$\text{La velocidad real del gas sería } V_g = V_1 - V_2 = V_1 - M_2 a_2 \quad (6.86)$$

donde a_2 es la velocidad del sonido en el gas detrás de la onda, igual a $(\gamma R T_2)^{1/2}$.

Las relaciones $h_{10} = h_{20}$, $T_{10} = T_{20}$ y $P_{20} < P_{10}$ no se cumplen en ondas de choque móviles, ya que las propiedades de remanso cambian al cambiar el sistema de referencia.



Incremento de entropía del gas a través de la onda

En el apartado C6.5.1, ya se ha tratado del incremento de entropía del gas a través de una onda de choque, y se ha obtenido la ecuación 6.60 que lo determina. En este subapartado, se da una versión más explícita de dicho incremento.

Se sabe en termodinámica que la variación de entropía de un gas se expresa mediante la ecuación:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$$

Integrando esta ecuación a través de la discontinuidad, se obtiene:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (6.87)$$

Para un gas perfecto, sustituyendo en la ecuación 6.87 las relaciones de temperatura y de presión a través de la onda, se obtiene:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right\} \quad (6.88)$$

Teniendo en cuenta que la adiabática de Hugoniot⁷ impone $\frac{P_2}{\rho_2^\gamma} > \frac{P_1}{\rho_1^\gamma}$, se deduce que

$$\frac{P_2}{\rho_2^\gamma} \frac{\rho_1^\gamma}{P_1} > 1; \text{ por tanto, } \frac{s_2}{s_1} > 0.$$

Así pues, la entropía del gas aumenta a través de la onda de choque, debido a los procesos de disipación de energía que ocurren en el seno del espesor de la onda, discontinuidad que no es infinitamente delgada y en que el gas experimenta efectos de viscosidad y de conductividad térmica importantes.

En el caso de ondas de choque intensas, como las que pueden surgir en la detonación de explosivos potentes, los aumentos de temperatura y de presión resultantes son muy importantes. Así, para una velocidad del gas antes del choque de 1.800 m/s, el aumento de presión que se produce a través de la onda de choque es de $22 \cdot 10^9$ Pa y el incremento de temperatura, de 1.075 °C.

6.6.3 Ondas de choque oblicuo

En la figura 6.14, se muestran tres casos de flujo supersónico con choques oblicuos:

- Flujo de gas alrededor de una esquina
- Incidencia de un flujo de gas sobre una cuña con un ángulo de ataque nulo
- Incidencia de un flujo de gas sobre una cuña con un ángulo de ataque no nulo



En todos los casos, se considera únicamente el choque oblicuo más débil de los dos posibles, aquel para el cual $M_2 > 1$.

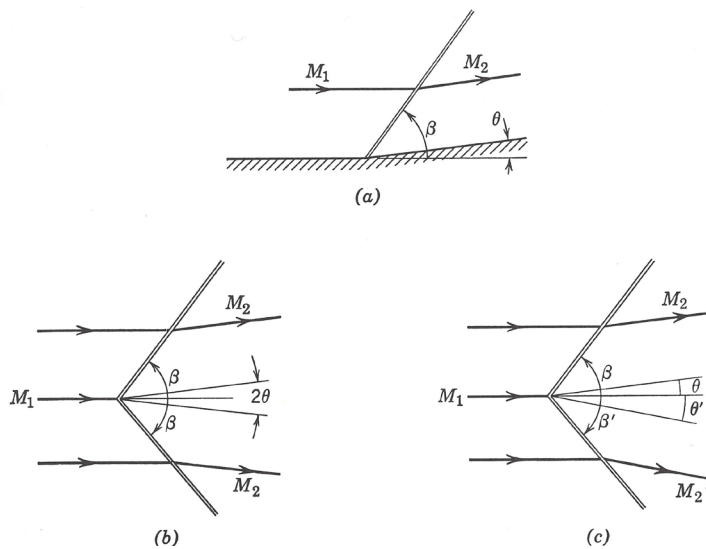


Fig. 14.
[LR76]

Al tratarse de un flujo no viscoso, cualquier línea de corriente puede ser sustituida por un contorno sólido. Por consiguiente, en el caso de una cuña no simétrica con respecto a la dirección de la corriente incidente, el flujo sobre cada cara de la cuña viene determinado únicamente por la inclinación de su superficie.

Además, si las ondas de choque están adheridas a la arista borde de la cuña, las superficies inferior y superior son independientes.

Veamos, como caso más simple, el contorno cóncavo con respecto al movimiento del gas representado en la figura 6.15. Frente a este contorno, el gas ha de experimentar un cambio de dirección para acomodarse al ángulo de la esquina, que se supone relativamente grande.

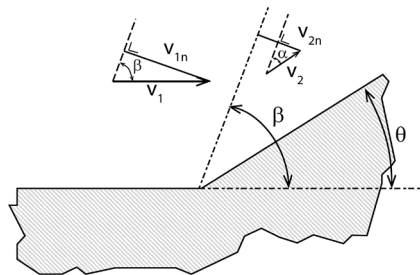


Fig. 6.15.

Como una consecuencia de la discontinuidad del contorno, aparece una onda de choque cuyo frente se inclina con respecto a la dirección del flujo incidente un ángulo β , denominado *ángulo de onda*, que es mayor que el ángulo de Mach. Se trata de una *onda de choque oblicuo*.

La onda de choque oblicuo se reduce a la onda de choque normal si, a todo el campo de velocidades, se le resta la componente tangencial de la velocidad V_t . Entonces, todas



las relaciones obtenidas para la onda de choque normal continúan siendo válidas si se sustituye M_1 por $M_{1n} = M_1 \sin \beta$.

Por consiguiente, las relaciones entre los valores de las propiedades termodinámicas del gas después de su paso por la onda y antes son las siguientes:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (6.89)$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (6.90)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta} (\gamma M_1^2 \sin^2 \beta + 1) \quad (6.91)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[1 + \frac{2}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right]^{1/(\gamma - 1)} \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \right]^{-\gamma/(\gamma - 1)} = \ln \frac{P_{10}}{P_{20}} \quad (6.92)$$

Las ecuaciones 6.90 y 6.92 muestran que la máxima inclinación de onda posible es $\beta = \pi/2$, así que el rango de posibles ángulos de onda para un dado número de Mach inicial es:

$$\sin^{-1} \frac{1}{M} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.93)$$

La onda de choque oblicua lleva asociada una desviación del flujo hacia la onda que es consecuencia de que la componente tangencial de la velocidad ha de conservarse y la componente normal ha de disminuir al paso del gas por la onda. Para calcular esta desviación, basta con expresar la constancia de la componente tangencial de la velocidad:

$$V_t = \frac{V_{1n}}{\tan \beta} = \frac{V_{2n}}{\tan \alpha} \rightarrow \tan \alpha = \frac{V_{2n}}{V_{1n}} \tan \beta \quad (6.94)$$

Ahora bien, la ecuación de continuidad aporta la relación siguiente:

$$\frac{V_{2n}}{V_{1n}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{1n}^2}{\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) M_{1n}^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_{1n}^2} + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \quad (6.95)$$

Por consiguiente:

$$\tan \alpha = \left\{ \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right\} \tan \beta \quad (6.96)$$

De la ecuación 6.96, se deduce, mediante las adecuadas transformaciones, la ecuación:

$$\tan(\beta - \alpha) = \tan \theta = \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{\gamma M_1^2 + M_1^2 \cos 2\beta + 2} 2 \cot \beta \quad (6.97)$$



Por otra parte, el número de Mach M_2 de la corriente de gas después del choque se determina a partir de la ecuación que relaciona M_1 y M_2 para la onda de choque normal 6.78, sin más que sustituir en ella M_1 por $M_1 \sin \beta$ y M_2 por $M_2 \sin(\beta - \theta)$.

Se obtiene:

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (6.98)$$

La ecuación 6.98 está representada en la figura 6.16 para $\gamma = 1,4$, y, en la figura 6.17, la relación explícita entre β y θ .

A la vista de la figura 6.16, se constata que, para el mismo número de Mach del flujo incidente y con idéntica desviación de este, los posibles valores de β son dos. De las dos soluciones posibles, la de menor valor de β , que corresponde a una onda de choque fuerte, está asociada a un número de Mach del flujo incidente más pequeño y, por consiguiente, produce cambios menos intensos de las magnitudes del gas. El flujo detrás de la onda de choque es supersónico en términos de la velocidad total $\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_t$. La segunda solución, que corresponde al valor de β más grande, se denomina *onda de choque débil*.

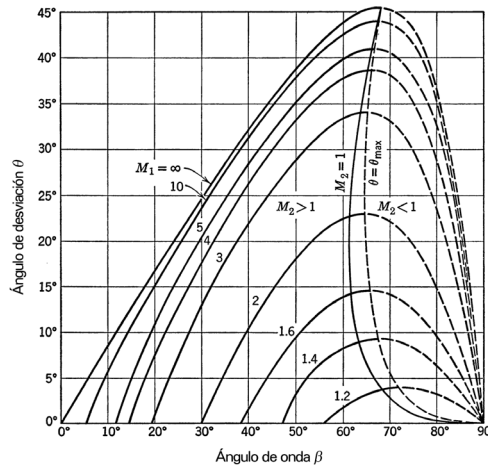
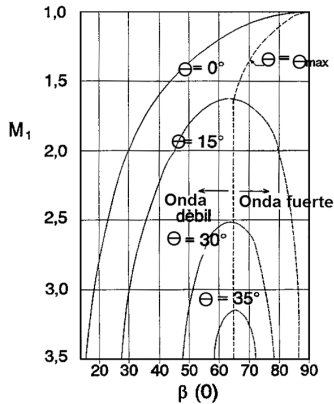


Fig. 6.16.

Fig. 6.17.
[LR76]

Si el problema físico admite ambas soluciones, la que aparece es la débil, ya que es la más estable. El flujo detrás de la onda de choque es subsónico. Además, ambas figuras muestran que, para cada valor de M_1 , hay un valor máximo de θ .

En los casos en que el flujo después de la onda de choque es supersónico ($M_2 > 1$), a toda disminución del ángulo de cuña θ le corresponde una disminución del ángulo de onda β y, en el límite, $\theta \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \mu$, valor definido por la expresión:

$$M_1^2 \sin^2 \mu - 1 = 0 \quad (6.99)$$

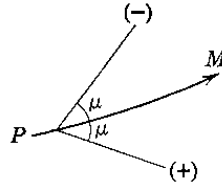
donde μ denota el ángulo de Mach.



Las líneas de inclinación μ se denominan *líneas de Mach*. Se pueden trazar en cualquier punto del campo de movimiento. Si el movimiento no es uniforme, entonces μ varía con M , y las líneas de Mach son curvas.

Como avance de las *características* (v. anexo III), tema del cual se hace una breve aplicación más adelante, cabe ahora explicar que, a partir de cualquier punto del campo de movimiento de un gas, se pueden trazar dos líneas que se intersectan con la línea de corriente con un ángulo μ , denominadas *características* y denotadas por (+) y (-), como se muestra en la figura 6.18

Fig. 6.18.



Choques oblicuos débiles

Si los ángulos de desviación θ son pequeños, las ecuaciones del choque oblicuo resultan muy simples. Una relación entre β y θ más útil que la ecuación 6.75 es la siguiente:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan\beta} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2\beta} \quad (6.100)$$

A partir de la ecuación 6.100, se llega, por simples transformaciones, a la ecuación:

$$M_1^2 \sin^2\beta - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin\beta \sin\theta}{\cos(\beta - \theta)} \quad (6.101)$$

Para pequeños ángulos de desviación θ , la ecuación 6.101 puede aproximarse por:

$$M_1^2 \sin^2\beta - 1 \cong \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \tan\beta \right) \cdot \theta \quad (6.102)$$

Según cuál sea el valor del número de Mach del flujo después de la onda, resulta que, si $M_2 < 1$ y θ es pequeño, el valor de β se aproxima a $\pi/2$; si $M_2 > 1$, el valor de β se aproxima al del ángulo de Mach μ , dado por la ecuación:

$$\tan\beta \cong \tan\mu = \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (6.103)$$

Por consiguiente, la ecuación 6.102 se reduce a la forma:

$$M_1^2 \sin^2\beta - 1 \cong \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \cdot \theta \quad (6.104)$$

Mediante la ecuación 6.104, se pueden deducir las relaciones que dependen de la componente normal $M_1 \sin\beta$; algunas de ellas son las siguientes:

- Cambio del valor de la velocidad del gas al paso a través de la onda:



$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad ; \quad \frac{\Delta V}{V_1} = -\frac{\theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (6.105)$$

- Cambio del valor de la presión del gas:

$$\frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (6.106)$$

- Cambio del valor de entropía del gas:

$$\Delta s \sim \theta^3 \quad (6.107)$$

- Desviación del ángulo de onda β con respecto al ángulo de Mach μ , $\beta = \mu + \varepsilon$,

donde $\varepsilon = \frac{\gamma+1}{4} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \theta$ es mucho menor que μ .

6.7. Ondas de expansión

Si, en un sistema tubo-pistón como el representado en la figura 6.19, el pistón se mueve impulsivamente a una velocidad u_p hacia un extremo, se produce una onda de expansión en el gas contenido en el volumen del tramo opuesto del tubo. La distribución de velocidad de las partículas de gas afectadas por la onda es, en el primer instante, un “escalón”; sin embargo, este escalón no puede mantenerse en una onda de expansión, de modo que tan pronto como se inicia la propagación de la onda, esta empieza a aplanarse. El resultado final es una distribución lineal de la velocidad de las partículas de gas.

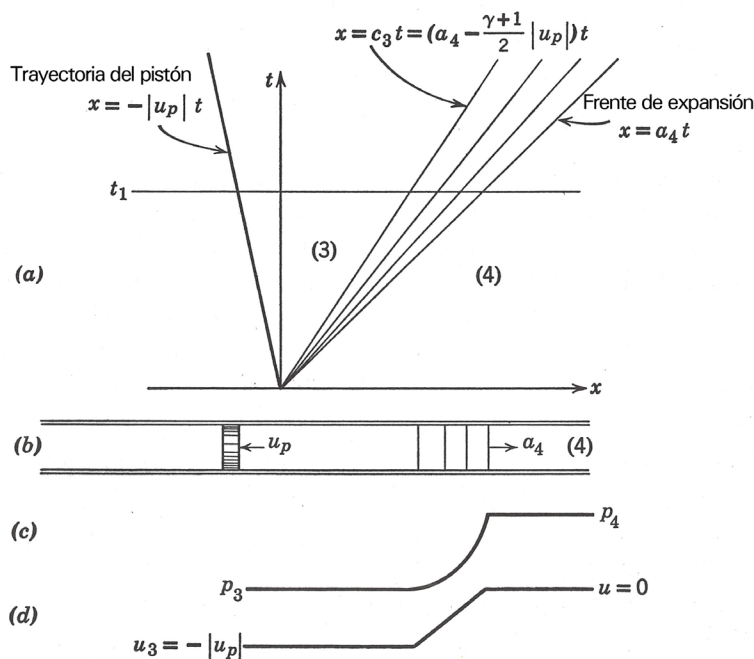


Fig. 6.19.
[LR57]



Entre la característica límite y el pistón, las propiedades del gas tienen los valores uniformes ρ_3, P_3, a_3 , etc., que, en el caso de un gas perfecto, vienen dadas por las relaciones isoentrópicas. Así, la relación entre las presiones P_3 y P_4 que define la intensidad de la onda de expansión es

$$\frac{P_3}{P_4} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_p}{a_4} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (6.108)$$

Las propiedades que caracterizan este fenómeno son principalmente las siguientes:

- La onda producida por el movimiento impulsivo del pistón se denomina *onda de expansión centrada*. El frente de la onda se propaga en la región de fluido no perturbado a la velocidad a_4 .
- La velocidad de onda detrás del frente viene dada por la ecuación:

$$c = a_4 + \frac{\gamma + 1}{2} u \quad (6.109)$$

Esta velocidad decrece a través de la onda, ya que $u < 0$.

- El conjunto de líneas rectas que forman un abanico son líneas en que c, u, ρ son constantes. Son las líneas características cuya pendiente va disminuyendo en el transcurso del tiempo aplanando el abanico, que deviene más ancho. Los gradientes de velocidad, densidad, etc., van disminuyendo su valor.
- La ecuación de la característica límite del abanico es:

$$(x/t) = a_4 - \frac{\gamma + 1}{2} |u_p| \quad (6.110)$$

- Entre la característica límite y el pistón, las propiedades del gas tienen los valores uniformes ρ_3, P_3, a_3 , etc., que, en el caso de un gas perfecto, vienen dadas por las relaciones isoentrópicas.

En particular, la relación de presión P_3 / P_4 que define la intensidad de la onda de expansión es definida por la ecuación:

$$\frac{P_3}{P_4} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_p}{a_4} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (6.111)$$

- La máxima expansión que se puede alcanzar corresponde teóricamente a $\rho_3 = 0$, estado que se alcanza también teóricamente cuando la velocidad del pistón es:

$$u_p = 2a_4 / (\gamma - 1) \quad (6.112)$$

6.7.1 Ondas de expansión debidas al contorno

Cuando un flujo supersónico se encuentra con un contorno divergente, aparece una onda de expansión. La perturbación que produce el inicio de la parte divergente del



contorno se propaga a lo largo de una línea de Mach que parte de dicho punto. A causa de la expansión, la presión en la corriente después de la línea de Mach será menor que antes de esta línea.

El consiguiente gradiente de presión a través de la onda acelera el movimiento del gas, que incrementa su número de Mach.

Este incremento se debe únicamente al aumento de la componente normal de la velocidad, pues la componente tangencial a ambos lados de la onda es idéntica. El cambio de dirección de la corriente se realiza a lo largo de la línea de Mach con un ángulo μ con respecto a la dirección de la velocidad incidente que depende del número de Mach del

flujo antes de la onda, o sea, $\mu = \arcsen \frac{1}{M_1}$, tal como se ilustra en la figura 6.20. Si el

flujo inicial es estacionario y uniforme, las ondas de choque oblicuo se pueden analizar aplicando los métodos de flujo unidimensional. Tal es el caso de las ondas de expansión en un flujo bidimensional estacionario uniforme, denominadas *ondas simples* u *ondas de Prandtl-Meyer*.

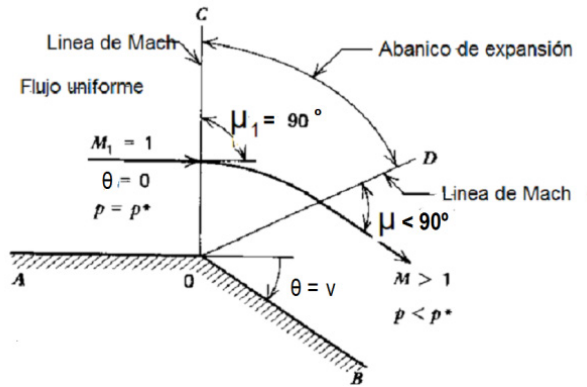


Fig. 6.20.

Como se ilustra en la figura, la transición de la corriente supersónica de aproximación a la esquina M_1 hasta la corriente después de ella M_2 se realiza por una región de expansión, denominada *abanico de expansión de Prandtl-Meyer*, en que las líneas de Mach son simples. Dentro de ella, la velocidad del gas a lo largo de la línea de corriente varía en función del ángulo de dicha línea. Esta es una de las características de las ondas simples; otra es que las líneas de Mach son rectas, y a lo largo de ellas las propiedades de flujo son constantes.

La ecuación diferencial que gobierna el flujo en el abanico de expansión de Prandtl-Meyer se deduce a partir de la condición cinemática de igualdad de la componente tangencial de la velocidad a ambos lados de cada onda:

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos (\mu - d\theta) \quad (6.113)$$

Desarrollando $\cos(\mu - d\theta)$ y teniendo en cuenta que $\cos \theta \cong 1$ y $\sin d\theta \cong d\theta$, se obtiene:

$$\frac{dV}{V} = -\tan \mu d\theta \quad (6.114)$$



Ahora bien, $\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$, luego $d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$ (6.115)

La ecuación 6.115 es la ecuación diferencial que gobierna el flujo de Prandtl-Meyer. Su integración requiere conocer la relación entre la velocidad y el número de Mach.

En el caso de un gas perfecto, las ecuaciones disponibles son:

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \mu^2 M^2 = \gamma R T M^2 \\ \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \end{aligned} \right\} V^2 = \frac{\gamma R T_0 M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad (6.116)$$

Aplicando la derivada logarítmica a la ecuación 6.116, se obtiene:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (6.117)$$

Sustituyendo en la ecuación 6.117 el valor de $\frac{dV}{V}$ dado por la ecuación 6.115, resulta:

$$d\theta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (6.118)$$

La ecuación 6.118 es la forma diferencial para flujo de onda simple. Su integral es:

$$\theta = -\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} + \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} + \text{cte.} \quad (6.119)$$

La determinación de la constante requiere conocer el número de Mach del flujo que se acerca al vértice del diedro y el ángulo de desviación θ en él. El caso más simple es $M_1 = 1$ y $\theta_1 = 0$, para el cual la constante es 0 (v. figura 6.21).

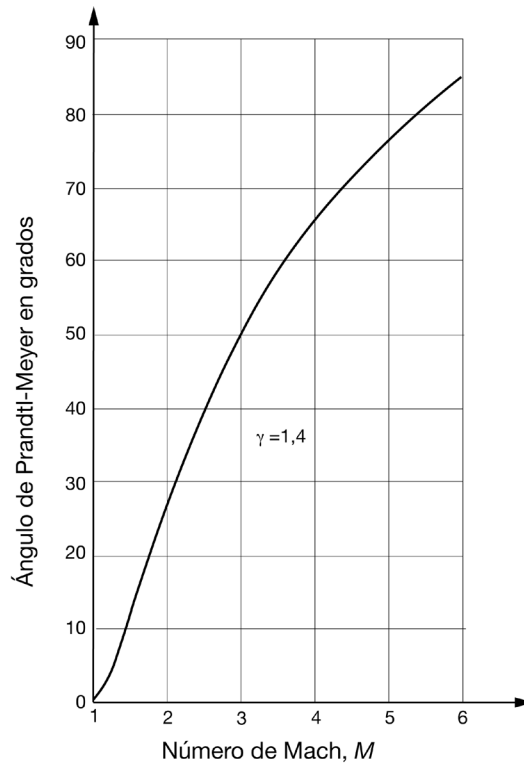
En este caso singular, el ángulo de desviación del flujo, conocido como *ángulo de Prandtl-Meyer*, se denota por ν , y viene dado por la ecuación 6.92, con cte. = 0, o sea:

$$\nu = -\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} + \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (6.120)$$

La figura 6.21 presenta los valores de ν en función del número de Mach para $\gamma = 1, 4$.

La tabla 11 en el anexo I, presenta valores de ν en función del número de Mach M para varios valores de γ .

El ángulo de desviación del flujo desde un número de Mach inicial $M_1 > 1$ hasta un número de Mach final $M_2 > M_1$ viene dado por $\theta = \nu_2 - \nu_1$. (6.121)



Una vez determinado el número de Mach del flujo para un ángulo de desviación θ dado mediante la ecuación 6.119, las demás variables del flujo se pueden determinar aplicando las ecuaciones de flujo isoentrópico, o bien a partir de la tabla 11.

En cuanto a los signos de los ángulos de desviación θ y de Prandtl-Meyer v , se han de considerar positivos cuando el giro del flujo es en sentido contrario al de las agujas del reloj y negativos si es en el mismo sentido.

Todo cuanto se ha expuesto hasta aquí sobre las ondas de choque y las ondas de expansión es sumamente útil para comprender el funcionamiento del denominado *tubo de choque* y analizar las condiciones del flujo en él.

(Ver [ZH76] y [Em86])



Ejercicios

Ejercicio 1

La onda generada por una explosión nuclear se desplaza a una velocidad de 15.240 m/s en el aire atmosférico cuya presión barométrica es de $1,0133 \cdot 10^5$ Pa y la temperatura, de 294,4 °K.

Calcula:

- El número de Mach de la onda de choque relativa al aire estacionario.
- La presión y la temperatura de estancamiento detrás de la onda de choque, relativas a un observador fijo.

Resolución:

- La velocidad del sonido en el aire atmosférico es:

$$a = (\gamma RT)^{1/2} = (1,4 \cdot 287,04 \cdot 294,4)^{1/2} = 343,96 \text{ m/s}$$

por consiguiente, el número de Mach es:

$$M = V / a = 15.240 / 343,96 = 44,30$$

- Detrás de la onda de choque, el número de Mach viene dado por la ecuación:

$$M_2 = \left(\frac{M_1^2 + 2 / (\gamma - 1)}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1} \right)^{1/2}$$

Sustituyendo valores $\gamma = 1,4$ y $M_1 = 44,30$,

$$\text{se obtiene } M_2 = \left[\frac{(44,30)^2 + 5}{7(44,30)^2 - 1} \right]^{1/2} = 0,3785.$$

La relación de presiones se expresa:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2,8}{2,4} (44,30)^2 - \frac{0,4}{2,4} = 2.289,4$

$$P_2 = 2.289,4 \cdot P_1 = 2.289,4 \cdot 1,0133 \cdot 10^5 \rightarrow P_2 = 2.319,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La temperatura T_2 se obtiene a partir de la ecuación:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right] \cdot \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2} \right], \text{ o sea:}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 2.289,4 \cdot \left[\frac{0,4}{2,4} + \frac{2}{2,4(44,30)^2} \right] = 382,54$$



Sabiendo que $T_1 = 294,4$, resulta $\rightarrow T_2 = 112.619,43$ K

Detrás de la onda de choque, la celeridad de la onda acústica con respecto a un observador fijo es:

$$a_2 = \{\gamma R T_2\}^{1/2} = \{1,4 \cdot 287,04 \cdot 112.619,43\}^{1/2} = 6.727,32 \text{ m/s}$$

y la velocidad del aire: $V_2 = a_2 \cdot M_2 = 6.727,32 \cdot 0,3785 = 2.546,29 \text{ m/s}$

La velocidad del aire detrás de la onda de choque con respecto a un observador fijo tiene por valor:

$$V_{2f} = V - V_2 = 15.240 - 2.546,29 \rightarrow V_{2f} = 12.693,7 \text{ m/s}$$

Y el número de Mach es $M_{2f} = V_{2f} / a_2 = 12.693,7 / 6.727,32 \rightarrow M_{2f} = 1,8869$

A partir de tablas de flujo isentrópico para $M_{2f} = 1,887$ se encuentra: $\frac{T_2}{T_{20f}} = 0,584$

$$\frac{P_2}{P_{20f}} = 0,15227$$

Por consiguiente, los valores de presión y temperatura de estancamiento son:

$$P_{20f} = P_2 / 0,15227 = 2.319,85 / 0,15227 \rightarrow P_{20f} = 15.235,11 \text{ Pa}$$

$$T_{20f} = T_2 / 0,584 = 112.619,43 / 0,584 \rightarrow T_{20f} = 192.841,49 \text{ K}$$

(Ver [ZH76])

Ejercicio 2

Un avión vuela a una velocidad de 180 m/s y a una altitud de 12.000 m, donde la temperatura del aire es de -20°C y su presión absoluta es de $2 \cdot 10^4$ Pa.

Suponiendo régimen homoentrópico, se pregunta:

1. Determinar la velocidad crítica del aire con respecto al avión.
2. Determinar la velocidad límite del aire con respecto al avión.

Resolución:

1. Aplicando Bernoulli para un fluido compresible en movimiento homoentrópico, la conservación de la energía por unidad de masa se escribe:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} V^{*2}$$

Conocida la velocidad del avión, el cálculo del cuadrado de la velocidad del sonido permite determinar el valor de la velocidad crítica. En efecto:

$$a^2 = \gamma R T = 1,4 (8.315/28,96) \cdot (273 - 20) = 101.697,96 \text{ m}^2/\text{s}^2$$



Sustituyendo el valor de a^2 en la ecuación (1), se obtiene:

$$V^* = \left[\frac{2(1,4-1)}{1,4+1} \left(\frac{180^2}{2} + \frac{101698^2}{1,4-1} \right) \right]^{1/2}, \text{ de donde } V^* = 300,25 \text{ m.s}^{-1}$$

2. La velocidad límite, o velocidad máxima, que se puede alcanzar por expansión hasta una temperatura absoluta igual a cero se calcula mediante la ecuación:

$$\frac{V_l^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1}$$

Despejando la velocidad límite y sustituyendo valores, se obtiene:

$$V_l = \left[2 \left(\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \right) \right]^{1/2} = \left(180^2 + \frac{2}{\gamma-1} 101.697,96 \right)^{1/2}$$

de donde:

$$V_l = 735,45 \text{ m.s}^{-1}$$

(Ver [ZH76])

Ejercicio 3

Una onda de choque oblicua está orientada un ángulo de 70° con respecto de la dirección del vector velocidad corriente arriba. Sabiendo que el número de Mach de la corriente antes de la onda es de 3, ¿cuáles son el número de Mach, la temperatura y la velocidad de la corriente después de la onda de choque?

La temperatura del aire antes de la onda es de 6°C .

Resolución:

Sea V_{1n} la componente normal a la onda de la velocidad de la corriente antes de ella, de ángulo α ; entonces:

$$V_{1n} = V_1 \sin \alpha, \quad M_{1n} = V_{1n} / a_1 = (V_1 / a_1) \sin \alpha = M_1 \sin \alpha$$

$$a_1 = (\gamma R T)^{1/2} = (1,4 \cdot 287,14 \cdot 279)^{1/2} = 334,9 \text{ m.s}^{-1}, \quad \sin \alpha = \sin 70^\circ = 0,891$$

$$M_{1n} = 3 \cdot 0,891 = 2,673 \rightarrow M_{2n}^2 = \frac{M_{1n}^2 + \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)}{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) M_{1n}^2 - 1} = 0,2478 \rightarrow M_{2n} = 0,4978$$

La relación entre temperaturas de la corriente después y antes del choque se expresa:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{1n}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2n}^2}; \text{ sustituyendo valores, se obtiene } T_2 = 645,69 \text{ K}$$



La velocidad de la corriente después de la onda de choque se expresa:

$$V_2 = \left(V_{2n}^2 + V_{2t}^2 \right)^{1/2} = \left(a_2^2 M_{2n}^2 + [a_1 M_1 \cos 70^\circ]^2 \right)^{1/2}$$

donde:

$$a_2 = (\gamma RT)^{1/2} = (1,4 \cdot 287,14 \cdot 645,69)^{1/2} = 509,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$V_2 = \left[(509,48 \cdot 0,4978)^2 + (334,9 \cdot 3 \cdot 0,454)^2 \right]^{1/2} = 521,89$$

$$M_2 = V_2 / a_2 = 521,89 / 509,48 = 1,024$$

(Ver [Vi93])

→7



El tubo de choque. Ondas de detonación y de deflagración

7.1 Introducción

Las variaciones de presión y de temperatura provocadas por el paso de una onda de choque por un fluido pueden verse acompañadas por una modificación del estado químico de este fluido si se trata de una mezcla reactiva. Es así, en ciertas condiciones, en la propagación de la combustión en mezclas formadas por un combustible y un portador de oxígeno. Entonces, la combustión se transmite paso a paso mediante una onda de choque intensa que produce la inflamación por compresión adiabática y que separa cada instante el gas en dos regiones diferentes, una compuesta por la mezcla fresca y la otra, por los gases de combustión.

En este capítulo, se describen básicamente los fenómenos de detonación y de deflagración que resultan de las explosiones según si la velocidad de propagación de las ondas generadas es supersónica o subsónica, respectivamente. De hecho, la detonación es una combustión supersónica que implica la existencia de una onda expansiva y una zona detrás de ella, mientras que la deflagración es una combustión súbita cuya llama se propaga a baja velocidad. En una deflagración, el frente de llama avanza por difusión térmica. Por el contrario, en una detonación, la combustión está asociada a una onda de choque.

En estos fenómenos, es esencial conocer la cinética química de los gases reactivos, particularmente en lo relativo al proceso de ignición. Es por ello, entre otras razones, que CalTech realizó las primeras aplicaciones del *tubo de choque* al estudio de la cinética química de alta temperatura.

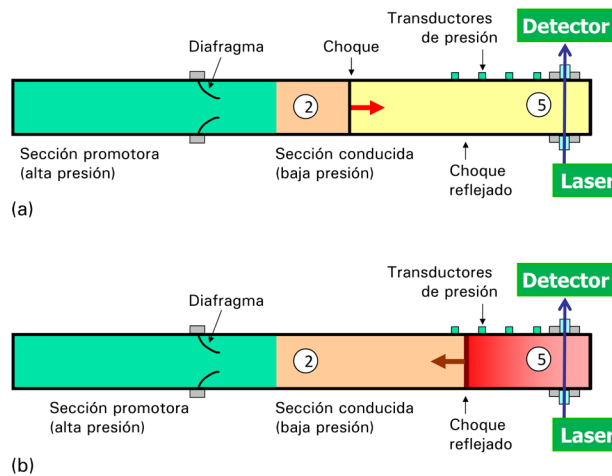
Por su interés en varios campos de la dinámica de gases, la cinética química, la aerodinámica, la transferencia de calor, la astrofísica e, incluso, en los efectos de impacto de las ondas de explosión en los seres humanos, se ha incluido el apartado siguiente.



7.2 El tubo de choque

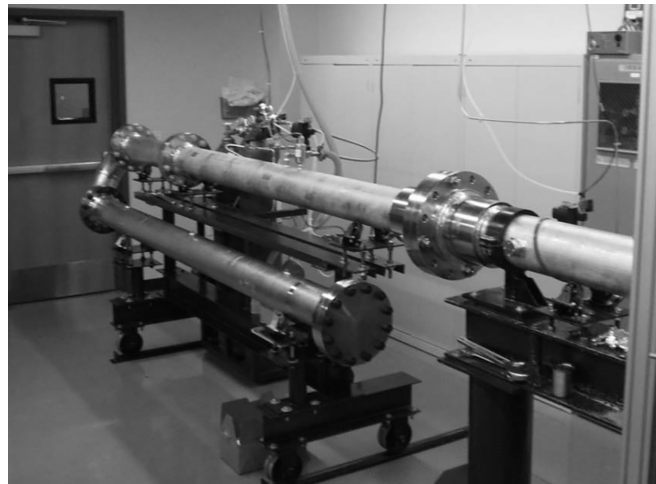
El tubo de choque consiste de dos secciones: una denominada *sección conductora o promotora* y la otra denominada *sección conducida o de prueba*. Estas dos secciones están llenas de gas a presión diferente e inicialmente están separadas por un diafragma delgado. En estas secciones, el gas que las llena puede ser de distinta naturaleza y encontrarse a diferente temperatura. El parámetro básico del tubo de choque es la relación de presión en el diafragma. La rotura del diafragma crea una onda de choque, que se propaga en la sección de prueba, y una onda de expansión, que se propaga en la sección promotora, como se muestra en la figura 7.1 (a y b).

Fig. 7.1.
Esquema del tubo de choque¹



En la figura 7.2, se muestra una imagen fotográfica de la sección promotora de un tubo de choque.

Fig. 7.2.
Vista de la sección promotora y del diafragma de un tubo de choque¹





La frontera móvil entre el fluido procesado por choque y el fluido expandido se denomina *superficie de contacto*. Las condiciones a través de la superficie de contacto son una presión y una velocidad constantes. La onda de choque incidente recorre todo el camino a lo largo de la sección de prueba hasta que se refleja en la pared extremo del tubo.

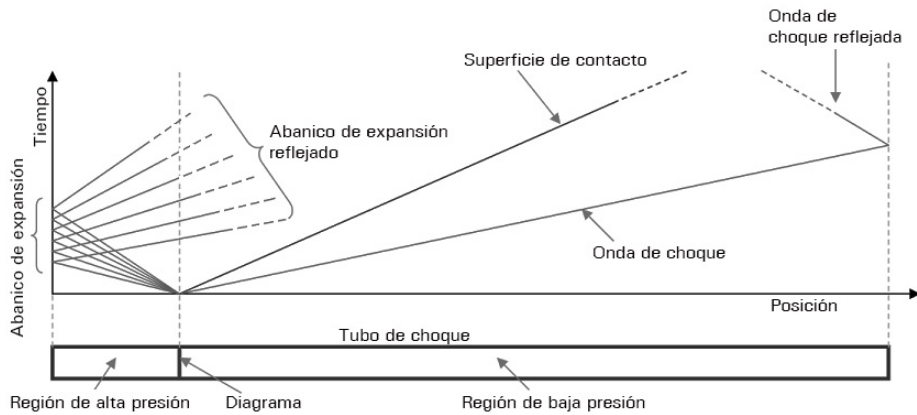


Fig. 7.3. Diagrama de propagación de onda en el tubo de choque²

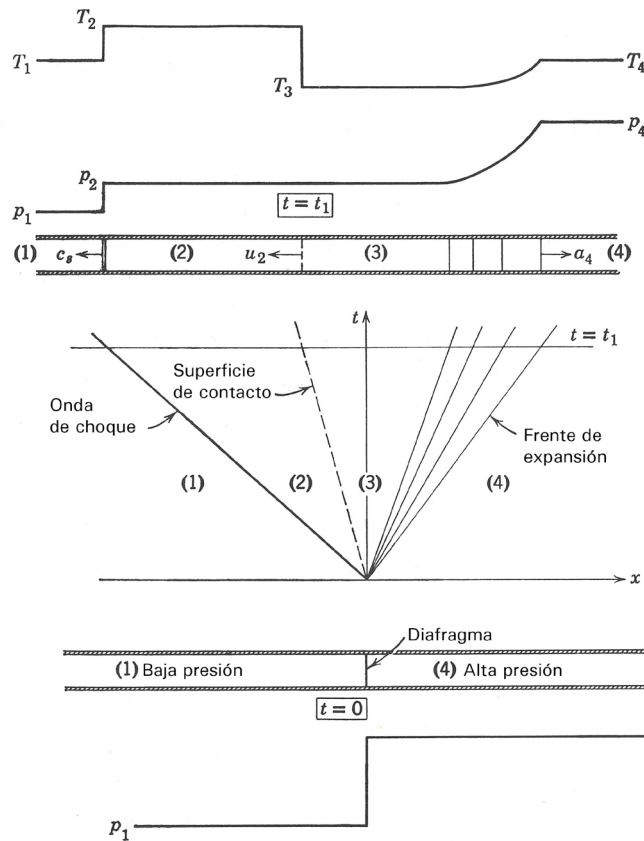


Fig. 7.4. Evolución espacio-temporal de los frentes de onda y del estado del gas (P,T) a lo largo del tubo de choque después de la rotura del diafragma [LR57]



Similarmente, la onda de expansión se refleja en el otro extremo del tubo, al final de la sección de operación.

El choque reflejado interactúa con la superficie de contacto o con la onda de expansión reflejada.¹ La onda de choque confiere al gas de la sección de prueba una aceleración brutal, acompañada por un salto de temperatura, de presión y de densidad.

La posición en el transcurso del tiempo, a partir del instante de rotura del diafragma, de la superficie de contacto y de los frentes de onda de presión y de expansión desde la posición del diafragma se muestra en la figura 7.4. En ella, también se ha representado la evolución de la presión y de la temperatura del gas a lo largo del tubo.

En el instante inicial, cuando el diafragma está roto, la distribución de presión es idealmente un escalón que se desdobra en una onda de choque que se propaga por el interior de la cámara de expansión a una velocidad c_s y una onda de expansión que se propaga por la cámara de compresión a una velocidad a_4 en su frontera.

Sean P_2 la presión del gas una vez ha sido barrido por la onda de choque y P_3 la presión una vez barrido el gas por la onda de expansión; la interfaz de las regiones (2) y (3) es la superficie de contacto. Despreciando difusión, pues ambas regiones están permanentemente separadas por la superficie de contacto, y suponiendo ausencia de fenómenos disipadores, la onda de choque mantiene una velocidad constante y, por tanto, en un sistema de referencia fijo a la onda de choque, el flujo es unidimensional y estacionario.

7.2.1 Principios del tubo de choque simple

En general, se puede suponer que el gas de la sección promotora (alta presión) se comporta como un gas ideal y que la expansión es un proceso isoentrópico en la forma de ondas centradas. Este supuesto está justificado porque dicho gas es habitualmente monoatómico y la temperatura es relativamente baja durante la expansión, salvo en algunos casos.

Las condiciones suficientes para determinar la intensidad de choque P_2 / P_1 , y la intensidad de expansión P_3 / P_4 en términos de la relación de presión del diafragma P_4 / P_1 son:

- Igualdad de valor de la presión en cada lado de la superficie contacto, $P_2 = P_3$.
- Idéntico valor de la velocidad, $u_2 = u_3$, donde u_3 es la velocidad de la superficie de contacto.

Así, a través de la onda, la magnitud $u + \frac{2a}{\gamma - 1}$ (invariante de Riemann) se mantiene constante, o sea:

$$\frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} = \frac{2a_3}{\gamma_4 - 1} + u_2 \quad (7.1)$$

pues $\gamma_3 = \gamma_4$, $u_2 = u_3$ (interfaz), $u_4 = 0$.

Además, dado que $P_2 = P_3$ tenemos:

$$\frac{P_4}{P_2} = \left(\frac{a_4}{a_3} \right)^{2\gamma_4 / \gamma_4 - 1} \quad (7.2)$$



de suerte que:

$$\frac{P_4}{P_2} = \left(\frac{a_4}{a_4 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} u_2} \right)^{2\gamma_4 / (\gamma_4 - 1)} \quad (7.3)$$

Por otra parte, u_2 y P_2 están relacionados a las condiciones iniciales del gas de prueba por las ecuaciones de Rankine-Hugoniot. En el caso congelado ($\gamma_1 = \gamma_2$), se obtiene a partir de esta condición y de la ecuación 7.3, la ecuación que relaciona el número de Mach de la onda de choque M_s a las condiciones iniciales en ambas secciones (cámaras):

$$\frac{P_4}{P_2} = \frac{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \left(\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1} M_s^2 - 1 \right)}{\left[1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{a_1}{a_4} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \right]^{2\gamma_4 / (\gamma_4 - 1)}} \quad (7.4)$$

La ecuación 7.4 da una idea cualitativamente correcta de la importancia de varios parámetros. Así, a fin de obtener el número de Mach lo más alto posible, la relación de las presiones iniciales P_4 / P_1 ha de ser la mayor posible, pero la relación a_4 / a_1 ha de ser también máxima. En particular, cuando $(P_4 / P_1) \rightarrow \infty$, $M_s \rightarrow \frac{(\gamma_1 + 1)}{(\gamma_4 - 1)} \frac{a_4}{a_1}$.

La ecuación 7.4 también puede escribirse en la forma:

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \left[1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(a_1 / a_4)(P_2 / P_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1} \sqrt{2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(P_2 / P_1 - 1)}} \right]^{-2\gamma_4 / (\gamma_4 - 1)} \quad (7.5)$$

La ecuación 7.5 da la intensidad del choque P_2 / P_1 implícitamente como una función de la relación de presión en el diafragma. La intensidad de expansión se obtiene, entonces, a partir de la ecuación:

$$\frac{P_3}{P_4} = \frac{P_3}{P_1} \frac{P_1}{P_4} = \frac{P_2 / P_1}{P_4 / P_1} \quad (7.6)$$

Una vez conocida la intensidad de choque, todas las otras magnitudes se determinan fácilmente a partir de las ecuaciones de la onda de choque recto. En las dos caras de la superficie de contacto, las presiones y las velocidades del fluido son las mismas pero las densidades y las temperaturas son distintas. La temperatura tras la onda de expansión esta viene dada por la relación isoentrópica:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{(\gamma_4 - 1) / \gamma_4} = \left(\frac{P_2 / P_1}{P_4 / P_1} \right)^{(\gamma_4 - 1) / \gamma_4} \quad (7.7)$$



y la temperatura T_2 tras la onda de choque viene dada por la ecuación de Rankine-Hugoniot:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{P_2}{P_1}}{1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{P_1}{P_2}} \quad (7.8)$$

Se ha encontrado que, a valores bajos de la relación de presión, los valores de la velocidad y de la intensidad del choque coinciden bien con las predicciones teóricas; las discrepancias se inician a relaciones de presión más bien altas.

En la tabla 7.1, se reflejan los valores de salto de choque para dos gases de γ de distinto valor, obtenidos experimentalmente en el tubo de choque que describe la referencia 1.

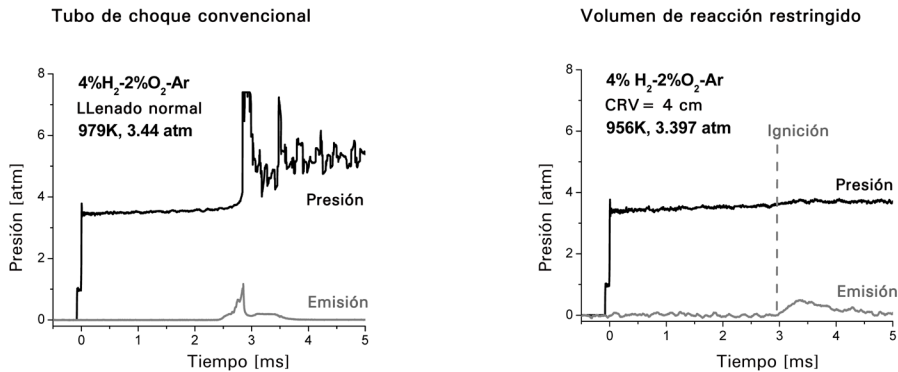
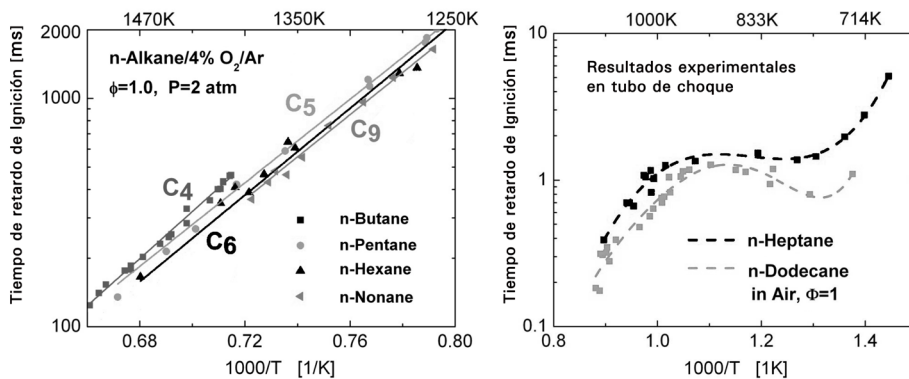
Tabla 7.1.
Valores del salto
de choque¹

γ	M_1	P_2/P_1	P_5/P_2	T_2/T_1	T_5/T_2	ρ_2/ρ_1	ρ_5/ρ_2	W_R/W_s
7/5	2,95	10	4,95	2,62	1,76	3,82	2,82	0,423
	6,56	50	7,12	9,31	2,28	5,37	3,11	0,351
	∞	∞	8,00	∞	2,29	6,00	3,50	0,333
5/3	2,87	10	4,22	3,42	1,94	2,92	2,17	0,589
	6,34	50	5,54	13,4	2,37	3,72	2,31	0,517
	∞	∞	6,00	∞	2,40	4,00	2,50	0,500

7.2.2 Características del tubo de choque

Las características principales del tubo de choque son las siguientes:

- Calentamiento/compresión instantáneas por ondas de choque
- Conocimiento preciso de las condiciones de choque incidente y reflejado
- Amplio rango de valores de T y P de choque, una vez reflejado (600-4.000 K, 0,1-1.000 atm)
- Uniforme T y P durante largos tiempos de ensayo mediante inserciones en la sección promotora
- Aplicando el enfoque del volumen de reacción restringido (en inglés, CRV), se consigue mantener aproximadamente constante la presión a lo largo de todo el tiempo de experimentación, mientras que en el tubo de choque convencional se suceden grandes cambios de presión. La figura 7.5 (a y b) muestra la evolución temporal de la presión en un proceso de ignición de hidrógeno a 950 K, realizado en un tubo de choque convencional y en un volumen de reacción restringido, respectivamente.
- Es adecuado para examinar las correlaciones del tiempo de ignición en diferentes alcanos y determinar el tiempo de retardo de la ignición en función de la temperatura (v. figura 7.6a y 7.6b).


 Fig. 7.5¹.

 Fig. 7.6¹.
 Tiempo de retardo de ignición en función de la temperatura

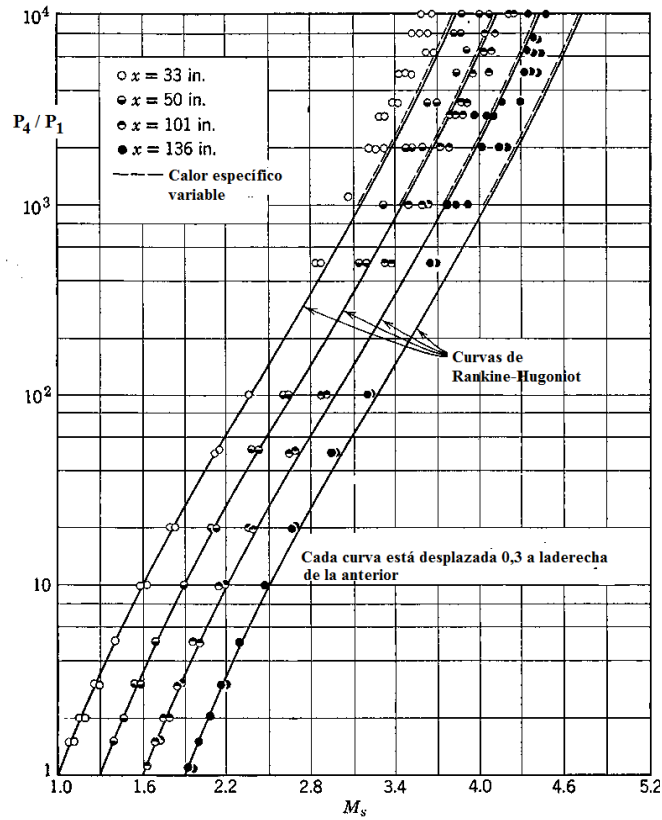
7.3 Limitaciones tecnológicas

Las dimensiones limitadas del tubo y la gran velocidad con que se propagan las ondas en él determinan que el flujo de gas de prueba entre la onda de choque y la interfaz se desarrolle en un tiempo muy corto y puede ser perturbado por varios sistemas de onda que se propagan en él. Evidentemente, el esquema de funcionamiento subyacente en el modelo de funcionamiento teórico del tubo es solo una aproximación a la realidad, pues varios fenómenos tienden a modificarlo influyendo en los fenómenos de no equilibrio estudiados en él. Los efectos más significativos son las perturbaciones relacionadas con la presencia de la capa límite de la pared y, en menor extensión, los que resultan de la rotura no instantánea del diafragma.

La figura 7.7 muestra la variación de la velocidad inicial de la onda de choque con la relación de presión en el diafragma y la distancia (x) (con aire en ambas cámaras).²



Fig. 7.7.
[LR57]

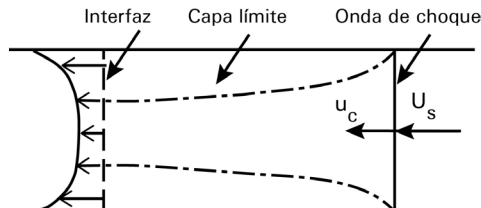


7.3.1 Capa límite

La capa límite que se desarrolla a lo largo de las paredes del tubo entre el choque incidente y la interfaz actúa como un sumidero de la parte no disipadora del gas de prueba, de modo que se produce una pérdida de este gas a través de la interfaz en la capa límite (v. fig. 7.8).

Ello conduce a una desaceleración de la onda de choque, a una aceleración de la interfaz y, por consiguiente, a valores no constantes de las magnitudes de flujo. Este régimen no estacionario tiende a un régimen límite estacionario, obtenido teóricamente cuando el flujo másico total a través de la onda de choque es igual al que se ha perdido a través de la interfaz.

Fig. 7.8.





Entre otras peculiaridades y efectos de la capa límite, cabe citar los siguientes:

- El flujo másico perdido aumenta a medida que la distancia de separación entre la onda de choque y la interfaz aumenta.
- La onda de choque y la interfaz en el régimen límite tienen la misma velocidad (constante), pero las magnitudes de flujo, aun siendo estacionario, varían entre el choque y la interfaz.
- Los efectos son tanto más significativos cuanto menores son la presión inicial y la sección recta del tubo.

La pérdida de gas caliente a través de la interfaz tiende a crear un gradiente de presión normal a la pared y, por tanto, tiende a conferir a la interfaz una forma convexa creciente.

7.3.2 Apertura no instantánea del diafragma

En un tubo de choque real, la onda de choque no se crea instantáneamente sino que se forma por la coalescencia de las ondas de compresión que surgen durante la apertura progresiva del diafragma y se acelera poco a poco durante un tiempo más bien largo después de su apertura completa. Para obtener un choque a velocidad constante, se necesitan varios metros de tubo.

Conocidas la duración total de la apertura del diafragma, la relación de presión de la sección promotora/sección de prueba inicial y la composición de los correspondientes gases, es posible describir la fase de aceleración de la onda de choque y las propiedades relacionadas del flujo. La onda de choque se acelera fuertemente a partir de la apertura del diafragma hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual se va desacelerando hasta alcanzar el valor límite dado por la ecuación 7.5.

La figura 7.9 muestra la influencia del tiempo de apertura del diafragma sobre la evolución de la onda de choque. La fase de aceleración es tanto más corta cuanto mayor es la relación de presiones inicial, cuanto más ligero es el gas de la sección promotora y cuanto menor es el tiempo de apertura.

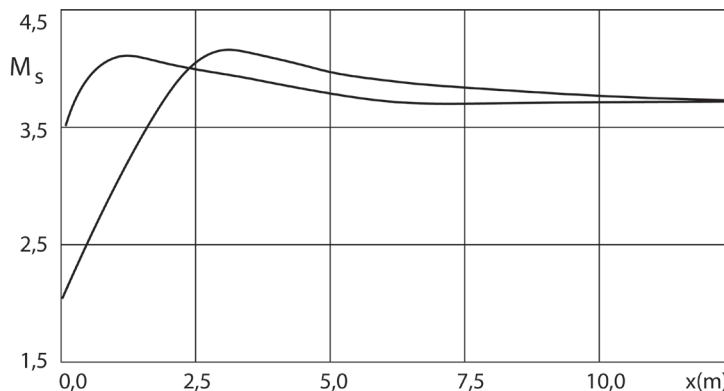


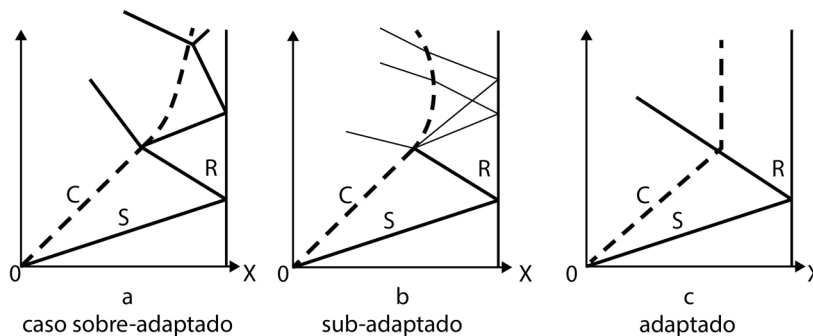
Fig. 7.9.
Influencia del
tiempo de apertura
del diafragma so-
bre la evolución de
la onda de choque.
 $P_4/P_1=17.700$
 $t_{ap}(A)=300\mu s$
 $t_{ap}(B)=600\mu s$

7.3.3 Ondas de choque reflejadas

En el extremo del tubo, se refleja la onda de choque que retrocede por el gas ya comprimido y calentado por la onda de choque incidente. Así, se produce un ulterior incremento de temperatura, presión y densidad del gas de prueba, que crea unas condiciones más favorables para iniciar procesos reactivos.

Como en el caso del choque incidente, varios son los procesos aerodinámicos que pueden perturbar el estado del gas de prueba corriente abajo del choque reflejado.

Fig. 7.10.
Interacción del
choque reflejado y
la superficie de
contacto



Uno de los efectos perturbadores está asociado a la interacción del choque reflejado y la superficie de contacto, como se muestra en la figura 7.10.

Tres casos de interacción son posibles: el choque reflejado en el extremo del tubo se refleja, a su vez, sobre la interfaz en forma de choque (caso a) o en forma de ondas de rarefacción (caso b), o bien atraviesa la interfaz sin reflejarse (caso c). En los dos primeros casos, que son los más frecuentes, las propiedades del gas de prueba corriente abajo del choque reflejado resultan modificadas y el tiempo de ensayo útil puede verse sumamente reducido, mientras que, en el tercer caso, teóricamente es muy grande.

(Ver ref. 3)

7.4 Aplicaciones

Son muchas las aplicaciones del tubo de choque gracias a dos características peculiares: una muy corta duración del flujo, del orden de los milisegundos, y los altos valores de entalpía de estancamiento que pueden obtenerse.

Los cambios bruscos de la condición del flujo en el frente del choque se pueden utilizar para estudiar los efectos aerodinámicos transitorios, así como la dinámica y la respuesta térmica.

En el campo de la física molecular, el tubo de choque aporta medios simples para producir rápidos cambios en el estado de un fluido, a fin de observar efectos de relajación, velocidades de reacción, etc. Además, dado que se pueden alcanzar valores muy altos de entalpía, es posible estudiar fenómenos de disociación, ionización, etc.



Los tubos de choque equipados con detectores láser facilitan la investigación de la cinética química de las reacciones de cadena ramificada, en particular, los estudios de ignición (tiempo de retardo de ignición) (v. figura 7.6).

7.5 Ondas de combustión, de detonación y de deflagración

Sea π el plano de una onda que separa el fluido en dos regiones, A y B, de naturaleza química diferente. Se admite que estos gases se encuentran en equilibrio químico y que la reacción tiene lugar únicamente en el seno de la onda (v. figura 7.11). Las ecuaciones básicas son:

La ecuación de Hugoniot:³

$$(P_1 + P_2)(v_1 - v_2) = 2(u_2 - u_1) \quad (7.9)$$

y la de las velocidades de los fluidos:

$$V_1^2 = v_1^2 \left(\frac{P_1 - P_2}{v_2 - v_1} \right) \quad V_2^2 = v_2^2 \left(\frac{P_1 - P_2}{v_2 - v_1} \right) \quad (7.10)$$

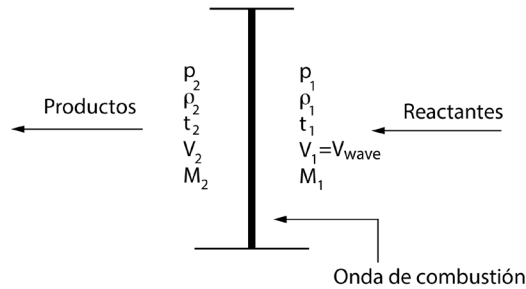


Fig. 7.11.
[ZH76]

Dos clases de ondas de choque y de combustión son posibles: las que propagan una compresión, $P_2 > P_1$, $v_2 < v_1$, y las que propagan una expansión, $P_2 < P_1$, $v_2 > v_1$. Las primeras son las *detonaciones* y las segundas, las *deflagraciones*.

Sean $u_{2,B} - u_{1,A}$ la variación de energía interna del gas a través de la onda y $[u_B]_{v_1, T_1}$ la energía interna específica del gas B en un estado intermedio a la temperatura T_1 y con un volumen específico v_1 .

Se puede escribir:

$$u_{2,B} - u_{1,A} = \left\{ [u_B]_{v_2 T_2} - [u_B]_{v_1 T_1} \right\} + \left\{ [u_B]_{v_1 T_1} - [u_A]_{v_1 T_1} \right\} \quad (7.11)$$

Asimilado el gas B a una mezcla de gases perfectos, se cumple:

$$\left\{ [u_B]_{v_2 T_2} - [u_B]_{v_1 T_1} \right\} = \int_{T_1}^{T_2} (c_v)_B dT \quad (7.12)$$

donde $(c_v)_B$ es el calor específico medio de la mezcla B.

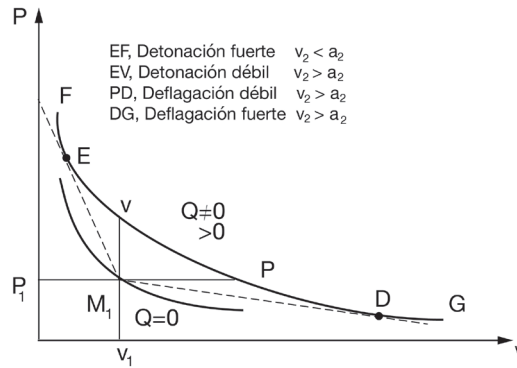


El segundo sumando del primer miembro de la ecuación 7.11 representa el poder calorífico a volumen constante del gas A a la temperatura T_1 , o sea, $[P_{c_v}]_{T_1}$. Por consiguiente, la ecuación de Hugoniot¹ puede escribirse de la forma:

$$\frac{1}{2}(P_1 + P_2)(v_1 - v_2) + [P_{c_v}]_{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} (c_v)_2 dT \quad (7.13)$$

Para un gas A determinado, fijados T_1 y v_1 , la ecuación 7.9 aporta una relación entre P_2 y v_2 a la que corresponde, en el diagrama P, v , una curva FG que, como ya se ha dicho en otro apartado anterior, recibe el nombre de *adiabática dinámica*. Todos los puntos de esta curva representan estados posibles para el gas B; a cada uno de ellos corresponde una onda de choque y de combustión (v. figura 7.12).

Fig. 7.12.



Si M_1 es un punto de coordenadas P_1, v_1 , el punto P de la ordenada P_1 representa las combustiones a presión constante y el punto V, las combustiones a volumen constante. Al arco PV no le corresponde onda de choque y de combustión alguna, ya que en todo punto de dicho arco se tiene: $P_2 > P_1$ y $v_2 > v_1$.

En el arco VF, se tiene $P_2 > P_1$ y $v_2 < v_1$, por lo cual todos sus puntos corresponden a *detonaciones*, en que $V_1 > a_1$ y $M_1 > 1$.

En el arco PG, se tiene $P_2 < P_1$ y $v_2 > v_1$, de modo que todos sus puntos representan *deflagaciones*, en que $V_1 < a_1$ y $M_1 < 1$.

Las ecuaciones que gobiernan las ondas de combustión son la de continuidad o conservación del flujo másico específico $G = \rho V = Cte$, la de conservación del impulso $P + \rho V^2 = Cte$ y la de conservación de la energía, escrita de forma que la energía interna sensible se sustituye por la suma de esta y de la *energía de formación* u_f , o sea, $u_c = u + u_f$. Así, a través de la onda de combustión, se cumple:

$$u_1 + P_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + \Delta u_c = u_2 + P_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (7.14)$$

La velocidad de detonación supersónica no puede describirse en términos de procesos de conductividad térmica y de difusión responsables de la propagación lenta de la llama. La propagación de llama por conductividad térmica e intercambio de difusión entre la zona de combustión y el gas que no ha reaccionado está gobernada por un movimiento térmico molecular y, por término medio, es menor que la velocidad del sonido. Maillard y Chatelier⁸ fueron los primeros en explicar correctamente el fenómeno y sugirieron que el principal mecanismo para la propagación de la combustión era la compresión.

La teoría de la detonación basada en la teoría de las ondas de choque fue propuesta originalmente por el físico ruso Michelson¹⁰.

Años más tarde, la teoría fue desarrollada independientemente por Chapman, a la cual Jouguet realizó valiosas contribuciones, uno de cuyos resultados fue la generalización de la teoría de la onda de choque. La onda de detonación fue representada como una onda de choque con liberación de energía dentro del frente de onda. Desconocida la publicación de Michelson fuera de Rusia, la teoría recibió el nombre de *Chapman-Jouguet*. Esta teoría ha sido objeto de notables mejoras, aportadas por Zeldovich¹¹, Von Neumann¹² y Döring¹³.

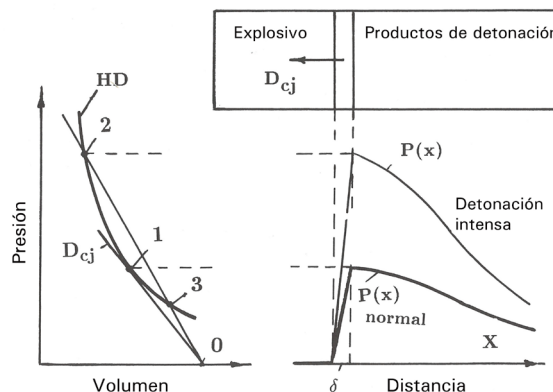
Teoría fluidodinámica de detonación de Chapman-Jouguet

La teoría de detonación de Chapman-Jouguet no ha sido desarrollada por completo ni ha sido confirmada adecuadamente, si bien ha posibilitado la estimación de la velocidad de la onda de detonación.

La figura 7.15 muestra no solo cómo el explosivo cambia en productos de detonación simultáneamente a su compresión en el interior del frente de onda de choque de detonación δ , sino también la adiábata de Hugoniot para la onda de detonación, las dos líneas rectas de Michelson –tangente y secante a la adiábata– y los puntos representativos de los parámetros de las ondas de detonación normal, de Chapman-Jouguet, fuerte y débil, además de la evolución de la presión en la mezcla explosiva hasta su detonación, y la de los productos de detonación en función de la distancia al frente de onda.

Al reconocer que, de todas las líneas rectas trazadas a partir de un punto de estado inicial 0 , solo la línea tangente tiene un punto común con la adiábata de Hugoniot, Chapman propuso una regla que define los parámetros de la onda de detonación de estado estacionario como los correspondientes al punto P_1, v_1 de contacto de la recta con la adiábata de Hugoniot. Este punto recibió la denominación de *punto de Chapman-Jouguet*.

Fig. 7.15.
Modelo de detonación
de Chapman-Jouguet
[Dr99]





En esencia, la teoría de Chapman-Jouguet está relacionada únicamente con las características energéticas de las ondas de detonación. La teoría no tiene en cuenta la cinética de reacción química.

Modelo físico de la detonación debido a Zeldovich-Von Neumann-Döring

Este modelo, debido inicialmente a Zeldovich, con la contribución posterior de Von Neumann y Döring, independientemente, se fundamenta en una zona de reacción química infinitamente delgada.

La figura 7.16 ilustra cómo la mezcla explosiva se comprime, sin cambio químico, en el interior del frente de onda de choque de detonación δ , y cómo su descomposición se produce detrás del frente en el estado comprimido, por choque bajo el efecto de la alta temperatura asociada a él.

La curva HS representa la adiabática de Hugoniot para onda de choque sin reacción química, la curva HD representa la adiabática de Hugoniot para onda de detonación y las líneas 012 y 0432' que son las rectas de Michelson.

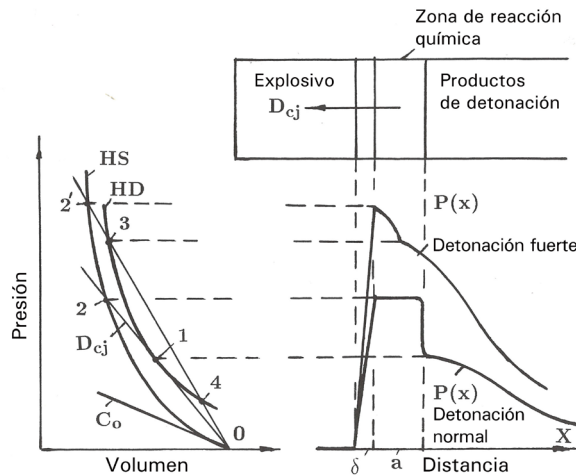


Fig. 7.16.
[Dr99]

Los puntos 1, 3 y 4 representan los estados P, v correspondientes a la detonación normal de Chapman-Jouguet, a la detonación fuerte y a la detonación débil, respectivamente.

El estado comprimido por choque está especificado por uno de los puntos de la curva HS y el estado CJ, por uno de los puntos de la curva HD.

La onda de detonación estacionaria requiere que ambos puntos sobre HS y HD estén localizados en la intersección de las curvas, con una línea recta que pasa por el punto de estado inicial, pues todos los puntos de esta línea corresponden a una velocidad de propagación común. De todas las rectas trazadas a partir del punto de estado inicial, solo la tangente a la curva HD determina la velocidad y otros parámetros de la onda de detonación.

La velocidad de detonación¹⁴ es inestable con respecto a los efectos de las ondas de rarefacción, con las cuales están en comunicación efectiva, cuando su valor es menor que el de la suma de las velocidades local del sonido y de las partículas.



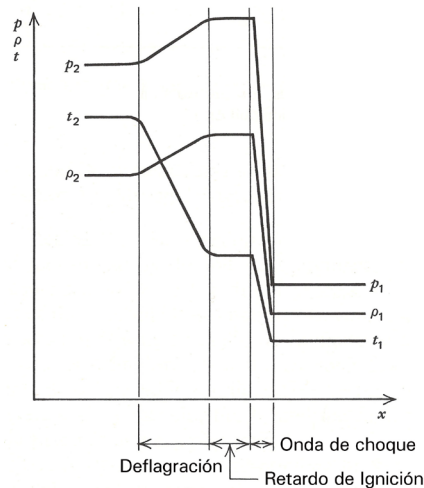
Por otra parte, la teoría ZND predijo una presión elevada dentro de la zona de reacción. Es la zona *a*, que consiste en el explosivo comprimido por choque y su transformación en productos de detonación.

La figura 7.17 muestra la estructura de una onda de detonación ZND. Como resultado del paso de la onda de choque por la mezcla explosiva, la presión, la densidad y la temperatura del gas mezcla aumentan abruptamente.

A esta etapa, le sigue un tiempo breve de retardo de ignición antes de que ocurra la deflagración, hasta alcanzar, por último, el estado final de la onda de detonación.

La formación de una onda de detonación depende también de la relación de mezcla combustible/oxidante. A este respecto, hay unos límites definidos, el inferior y el superior a la relación de mezcla detonable, denominados *límites de detonación*. Fuera de estos límites, la onda de detonación no se forma.

Fig. 7.17.
[ZH76]



Ondas de deflagración

Las deflagraciones corresponden a estados representados en el tramo inferior de la curva de Hugoniot JK próximos al punto de Chapman-Jouguet. La velocidad de la llama de una onda de deflagración está controlada por una combinación de conducción de calor y difusión de masa, mientras que la velocidad de una onda de detonación está controlada por los incrementos bruscos de presión, de densidad y de temperatura producidos por la onda de choque normal.

Para predecir las velocidades de las ondas de deflagración, se han propuesto varias teorías. Básicamente, son tres:

- teoría térmica, fundamentada en la transferencia de calor de tasa controlada;
- teoría de la difusión, basada en la transferencia de masa de tasa controlada, y
- teorías que son una combinación de las anteriores.

Las dos primeras teorías predicen un incremento en la velocidad de la llama al aumentar su temperatura, lo cual está de acuerdo con las observaciones experimentales. El tercer



modelo teórico ha sido objeto de notables análisis por parte de Zeldovich, Frank-Kamenetskii⁵ y Semenov⁶ que han aportando conocimientos que han contribuido a establecer un acuerdo razonable entre la teoría y los experimentos.

Como ocurre con las mezclas detonantes, las relaciones de mezcla que dan lugar a una onda de deflagración estacionaria se encuentran entre dos límites: el inferior y el superior, denominados *límites de inflamabilidad*, los cuales, en general, son más amplios que los límites de detonación. Spalding desarrolló una teoría para predecir los límites de inflamabilidad.

7.6 Velocidades de propagación de las ondas y de los productos de combustión: su dirección

El punto J de Chapman-Jouguet en la adiabática dinámica corresponde a un estado muy significativo que cabe analizar calculando la variación de entropía específica de los gases de combustión en la proximidad a dicho punto.

Sea una transformación elemental reversible del estado termodinámico de los gases de combustión dada por:

$$T_2 ds_2 = du_2 + d(P_2 v_2) + V_2 dV_2 \quad (7.17)$$

La ecuación 7.17 se puede simplificar procediendo de la manera siguiente:

- Sustitución de du_2 por su valor deducido mediante la ecuación de Hugoniot, considerando fijo el estado (1), o sea:

$$du_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)dP_2 - \frac{1}{2}(P_1 + P_2)dv_2$$

- Sustitución de $V_2 dV_2$ por:

$$V_2 dV_2 = \left(\frac{P_2 - P_1}{v_1 - v_2} \right) v_2 dv_2 + \frac{v_2^2}{2(v_1 - v_2)} \left(\frac{dP_2}{dv_2} + \frac{P_2 - P_1}{v_1 - v_2} \right) dv_2$$

deducido a partir de:

$$V_2^2 = v_2^2 \left(\frac{P_1 - P_2}{v_2 - v_1} \right)$$

- Aplicación de la condición de tangencia para la onda crítica en el punto J:

$$\frac{P_2 - P_1}{v_1 - v_2} = - \frac{dP_2}{dv_2}$$

El resultado final para las ondas críticas es:

$$\frac{ds_2}{dv_2} = 0 \quad (7.18)$$

Es decir, la isoentrópica de los gases de combustión que pasa por el punto J es tangente, en este punto, a la adiabática dinámica. Lo mismo sucede en el punto K.

Por otra parte, se demuestra que la entropía de los gases de combustión es mínima en J y máxima en K, condiciones en que $V_2 = a_2$, lo cual significa que, en estos puntos, la celeridad de la onda con respecto a los gases de combustión que la siguen es igual a la celeridad de la onda acústica en estos gases.



La propagación de las ondas es, pues, independiente de las condiciones corriente abajo, donde las perturbaciones no pueden alcanzar, en ningún caso, las ondas críticas. Este es el origen, en particular, de la notable estabilidad de la onda de Chapman-Jouguet, que es la que se observa habitualmente en la combustión detonante de las mezclas carburantes.

Las detonaciones fuertes se propagan a una velocidad menor que la del sonido en el gas que las sigue, lo cual también ocurre en las deflagraciones débiles. Este es el origen de la inestabilidad de las detonaciones fuertes, cuyas ondas son avanzadas fácilmente por las ondas de expansión que provienen de corriente abajo, de modo que sus velocidades se han de reducir hasta que se haya llegado al estado estable de la onda de Chapman-Jouguet. Contrariamente, para las detonaciones débiles y las deflagraciones fuertes, la onda se propaga a una velocidad superior a la celeridad del sonido en el gas que las sigue.

Por último, se expone cómo determinar la dirección de la velocidad absoluta de los gases quemados, relativa a un observador estacionario.

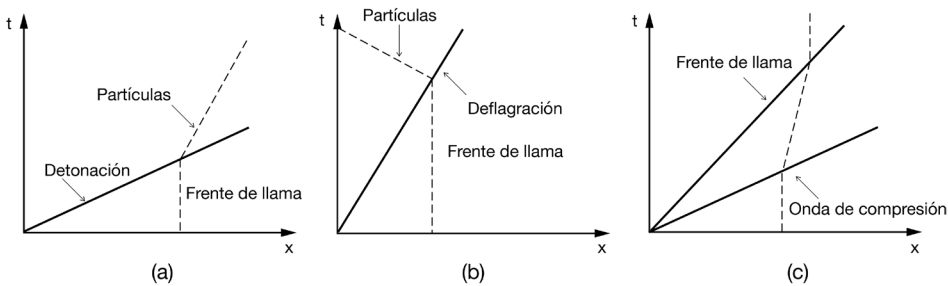
De acuerdo con el esquema del proceso de combustión representado en la figura 7.18, la velocidad de los gases de combustión es:

$$V_{gc} = V_1 - V_2 = V_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (7.19)$$

Así, para una onda de detonación en que $\rho_2 / \rho_1 > 1$, resulta $0 \leq V_{gc} \leq V_1$, o sea, los productos de combustión se mueven detrás de la onda a una velocidad inferior a la velocidad de detonación y, para una onda de deflagración en que $\rho_2 / \rho_1 < 1$, resulta $V_{gc} < 0$, lo cual significa que dichos gases se mueven en dirección opuesta a la de la onda.

La posición relativa al frente de llama de las partículas de combustión en el proceso de detonación y de deflagración se ilustra mediante un diagrama x, t en la figura 7.18.

Fig. 7.18.



A título de resumen, las características que identifican las ondas de detonación¹² y de deflagración son las siguientes:

	M_1	M_2	P_2 / P_1	V_2 / V_1	v_2 / v_1	T_2 / T_1
Detonación	>1	$<1, >1$	>1	<1	<1	>1
Deflagración	<1	<1	<1	>1	>1	>1



Ejercicios

Ejercicio 1

Por el interior de un tubo lleno de argón ($R = 208 \text{ J/kg.K}$, $\gamma = 5/3$) en reposo a 300 K , se desplaza un pistón que genera un choque que viaja a una velocidad de 3.225 m/s . Determina:

1. El número de Mach del choque y las relaciones de presión y de temperatura en él si el sistema de referencia se fija al choque en movimiento.
2. El número de Mach de la onda de choque promovida en el argón por el desplazamiento del pistón en las condiciones anteriores, y la relación de presiones y de temperaturas de remanso del gas a ambos lados de la onda.
3. Igual que (2), pero considerando el choque fijo.
4. $M_r, P_3 / P_1$ y T_3 / T_1 , si la onda de choque se refleja en el extremo del tubo considerado cerrado.

Resolución

Las figuras E1 y E2 ilustran la generación de onda de choque normal por el movimiento de un pistón, y las figuras E3 y E4, los campos del movimiento del gas a ambos lados del choque, en sus variantes móvil y fija.

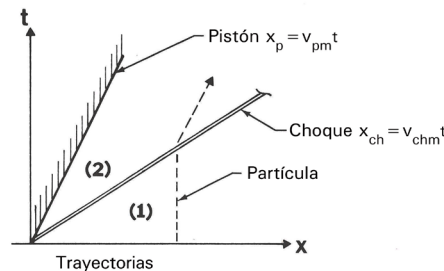


Fig. E1.1.
[Em86]

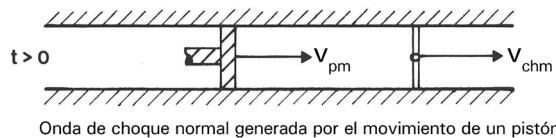


Fig. E1.2.
[Em86]

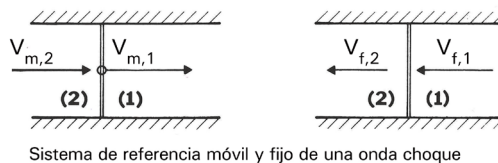


Fig. E1.3.
[Em86]

Fig. E1.4.
[Em86]

- 1) El número de mach del choque es:



$$M_{ch} = V_{pm} / a_1; \quad a_1 = \left(\frac{5}{3} 208 \cdot 300 \right)^{1/2} = 322,5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$M_{ch} = 3.225 / 322,5 = 10$$

$$\frac{P_{2m}}{P_{1m}} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{ch}^2 = 125$$

$$\frac{T_{2m}}{T_{1m}} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_{ch}^2 = 31,25$$

2) El número de Mach de la onda de choque es:

$$M_2 = \left[\frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \right]^{1/2} = 1,342$$

La relación entre las presiones de estancamiento a ambos lados de la onda de choque es:

$$\frac{P_{20}}{P_{10}} = 2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} M_{ch}^2 = 404,77$$

La relación de las temperaturas de remanso es:

$$\frac{T_{20}}{T_{10}} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} M_{ch}^2 = 50$$

3) Ahora, en el caso de sistema de referencia fijo, el número de Mach de la onda es:

$$M_{2f} = \left[\frac{1 + \left\{ (\gamma-1)/2 \right\} M_{ch}^2}{\gamma M_{ch}^2 - \left\{ (\gamma-1)/2 \right\}} \right]^{1/2} = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{1/2} = 0,497$$

La relación de las presiones de remanso a través de la onda es:

$$\left(\frac{P_{20}}{P_{10}} \right)_f = \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^\gamma \frac{1}{M_{ch}^2} \right]^{1/(\gamma-1)} = \left[0,8 \cdot 10,07 \cdot \frac{1}{100} \right]^{1,5} = 0,02287$$

La relación de las temperaturas de remanso es $\left(\frac{T_{20}}{T_{10}} \right)_f = 1$.

4) La figura 5 (a y b) ilustra el fenómeno de reflexión de onda en el extremo cerrado del tubo.



Adoptando una aproximación, el número de Mach de la onda reflejada es:

$$M_r = \frac{1}{M_{2f}} \cong \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{1/2} = 2,236$$

Las relaciones de presión y de temperatura a través de la onda reflejada son:

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{2\gamma(3\gamma-1)}{\gamma^2-1} M_{ch}^2 = 750$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{2(\gamma-1)(3\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_{ch}^2 = 75$$

Todos los cálculos son teóricos aproximados, pues no tienen en cuenta los efectos del gas real, que pueden ser importantes. El ejercicio siguiente es un ejemplo de funcionamiento de un tubo de choque con gases perfectos, que tiene en cuenta los efectos combinados de fricción, transferencia de calor y adición de masa en la ecuación de energía mediante la función ψ^{17} .

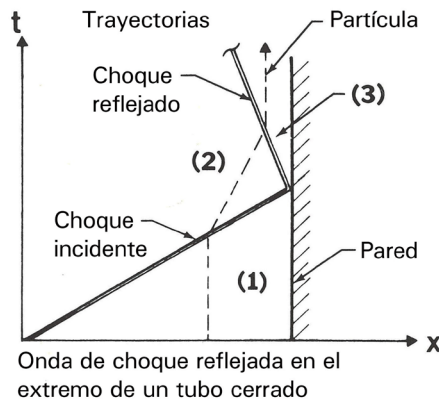
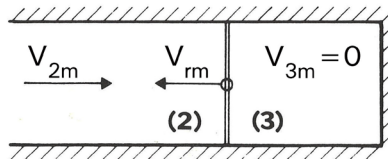


Fig. E1.5.
[Em86]



(Ver [Em86])

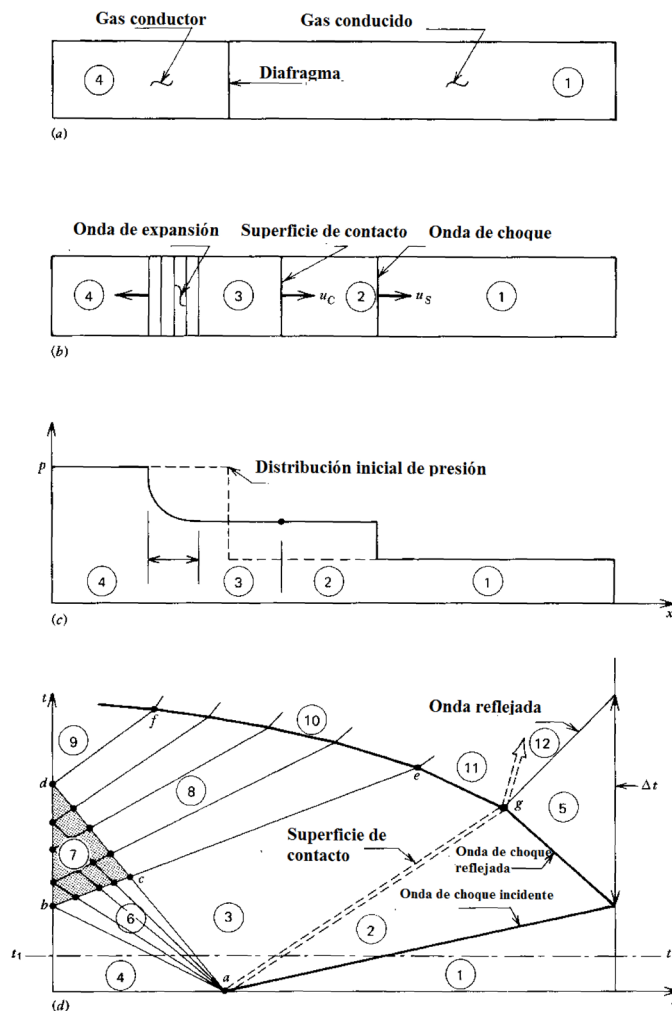


Ejercicio 2

Sea un tubo de choque de las características ilustradas por los esquemas de la figura 6. El tubo utiliza aire en las dos secciones: promotora y de prueba. En la sección de prueba, la presión es de 1 atm y, en la sección promotora, de 100 atm. La temperatura del aire en ambas secciones es de 300 K. Calcula:

1. El número de Mach M_3 detrás de la superficie de contacto
2. La presión $P_2 = P_3$ detrás de la onda choque
3. El número de Mach M_2 detrás de la onda de choque
4. El número de Mach M_{ch} de la onda de choque
5. La presión P_5 detrás de la onda de choque reflejada en el extremo del tubo

Fig. E1.6.
[ZH76]





Resolución

La solución para M_3 y P_2 se encuentra aplicando simultáneamente las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_4}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\gamma_1 M_3}{\psi} \right)^2 \left[\left(\frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \right) + \left\{ \left(\frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{a_1}{a_4} \right)^2 \left(\frac{\psi}{\gamma_1 M_3} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (1)$$

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \psi^{2\gamma_4/(\gamma_4-1)}, \text{ con } \psi = 1 + (\gamma_4 - 1) M_3 / 2 \quad (2)$$

Aplicando valores a las magnitudes de las ecuaciones 1 y 2, se obtiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + 0,98 (M_3 / \psi)^2 \left[0,85714 + \left\{ 0,73469 + \frac{2,04082}{(M_3 / \psi)^2} \right\}^{1/2} \right]$$

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \psi^7, \text{ con } \psi = 1 + 0,2 M_3$$

La solución de las ecuaciones simultáneas en P_2 y M_3 requiere utilizar el método iterativo hasta encontrar $P_4 / P_1 = 1$. Los resultados de cuatro iteraciones se resumen en la tabla 7.1.

M_3	2,50	2,40	2,4068	2,4061
P_2/P_1	6,6332	6,3765	6,3913	6,3921
P_4/P_1	113,33	99,177	99,955	100,00

La solución es $M_3 = 2,4061$; $P_2 = 6,3921$; $P_1 = 6,3921 \text{ atm}$

El número de Mach M_2 detrás de la onda de choque se calcula mediante la ecuación:³

$$M_2^2 = \frac{2}{\gamma_1 (\gamma_1 - 1)} \left(\frac{\frac{P_2}{P_1} + \frac{P_1}{P_2} - 2}{\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} + \frac{P_2}{P_1}} \right) \quad (3)$$

Sustituyendo valores de las magnitudes, se obtiene: $M_2 = 1,1449$

El número de Mach, M_{ch} , de la onda de choque se obtiene aplicando la ecuación:

$$M_{ch}^2 = 1 + \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \quad (4)$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $M_{ch} = 2,371$



La presión P_5 detrás de la onda reflejada se obtiene a partir de la ecuación:

$$\frac{P_5}{P_2} = \frac{\left(\frac{3\gamma_1 - 1}{\gamma + 1}\right) \frac{P_2}{P_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) \frac{P_2}{P_1} + 1} \quad (5)$$

Sustituyendo valores, se obtiene: $P_5 = 4,0459 \cdot P_2 = 4,0459 \cdot 6,3921 = 25,862 \text{ atm}$

(Ver [ZH76])

Ejercicio 3

Sea la mezcla gaseosa $2\text{H}_2 + \text{O}_2 + 3\text{N}_2$, que inicialmente se encuentra a la temperatura de 298,15 K y a la presión de 1 atm. Determina el valor aproximado de la velocidad de la onda de detonación V_1 .

Resolución

La velocidad de detonación y las propiedades de flujo de la mezcla gaseosa detrás de la onda de detonación se pueden obtener representando la curva HD y la línea tangente D_{ej} (v. figura 15) para determinar el punto J de Chapman-Jouguet. Aquí, por razones obvias, se aplica un método algebraico aproximado, sabiendo que en el punto J el número de Mach de la mezcla gaseosa es la unidad. En dicho punto, se han de cumplir las ecuaciones que gobiernan las ondas de combustión: conservación de la masa, del impulso y de la energía.

Combinando las dos primeras $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$; $P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$, sustituyendo V_2 por a_2 , pues $M_2 = 1$, y despejando la relación de densidades, se obtiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{P_2}{\rho_2 a_2^2} \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) \cong 1 + \frac{P_2}{\rho_2 a_2^2} \quad (1)$$

dado que $P_1 \ll P_2$.

Combinada la ecuación 1 con la de continuidad $\rho_1 V_1 = \rho_2 a_2$, resulta:

$$V_1 = a_2 \left(1 + \frac{P_2}{\rho_2 a_2^2}\right)$$

que se simplifica en:

$$V_1 = a_2 \left(1 + \frac{P_2 \rho_2}{\rho_2 \gamma_2 P_2}\right) = a_2 \left(1 + \frac{1}{\gamma_2}\right) \quad (2)$$

Ahora, el problema se concreta en la determinación de a_2 y γ_2 para los productos de reacción $2\text{H}_2\text{O} + 3\text{N}_2$, lo cual comporta determinar, por la regla de las mezclas, los calores específicos y la temperatura de los productos de reacción.



Se sabe:

Balance de entalpía en la reacción: $H_{R,r} = H_{P,r} + \Delta u^0$, donde el subíndice r indica que la entalpía se evalúa a la temperatura de los reactantes, y Δu^0 es la energía de combustión, definida como la cantidad de energía que debe ser extraída de los productos de combustión por transferencia de calor para cambiar la temperatura de los productos a la temperatura de los reactantes.

Ecuación de la entalpía de una mezcla de gases:

$$H = N \sum_{i=1}^n X_i H_i \quad (3)$$

Peso molecular de la mezcla:

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^n \hat{m}_i \quad (4)$$

Los calores específicos de las mezclas reactantes y de los productos de combustión:

$$\hat{c}_p = \sum_{i=1}^n \hat{c}_{p,i} \text{ y } \hat{c}_v = \hat{c}_p - \hat{R} \quad (5)$$

La temperatura de los productos de combustión, calculada mediante la ecuación:

$$T_2 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \left(\frac{c_{v1}}{c_{v2}} T_1 + \frac{\Delta u^0}{c_{v2}} \right) \quad (6)$$

La relación de calores específicos de la mezcla de productos de reacción $\gamma_2 = \hat{c}_{p2} / \hat{c}_{v2}$.

Todas estas magnitudes se calculan directamente a partir del valor de los componentes de cada mezcla, indicados en la tabla, o bien, en el caso de T_2 y γ_2 , por un proceso iterativo: cálculo de los calores específicos de la mezcla a partir de los valores de la tabla para una temperatura supuesta \rightarrow cálculo de $\gamma_2 \rightarrow$ cálculo de T_2 ; se supone un nuevo valor de T_2 y se repiten los cálculos hasta la convergencia del valor de T_2 . A partir del valor definitivo de T_2 , los valores del calor específico a presión constante de los gases de combustión se encuentran en tablas. Aplicada la regla de las mezclas, se obtiene el valor del calor específico a presión constante de la mezcla a partir del cual se calcula la relación de calores específicos γ_p a volumen constante de ambos.

Los valores de las magnitudes en juego de las especies reactantes y de los productos de combustión se muestran en la tabla I.

Aplicando los valores de la tabla que proceda en cada caso, tenemos:

Para la mezcla reactante:

$$\hat{m} = \sum_{i=1}^{n=3} X_i \hat{m}_i = (2/6) \cdot 2,016 + (1/6) \cdot 32 + (3/5) \cdot 28 = 20,005$$

Para los productos de combustión, análogamente: $\hat{m}_p = 24,006$



La energía de combustión en términos de moles, $\Delta\hat{u}^0 = \Delta u^0 / N_p$, se calcula mediante la ecuación:

$$\Delta\hat{u}^0 = \frac{1}{N_p} (\Delta H_R^0 - \Delta H_P^0)_{298} = \frac{1}{5} (0 + 2.241,827) = 96,731 \text{ kJ/mol}$$

Los calores específicos de las mezclas de gases reactantes y de combustión se calculan por las conocidas ecuaciones de las mezclas. Para la mezcla de gases reactantes, a la temperatura de 298,15 K y a 1 atm de presión, los valores de los calores específicos de los gases de la mezcla se encuentra en la tabla I. A partir de dichos valores y de las fracciones molares de cada componente en la mezcla, se obtiene:

$$\hat{c}_{p,R} = \frac{2}{6} \cdot 28,859 + \frac{1}{6} \cdot 29,354 + \frac{3}{6} \cdot 29,122 = 29,073 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$\hat{c}_{v,R} = \hat{c}_{p,R} - \hat{R} = 29,073 - 8,314 = 20,759 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

El cálculo de los calores específicos de la mezcla de los gases de combustión es más complejo, por cuanto se desconoce su temperatura de antemano. Se ha de aplicar el método iterativo antes comentado.

Sea, por ejemplo, $T_{p,1} = 3000 \text{ K}$. Tomando los valores de c_p de la tabla I, se obtiene:

$$\hat{c}_{p,P} = \frac{2}{5} \cdot 55,711 + \frac{3}{5} \cdot 37,066 = 44,524 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$\hat{c}_{v,P} = 44,524 - 8,314 = 36,210 \text{ J/mol} \cdot \text{K}, \quad \gamma_P = \hat{c}_{p,P} / \hat{c}_{v,P} = 1,23$$

Ahora se calcula, mediante la ecuación (6), la nueva temperatura con estos valores de calor específico, afectados por sus correspondientes pesos moleculares, y su relación. Se obtiene:

$$T_{p,2} = \frac{2 \cdot 1,23}{2,23} \left[\frac{(20,759 / 20,005)}{(36,210 / 24,006)} 298,15 + \frac{96,731}{36,210} \right] = 3.173,3 \text{ K}$$

Con esta nueva temperatura, se repiten los cálculos hasta que se alcanza la convergencia de los valores de γ_P . Después de varias iteraciones, se obtiene $\gamma_P = 1,228$ y $T_P = 3.151,2 \text{ K}$.

Por último, sabiendo:

$$V_1 = (\rho_P / \rho_R) a_P \text{ y } (\rho_P / \rho_R) = (\gamma_P + 1) / \gamma_P, \quad a_P = (\gamma_P R_P T_P)^{1/2}, \text{ con } R_P = \hat{R} / \hat{m}_P,$$

sustituyendo valores, resulta:

$$(\rho_P / \rho_R) = 1,814, \quad a_P = \left(1,228 \cdot \frac{8,314}{24,006} 3.151,2 \right)^{1/2} = 1.157,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La velocidad de la onda de detonación es:

$$V_1 = 1,814 \cdot 1.157,66 = 2.100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Especie	$\Delta H_f^\circ(298)$ kJ/kmol	T, K	\hat{c}_p kJ/kmol-K	$H^\circ - H^\circ(298)$ kJ/kmol	X	\hat{m}
H₂	0	298	28,859	0	2/6	2,016
O₂	0	298	29,354	0	1/6	32
N₂	0	298	29,122	0	3/6, 3/5	28,013
		3.000	37,056	92,753		
		3.100	37,124	96,462		
		3.200	37,178	100,178		
H₂O	-241.827	298	33,561	0	2/5	18,016
		3.000	55,711	126,353		
		3.100	56,006	131,939		
		3.200	56,280	137,554		

(Ver [ZH76])



Flujo cuasiestacionario y estacionario unidimensional y cuasiunidimensional isoentrópico

8.1 Introducción

En figeste capítulo, se exponen los fundamentos teóricos del movimiento de gases en régimen cuasiestacionario y estacionario con variación de su estado termodinámico siguiendo procesos reversibles. A causa de la baja densidad de los gases, las fuerzas másicas tienen generalmente muy poca importancia en el movimiento, razón por la cual se desprecian.

En los movimientos homoentrópicos, las condiciones de remanso se conservan en todo el campo fluido. Es decir, si el movimiento se caracteriza por una dirección preponderante, la presión solo varía espacialmente a lo largo de esta dirección, que en el caso de un flujo en conducto coincide con su línea media. En particular, $p = p(l)$ siguiendo la línea de corriente l .

Aceptando que se cumple la ecuación anterior y que $s = s_0 = cte$, cualquier otra variable termodinámica de estado será solo función de l y, por la conservación de la entalpía de

remanso $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$, la velocidad solo dependerá de l . Así pues, todas las magnitudes fluidas dependerán solo de la distancia a lo largo de la línea de corriente.

En general, un problema de mecánica de fluidos se reduce, en principio, a la resolución de un sistema de cinco ecuaciones para cinco incógnitas: \vec{V} y dos variables de estado. En cuanto al movimiento en conductos, la dirección del vector velocidad es conocida, de modo que el problema se reduce a tres incógnitas: el módulo de la velocidad y dos variables de estado. Las tres ecuaciones necesarias son:

- (i) ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad
- (ii) ecuación de la cantidad de movimiento a lo largo de una línea de corriente
- (iii) ecuación de la energía

Existen muchos movimientos fluidos que no son homoentrópicos y, en algunas regiones, ni siquiera son isoentrópicos, habida cuenta de que la viscosidad y la conductividad térmica son significativas. No obstante, las distancias características en que estos procesos



disipadores tienen significación suelen ser muy pequeñas, en comparación con la longitud característica del problema. Por ello, se consideran como discontinuidades puras, en que el fluido experimenta un salto brusco de sus propiedades.

8.2 Movimientos cuasiestacionarios

Algunos movimientos no estacionarios se caracterizan por un número de Strouhal pequeño con respecto a la unidad, es decir, el tiempo característico local es grande, frente al tiempo de residencia.

En estas condiciones, las ecuaciones de Euler se reducen a:

$$\nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (8.1)$$

$$\rho(\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla p^* \quad (8.2)$$

$$(\vec{V} \nabla) s = 0 \quad (8.3)$$

Si, además, el movimiento tiene una dirección predominante o es cuasiunidireccional (por ejemplo, según el eje x), entonces las ecuaciones anteriores se escriben:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad (8.5)$$

$$u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (8.6)$$

Es decir, el movimiento es cuasiestacionario.

En las ecuaciones 8.4, 8.5 y 8.6, no aparecen derivadas temporales; por tanto, el tiempo es un parámetro.

La ecuación de la entropía puede integrarse a lo largo de la línea de corriente y, puesto que $\rho = \rho(P, t)$, se obtiene:

$$s = s(\rho, P) = s_t(t) \quad (8.7)$$

Lo mismo puede hacerse con la ecuación de Euler-Bernoulli para gases, que en estas condiciones se escribe:

$$h + \frac{u^2}{2} = C^{te} = C_1(t) \quad (8.8)$$

Las ecuaciones 8.7 y 8.8, junto con las de estado y las condiciones de contorno que determinan las constantes de integración $s_1(t)$ y $C_1(t)$, permiten calcular las variables termodinámicas en función de la velocidad u . Para calcular la distribución de velocidad, se ha de resolver el sistema de ecuaciones 8.4 y 8.5.



Si el movimiento es homoentrópico, las constantes $C_1(t)$ y $s_1(t)$ son las mismas para todas las líneas de corriente. Por otra parte, como no pueden imponerse condiciones iniciales al sistema de ecuaciones 8.4, 8.5 y 8.6, es posible que los campos de velocidad, de presión y de temperatura que resultan de la solución cuasiestacionaria para el instante inicial no coincidan con los dados. En este caso, la solución cuasiestacionaria dejará de ser válida durante un tiempo, a partir del inicial, del orden del tiempo de residencia.

8.3 Flujo estacionario

En el capítulo 4, se ha explicado brevemente la evolución histórica de la teoría general del movimiento de fluidos y se han desarrollado sus ecuaciones fundamentales para el movimiento estacionario unidimensional de fluidos con y sin efectos de viscosidad y compresibilidad. También se ha incluido un avance de la simplificación de dichas ecuaciones, que son notablemente no lineales para flujos con un número de Reynolds elevado, condición para la cual aquellos efectos son despreciables.

En este apartado, se realiza una primera aproximación al flujo de gases en los supuestos siguientes:

- Flujo estacionario
- Propiedades del fluido uniformes en toda la sección transversal del flujo de gas
- Efectos de fricción, de transferencia de calor y de fuerzas del campo gravitacional despreciables

El término *estacionario* significa que, en cada sección de flujo, la magnitud de sus propiedades es independiente del tiempo.

En cuanto al segundo supuesto, flujo *unidimensional* se refiere a que el área de la sección transversal del flujo se mantiene constante o bien varía tan lentamente que, en cada sección, las propiedades del fluido cambian apreciablemente solo en la dirección del movimiento del fluido en dicha sección.

En este capítulo, se explica cómo las variables de flujo se pueden considerar una función del número de Mach, en particular las relaciones P_0/P , ρ/ρ_0 , T_0/T , o sea, entre los valores de remanso y los valores estáticos de las magnitudes de estado térmico del gas.

8.3.1 Propiedades termodinámicas de remanso (estancamiento) de un gas perfecto

Para analizar el movimiento estacionario unidimensional de un gas perfecto, conviene definir, por su utilidad, sus propiedades termodinámicas de remanso T_0, P_0, ρ_0, a_0 , y h_0 en el gas cuando su velocidad V deviene cero por una desaceleración adiabática, como es el caso de los gases perfectos, o por una desaceleración isoentrópica para otros gases cuya temperatura estática es función de la entalpía y de la entropía del gas $T = T(h, s)$.

Temperatura de remanso T_0

La temperatura de remanso corresponde a la temperatura estática que un gas alcanza cuando es desacelerado hasta velocidad cero.



En el caso de los gases perfectos, en un flujo adiabático estacionario, los términos $\delta q, \delta w$ y gdz que forman parte de la ecuación de la energía para el flujo unidimensional estacionario, que se escribe $\delta w - \delta q + dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + gdz = 0$, son nulos. Por consiguiente, la ecuación simplificada se escribe: $dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$.

Integrando esta ecuación entre los estados del gas en movimiento (h, V) y el estado desacelerado $(V = 0, h = h_0, \text{por definición})$ $(V = 0, h = h_0, \text{por definición})$, se obtiene

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0, \text{ que es la entalpía de remanso.}$$

Para un gas perfecto $h = c_p T$ y, sustituyendo h en la ecuación anterior, resulta:

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 \quad (8.9)$$

Despejando T_0 , temperatura de remanso, de la ecuación 8.9 resulta:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \quad (8.10)$$

Como se comenta más adelante, en los procesos de flujo de gases, es conveniente expresar las variables y las propiedades de estado del fluido en términos del número de Mach. A tal efecto, la ecuación 8.10 puede transformarse sustituyendo c_p por su valor, que es $\gamma R / (\gamma - 1)$, e introduciendo la velocidad del sonido mediante su expresión $a^2 = \gamma RT$ se obtiene el resultado siguiente:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (8.11)$$

Los valores de la temperatura de remanso se calculan mediante la ecuación 8.11, y generalmente se encuentran tabulados.

Presión de remanso

La presión de remanso, también denominada *presión total*, está relacionada con la temperatura de remanso y sus correspondientes valores estáticos en un proceso isoentrópico por la conocida expresión: $P_0 / P = (T_0 / T)^{\gamma/(\gamma-1)}$

Sustituyendo la relación de temperaturas por el valor que expresa la ecuación 8.11, se obtiene:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (8.12)$$

La presión de remanso, calculada por la ecuación 8.12, se encuentra también tabulada.



Factor de compresibilidad

La compresibilidad de los gases tiene una gran influencia sobre sus propiedades termodinámicas y dinámicas, especialmente, como se acaba de exponer, sobre el valor de la presión de remanso.

En cuanto a la presión dinámica, que para un fluido incompresible es igual a $(1/2)\rho V^2$, su valor para un fluido compresible se calcula mediante la ecuación siguiente:

$$P_d = P_0 - P = P \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \quad (8.13)$$

Para pequeños valores del número de Mach, cabe desarrollar la cantidad entre paréntesis, y se obtiene:

$$P_d = P \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2} + \frac{\gamma M^4}{8} + \dots - 1 \right) \quad (8.14)$$

Simplificando la ecuación 8.14 y despejando de ella el término $P\gamma M^2/2$, que es igual a $\rho V^2/2$, se obtiene:

$$P_d = P_0 - P = \rho \frac{V^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \dots \right) \quad (8.15)$$

A partir de la ecuación 8.15, el factor de compresibilidad, denotado por F_c y definido $F_c = P_d / (1/2)\rho V^2$, viene dado por:

$$F_c = \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \dots \right) \quad (8.16)$$

La ecuación $P_d = (1/2)\rho V^2$ se aplica solo si M es pequeño y permite concluir que la hipótesis de incompresibilidad deja de ser válida, si se buscan resultados con error pequeño, cuando el número de Mach es mayor que 0,3, aproximadamente.

Efecto de la compresibilidad del gas sobre el flujo másico específico

Aunque este tema se verá más adelante en otro capítulo (flujo por toberas convergentes-divergentes), parece oportuno avanzar aquí algunas ideas.

Sea la tobera convergente-divergente que se muestra en la figura 8.1.

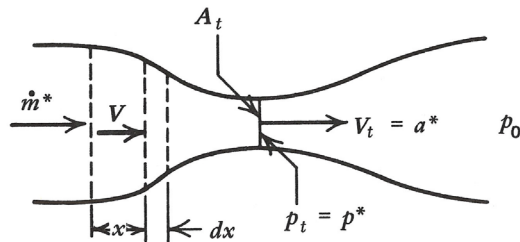


Fig. 8.1.
[ZH76]



El flujo másico específico isoentrópico de gas a través de la garganta de la tobera, cuya área de sección recta es A_t , se expresa $G = \rho V$. Los valores de ρ, V dependen de la relación de expansión que gobierna el proceso de flujo.

En el caso de máxima expansión teórica $P/P_0 = 0$ (descarga en el vacío), el volumen específico del gas expandido es infinito y su velocidad es la máxima velocidad isoentrópica:

$$V_{is,max} = \left(2\gamma RT_0 / (\gamma - 1) \right)^{1/2} \quad (8.17)$$

Por contra, si $P/P_0 = 1$, no hay descarga, o sea, $V = 0$ y el gas está en reposo. A cada uno de estos dos procesos límite, le corresponde un valor particular de la densidad. En el primer caso, $\rho = 0$ y, en el segundo, $\rho = \rho_0$, densidad de remanso. Es evidente que entre ambos procesos límite teóricos se encuentra los procesos reales en que la densidad del gas dependerá de la relación de presiones. Existe un valor particular de esta relación, denominada *relación de expansión crítica*, con que se alcanza el máximo valor del flujo másico específico \dot{m}^* .

Densidad de remanso

A partir de la ecuación de estado de un gas perfecto, la densidad de remanso se define en función de la temperatura y de la presión de remanso, $\rho_0 = P_0 / RT_0$.

Sustituyendo las ecuaciones 8.11 y 8.12 en la ecuación anterior, resulta:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (8.18)$$

Esta relación de densidades se encuentra tabulada en función del número de Mach para diferentes valores de γ .

Velocidad acústica de remanso

Por definición, la velocidad acústica de remanso se expresa:

$$a_0^2 = \gamma RT_0 \quad (8.19)$$

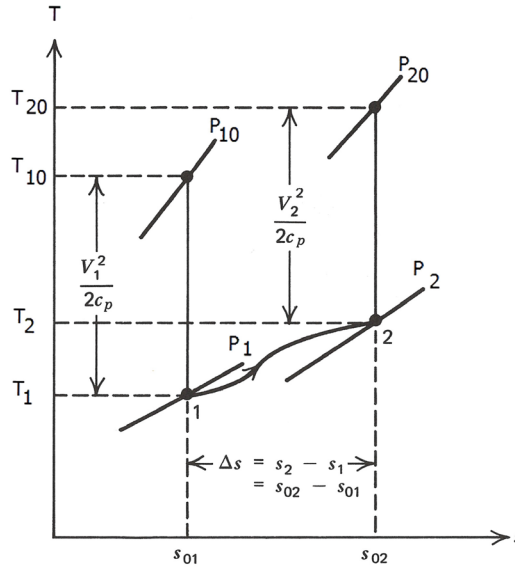
La relación de la velocidad acústica de remanso con su valor estático y con el número de Mach del flujo se obtiene por simples transformaciones, que conducen a la expresión siguiente:

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (8.20)$$

Los valores de esta relación de velocidades acústicas también se encuentran tabulados.

Cambio de entropía en términos de las propiedades de remanso

Por definición, la entropía de un gas en reposo es igual a la entalpía de remanso en dicho estado; por tanto, el cambio de entropía entre dos estados termodinámicos viene definido por el cambio que ocurre entre sus respectivas entropías de remanso (v. figura 8.2).


 Fig. 8.2.
[ZH76]


En el capítulo 3, la variación de entropía fue definida por la ecuación:

$$ds = c_p \frac{dT'}{T} - R \frac{dP}{P}$$

Puesto que, en estado de reposo., $s = s_0$, la ecuación anterior se escribe:

$$ds = ds_0 = c_p \left(\frac{dT_0}{T_0} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP_0}{P_0} \right) \quad (8.21)$$

o bien:

$$ds = c_p d \left\{ \ln \left[\frac{T}{P^{(\gamma-1)/\gamma}} \right] \right\} \quad (8.22)$$

Integrando la ecuación 8.22 entre dos estados, se obtiene:

- Para un gas calóricamente perfecto., $c_p = \text{cte}$:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_{20}}{T_{10}} \right) - R \ln \left(\frac{P_{20}}{P_{10}} \right) \quad (8.23)$$

- Para un flujo estacionario adiabático, $dT_0 = 0$; luego :

$$\Delta s = -R \ln \left(\frac{P_{20}}{P_{10}} \right) \quad (8.24)$$

- Para un proceso adiabático sin fricción, la entropía del gas en movimiento permanece constante.

- Para un cambio isoentrópico de estado en un gas perfecto, $\Delta s = 0$, la presión de remanso se mantiene constante.

Para un proceso de flujo de gas con fricción, $\Delta s > 0$,; luego $P_{20} < P_{10}$, o sea, la presión de remanso disminuye en los flujos con fricción. La relación entre las presiones de remanso en ambos estados. se escribe:

$$\frac{P_{20}}{P_{10}} = \exp\left(-\frac{\Delta s}{R}\right) \quad (8.25)$$

Condiciones de remanso

Las relaciones $s = s_0$, $h + V^2/2 = h_0$ junto con las de estado $\rho = \rho(s, h)$, $P = P(s, h)$, $T = T(s, h)$ permiten calcular todas las variables termodinámicas en función de la velocidad local.

Si el movimiento es homoentrópico, las condiciones de remanso son las mismas para todo el campo fluido. Las condiciones de conservación de las magnitudes de remanso son las siguientes:

- movimiento permanente con fuerzas de campo gravitacional y efectos de viscosidad, despreciables
- transferencia de calor y adición de calor, despreciables

(Ver [ZH76])

8.4 Flujo adiabático de gases

En este tipo de flujo, en los supuestos ya enunciados, cabe añadir que los efectos de fricción son despreciables y que el fluido ni gana ni pierde calor. De hecho, no se puede afirmar que no exista fricción, sino que $((\tau = \mu(\partial u / \partial y) - \rho \overline{u'v'}) \cong 0$.

Entonces, en la ecuación 4.20 del capítulo C4, se tiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \rho \vec{f} = 0, \mu \nabla^2 \vec{V} \cong 0$$

y en la ecuación 4.21:

$$\left(-\nabla \vec{q} + q'_r + q'_q + \phi_v \right) = 0$$

de modo que dichas ecuaciones resultan:

$$\frac{dP}{\rho} + VdV = 0, \quad (26) ; y \quad (8.26)$$

y:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (8.27)$$



Ahora bien, la ecuación 8.26 puede escribirse $\frac{dP}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho} + VdV = 0$ e, introduciendo

$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s$, se obtiene, mediante una simple transformación, la ecuación:

$$\frac{d\rho}{\rho} + M^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (8.28)$$

8.4.1 Flujo adiabático de un gas perfecto

Se supone que, en el intervalo de temperatura que puede encontrarse en este caso, el valor del calor específico del gas a presión constante no varía.

A partir de la ecuación de la entalpía $dh = Tds + \frac{dP}{\rho}$, y teniendo en cuenta las ecuaciones 8.26 y 8.27, se obtiene:

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0, \text{ o sea, } c_p dT + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (8.29)$$

Integrando la ecuación 8.29, se obtiene:

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = cte \quad (8.30)$$

La ecuación 8.30 se puede transformar en una que traduzca la relación entre la temperatura del fluido y el número de Mach del flujo introduciendo en ella las conocidas relaciones para un gas perfecto $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ y $a^2 = \gamma RT$. Resulta:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = cte \quad (8.31)$$

Habida cuenta de que $M = \frac{V}{a}$, la ecuación 8.31 resulta:

$$a^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = cte. \quad (8.32)$$

Aplicando la ecuación 8.32 entre dos estados, se obtiene:

$$a_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = a_2^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = cte. \quad (8.33)$$

A su vez, como quiera que el valor de a^2 para cada gas es γRT , la ecuación 8.33 se escribe:

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) \quad (8.34)$$



8.4.2 Velocidad de descarga isentrópica de un gas perfecto

La característica isentrópica de la descarga significa que se produce según un proceso adiabático reversible, o sea, por un gas que mantiene constante su contenido de calor y cuyo flujo se produce sin pérdida de energía por fricción. Teóricamente, representa el flujo por un difusor o una tobera que descarga de un gran depósito en el cual el gas está prácticamente en reposo y cuya temperatura es la de remanso.

A partir de la igualdad de la energía por unidad de masa del gas en el depósito y en una sección arbitraria del flujo de descarga, se define su velocidad. En efecto,

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} ; \text{ por consiguiente:}$$

$$V = \left[2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \right]^{1/2} \quad (8.35)$$

Para un gas perfecto, el valor del calor específico a presión constante viene dado por

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \text{ y la relación entre temperaturas y presiones en el cambio isentrópico de estado, por:}$$

$$(T / T_0) = (P / P_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación 8.35, se obtiene:

$$V = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} R T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.36)$$

O bien, en términos de la constante universal de los gases

$$V = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}} T_0 \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.37)$$

La ecuación 8.37 permite calcular la velocidad máxima teórica de descarga de un gas perfecto de masa molecular \tilde{M} que se encuentra en reposo en un depósito considerado de tamaño infinito. Esta velocidad máxima se denomina *máxima velocidad isentrópica*, y se alcanzaría teóricamente si el gas descargase en el vacío, o sea, para $P = 0$ y $T = 0$, estado imposible de alcanzar porque antes el gas licuaría.

Dicha velocidad se define por una u otra de las dos ecuaciones siguientes:

$$V_{max,is} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}} T_0 \right)^{1/2} = a_0 \left(\frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2} \quad (8.38)$$

$$\text{o bien,} \quad \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{V_{max,is}^2}{2} \quad (8.39)$$



8.5 Flujo estacionario cuasiunidimensional

Sea V la velocidad del movimiento estacionario cuasiunidimensional a través de una sección, de área A , de un tubo de corriente. El flujo másico a través de esta sección es:

$$\rho VA = \dot{m} \quad (8.40)$$

Tomando la derivada logarítmica de (8.40) a lo largo del eje del tubo de corriente, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dl} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dl} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dl} = 0 \quad (8.41)$$

Se sabe, además, que $a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)$ y $V \frac{dV}{dl} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dl} = 0$; por tanto, como $a^2 \frac{d\rho}{dl} = \frac{dP}{dl}$ resulta:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dl} = -\frac{V}{a^2} \frac{dV}{dl} \quad (8.42)$$

Sustituyendo la ecuación 8.42 en la ecuación 8.41, se obtiene:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dl} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dl} (1 - M^2) \quad (8.43)$$

A partir de la ecuación 8.43, cabe extraer las conclusiones siguientes:

- Si $M < 1$ (movimientos subsónicos), al aumentar el área del conducto en el sentido de la corriente, la velocidad del fluido en esta disminuye.
- Si $M > 1$ (movimientos supersónicos), sucede todo lo contrario. La velocidad del fluido en el sentido de la corriente aumenta a medida que lo hace el área de su sección recta.
- Si $M = 1$, $dA/dl = 0$. Entonces, A tendrá que ser mínima. Esta condición define el estado crítico ($M = 1$, A^*)

Las magnitudes fluidas críticas son aquellas que se obtendrían llevando el fluido en unas condiciones en que se mantengan las condiciones de remanso hasta una velocidad tal que el número de Mach sea la unidad $M = 1$.

Ya se ha visto que, si las propiedades de remanso se conservan, todas las magnitudes se pueden expresar como una función del número de Mach del movimiento.

En efecto, recordando que, para un gas calóricamente perfecto, se verifica:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \quad (8.44)$$

Por consiguiente:

$$\frac{a_0}{a} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right\}^{1/2} \quad (8.45)$$



$$\frac{P_0}{P} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (8.46)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (8.47)$$

Mediante las relaciones 8.44, 8.45, 8.46 y 8.47, una vez transformadas y sustituidas en la ecuación 8.43 se obtiene:

$$A = \frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0} \cdot \frac{1}{M} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (8.48)$$

Por otra parte, mediante la ecuación 8.43 y la ecuación de cantidad de movimiento del flujo escrita en la forma $\frac{dP}{P} + V^2 \frac{dV}{V} = 0$, se obtiene la relación entre la variación relativa del área de la sección de flujo y la variación relativa de presión del gas que tiene lugar, que se expresa así:

$$\frac{dA}{A} = (1 - M^2) \left(\frac{P}{\rho V^2} \right) \frac{dP}{P} \quad (8.49)$$

8.5.1 Magnitudes críticas y velocidades características

Magnitudes críticas

Las magnitudes críticas se obtienen a partir de las relaciones (43) a (48), con $M = 1$.

Son las siguientes:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (8.50)$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (8.51)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (8.52)$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}} \quad (8.53)$$

$$A^* = \frac{\dot{m}}{a_0 \rho_0} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \quad (8.54)$$



$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{(\gamma+1)} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (8.55)$$

$$V^* = (\gamma RT^*) \quad (8.56)$$

$$M^* = \frac{V}{V^*} = M \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2} \right] \quad (8.57)$$

Otra magnitud crítica, que se deduce en otro capítulo más adelante, es el flujo másico crítico, que es el máximo que pasa por la sección de área crítica (A^*) en la cual la velocidad acústica es también crítica (a^*). Su valor es:

$$\dot{m}^* = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{\gamma R T_0}} \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad (8.58)$$

Velocidades características

Con respecto a las velocidades características, interesan la velocidad isoentrópica máxima ($V_{max,is}$) y la velocidad adimensional, M^* .

De la velocidad máxima, ya se ha hablado en otro apartado. De la velocidad adimensional, M^* , cabe decir que es un parámetro útil, definido por $M^* = V / a^*$. Su expresión en términos del número de Mach del flujo es:

$$M^* = \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{1/2} \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{1/2} \quad (8.59)$$

Evidentemente, a $M = 1$ le corresponde $M^* = 1$ y, a $M \rightarrow \infty$, la velocidad adimensional tiene un límite dado por:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^* = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2} \quad (8.60)$$

8.6 Flujo estacionario, unidimensional, isoentrópico de gases en conductos de sección recta variable

En este apartado, se analizan dos tipos clásicos de flujo isoentrópico¹ de gases en conductos con cambios de sección, que son:

- la descarga de gases por una tobera convergente, y
- la descarga de gases por una tobera convergente-divergente

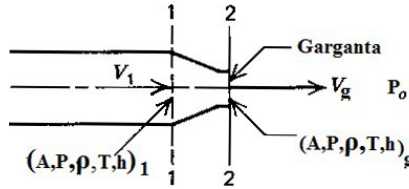
8.6.1 Descarga de gases por una tobera convergente

La figura 8.3 muestra el esquema de una tobera convergente en el extremo de un tubo de sección recta constante por la cual descarga un gas en un espacio ocupado por el mismo fluido a una presión estática P_0 , denominada *contrapresión*. De acuerdo con las notaciones utilizadas en la figura para distinguir el área de conducto y las propiedades de flujo en él, la velocidad del gas que atraviesa el plano de la garganta A_g , denominada *velocidad isoentrópica en la garganta* V_g , viene dada por:

$$V_g = \left\{ 2 \left[\left(h_1 + V_1^2 / 2 \right) - h_g \right] \right\}^{1/2} \quad (8.61)$$

donde $h_1 + V_1^2 / 2$ es la entalpía de remanso del gas en el conducto.

Fig. 8.3.



Habida cuenta de la ecuación 8.36 del subapartado 8.4.2, la velocidad de descarga del gas por la garganta de la tobera viene dada por:

$$V_g = \left\{ \frac{2\gamma RT_{10}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} = a_0 \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.62)$$

El flujo másico isoentrópico de descarga viene dado por:

$$\dot{m} = (\rho AV)_g \quad (8.63)$$

Combinando las ecuaciones 8.63 y 8.62, y sustituyendo ρ_g por

$$\rho_{10} \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{1/\gamma} = \left(\frac{P_{10}}{RT_{10}} \right) \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{1/\gamma}, \text{ se obtiene:}$$

$$\dot{m} = \frac{P_{10} A_g}{\sqrt{\gamma RT_{10}}} \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.64)$$

La ecuación 8.64 muestra que el flujo másico depende únicamente del denominado *factor de flujo*, cuya expresión es:

$$\psi = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{P_g}{P_{10}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.65)$$



Sustituyendo esta ecuación en la 8.64, se obtiene:

$$\dot{m} = \psi \frac{P_{10} A_g}{\sqrt{\gamma R T_{10}}} \quad (8.66)$$

El número de Mach del flujo en la garganta es:

$$M_t = \frac{a_{10}}{a_t} \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_t}{P_{10}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.67)$$

La figura 8.4 presenta valores de ψ en función de P_g / P_{10} para diferentes valores de γ .

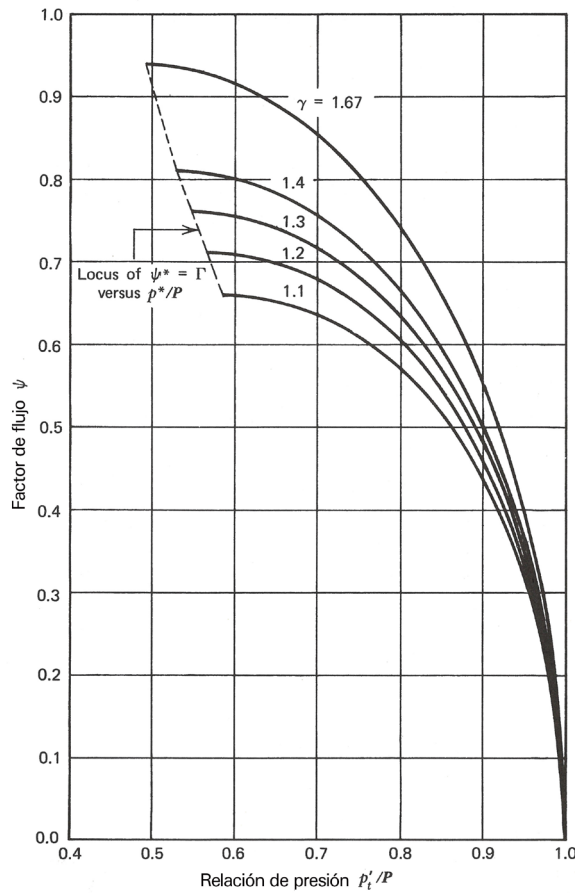


Fig. 8.4.
[ZH76]

Sustituyendo en la ecuación 8.67 la relación de velocidades acústicas por su valor para flujo isoentrópico de un gas perfecto, se obtiene:

$$M_t = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_{10}}{P_t} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.68)$$



Del problema de la descarga de gases por una tobera convergente, cabe destacar las conclusiones siguientes:

- Si la presión P_0 del gas en el espacio en que descarga la tobera se reduce, al tiempo que se mantiene constante la presión de remanso P_{10} en su entrada, la presión estática en la garganta P_g se mantiene igual a la de remanso hasta que se alcanza la *presión crítica* $P_g = P_0 = P^*$.
- Además, en esta condición de flujo, la velocidad de descarga es igual a la velocidad del sonido crítica $V_g = a^*$, y el flujo másico, denominado *flujo másico crítico* \dot{m}^* , resulta máximo.
- Toda disminución ulterior de la contrapresión por debajo de la crítica causa una onda de rarefacción que se propaga desde el exterior hacia la tobera y dentro del chorro a una velocidad a^* . El flujo másico descargado es el máximo y se expande a la salida.
- La velocidad máxima de descarga viene dada por la ecuación 8.38 del apartado 8.4.2.
- El flujo másico crítico ocurre cuando el factor de flujo alcanza el valor crítico

$$\psi^* = \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad \text{y se expresa} \quad \dot{m}^* = \frac{\psi^* P_{10} A_g}{\sqrt{\gamma R T_{10}}} \quad (8.69)$$

- Todo incremento de la presión de remanso en el conducto, manteniendo constante la contrapresión, no tiene efecto sobre la velocidad de descarga una vez alcanzada la velocidad crítica en la garganta; sin embargo, la presión crítica aumenta linealmente a medida que lo hace la presión de remanso en el conducto.

8.6.2 Descarga de gases por una tobera convergente-divergente. La tobera De Laval

La tobera de Laval es un conducto constituido por dos tramos diferentes: uno convergente y otro divergente, que se encuentran en una sección central, denominada *garganta*, cuya área es menor que la de entrada y la de salida de la tobera. La figura 8.5 ilustra la configuración básica de la tobera. Esta configuración asegura una expansión del flujo de gas en la salida, cuya velocidad excede la máxima $V_g = a^*$ que se puede alcanzar en la garganta de la tobera convergente. Tanto la tobera convergente como la tobera de Laval aseguran la transformación, a diferentes niveles, de la entalpía de remanso del gas en energía cinética en la sección de descarga. La velocidad del gas en la sección de descarga de la tobera, denotada por A_s , se determina mediante la ecuación de la energía del flujo

estacionario unidimensional isoentrópico, $h + \frac{V^2}{2} = \text{cte.}$

Aplicando el mismo procedimiento de análisis del flujo utilizado para la tobera convergente, se obtiene, para la velocidad de descarga la ecuación siguiente:



$$V_s = \left\{ \frac{2\gamma RT_{e0}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.70)$$

Otras formas de expresión de la ecuación 8.70 son las siguientes:

$$V_s = a_0 \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} = V_{max} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2} \quad (8.71)$$

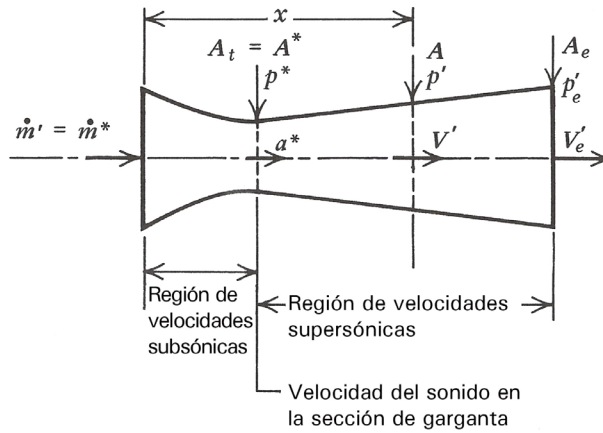


Fig. 8.5.
[ZH76]

Las magnitudes más importantes que caracterizan el flujo de gases por toberas convergentes-divergentes son las siguientes:¹

- Relaciones entre las variables de estado del gas en la salida y las de remanso, y las magnitudes que caracterizan el flujo en dicha sección en función de la relación de expansión P_s / P_{e0} , tomando $\gamma = 1,4$.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{T_s}{T_{e0}} \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \frac{\rho_s}{\rho_{e0}} \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \frac{a_s}{a_{e0}} \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ & M_s \frac{V_s}{a_s} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_{e0}}{P_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (8.72)$$

- Flujo másico descargado:

$$\dot{m} = (\rho AV)_s = \frac{\psi A_s P_{e0}}{\sqrt{\gamma RT_{e0}}} = \frac{A_s P_{e0}}{\sqrt{\gamma RT_{e0}}} \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_{e0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.73)$$



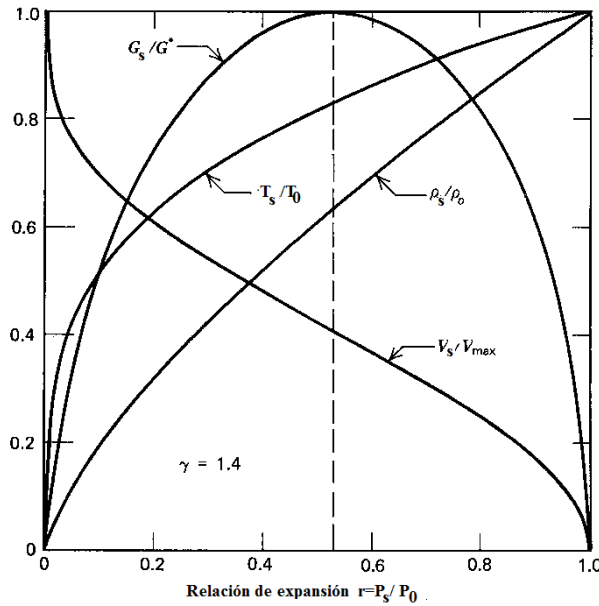
– Flujo másico crítico:

$$\dot{m}^* = \frac{\psi^* A_g P_{eo}}{\sqrt{\gamma R T_{eo}}} \quad (8.74)$$

donde A_g es el área de la sección de la garganta y ψ^* es el factor de flujo crítico.

La figura 8.6 muestra el valor de las relaciones T_s / T_{eo} , ρ_s / ρ_{eo} y V_s / V_{max} , además de las relaciones entre los flujos másicos específicos en la salida y crítico G_s / G^* .

Fig. 8.6.
[ZH76]



Otras dos relaciones útiles son la establecida entre el flujo másico y las condiciones en la garganta, y la que define el área de la sección de salida con respecto al área crítica, en función del número de Mach del flujo en aquella. Sus expresiones respectivas son las siguientes:

$$\dot{m} = (\rho a)_{eo} A_g \left(\frac{P_g}{P_{eo}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_{eo}}{P_g} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (8.75)$$

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M_s} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (8.76)$$

A partir de la ecuación 8.75, se deduce que el flujo másico máximo ocurre cuando las condiciones en la garganta son críticas, es decir, cuando se cumple $d\dot{m} / d \left(\frac{P_g}{P_{eo}} \right) = 0$.



O sea:

$$\frac{d}{d\left(\frac{P_g}{P_{eo}}\right)} (\rho a)_{eo} A_g \left(\frac{P_g}{P_{eo}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_{eo}}{P_g}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8.77)$$

que se satisface para:

$$\frac{P_g}{P_{eo}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \text{ es decir, } P_g = P^* \quad (8.78)$$

De cuanto antecede, cabe concluir que siempre que P_s sea menor que P_{eo} se producirá un flujo másico en la tobera cuyo valor irá aumentando a medida que la relación de presiones P_s / P_{eo} disminuya. Esto es así hasta que se llega a las condiciones sónicas en la garganta, que son $P_g = P^*$, $M = 1$, $A_g = A^* = A_{min}$, y el flujo másico es máximo:

$$\dot{m}_{max} = (\rho a)_{eo} A^* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (8.79)$$

Esta condición recibe la denominación de *bloqueo sónico*.

Cuando un depósito descarga por un conducto convergente cuya sección de salida es la mínima, las condiciones sónicas se presentan en la propia salida, o sea:

$$P_s = P_s^* = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_{eo} \quad (8.80)$$

Por consiguiente, el bloqueo sónico se producirá tan pronto como la presión en el ambiente en que el depósito descarga sea menor que P_s^* . En esta condición, el gas a la salida del depósito se expansionará para adaptarse a la presión ambiente.

De la tobera De Laval, cabe destacar cuanto sigue:

- Para una tobera De Laval, la relación de expansión $r = (P_s / P_{eo})_{is}$ depende de la relación de áreas de tobera $\varepsilon = A_s / A_g$. El funcionamiento óptimo de una tobera se consigue cuando la presión del gas en la sección de descarga es igual a la presión ambiente o contrapresión; en esta condición, la expansión es óptima o completa. La relación de áreas correspondiente se denomina *relación de áreas para la expansión completa*.
- En la práctica, es conveniente expresar la relación de áreas óptima en términos de la relación de presiones y el número de Mach. En una tobera convergente-divergente bloqueada, la relación entre el área de una sección cualquiera del difusor y el área crítica viene dada por:



$$\frac{A}{A_g} = \frac{A}{A^*} = \frac{\psi^*}{\psi} = \frac{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}}{\left(\frac{P}{P_{eo}}\right)^{1/\gamma} \left[1 - \left(\frac{P}{P_{eo}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}} \quad (8.81)$$

- En ciertos casos, resulta más conveniente expresar la relación de áreas para una sección cualquiera del difusor en términos del número de Mach del flujo que atraviesa dicha sección. La ecuación correspondiente se escribe:

$$\frac{A}{A_g} = \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right\}^{1/2} \quad (8.82)$$

- El número de Mach crítico viene dado por la ecuación:

$$M^* = \frac{V}{a^*} = \left\{ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_{eo}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} \quad (8.83)$$

- Cuando el valor del flujo másico es menor que el crítico, el valor del área de garganta es mayor que el crítico, el número de Mach es menor que la unidad y el flujo es subsónico a lo largo de toda la tobera.

Efecto del valor de la contrapresión sobre el funcionamiento de la tobera

Merece una atención especial la descripción del comportamiento de una tobera convergente-divergente cuando se varía el valor de la contrapresión o de la presión en el ambiente que recibe el flujo de descarga.

La figura 8.7 muestra esquemáticamente qué sucede en la tobera cuando se modifica el valor de la contrapresión. Si el flujo másico es menor que el crítico $\dot{m} < \dot{m}^*$, el flujo es subsónico a lo largo de toda la tobera, de manera que el número de Mach en el difusor siempre es inferior a la unidad. Una vez alcanzado el flujo másico crítico \dot{m}^* , solo dos valores de la contrapresión aseguran un flujo isentrópico: una expansión subsónica y una expansión supersónica. Para valores de la contrapresión comprendidos entre estos dos límites, el flujo se expande una cierta distancia en la tobera a partir de la garganta y después experimenta una onda de choque que transforma el flujo en subsónico hasta la sección de descarga.

Si la presión del gas en la salida de tobera es menor que la presión ambiente $P_s < P_a$, la tobera funciona en *sobreexpansión*; por el contrario, si dicha presión es mayor que la presión ambiente $P_s > P_a$, ocurre *subexpansión*.

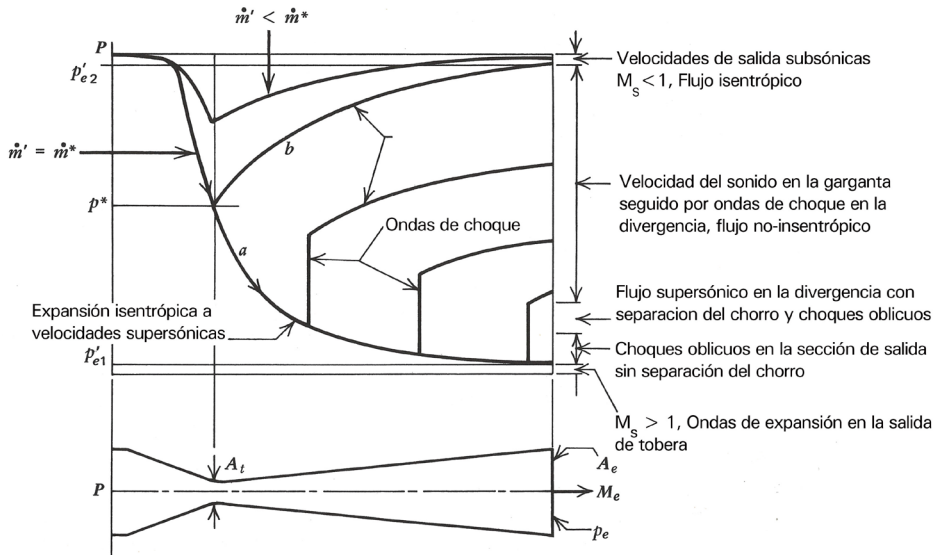


Fig. 8.7. [ZH76]

$$\frac{P_1}{P_E} < 0,4$$

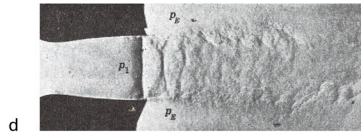
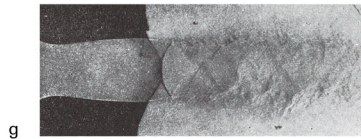
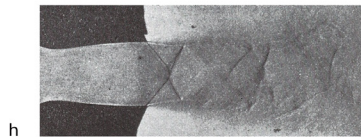


Fig. 8.8. [LR57]

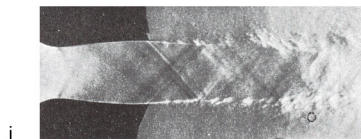
$$\frac{P_1}{P_E} = 0,66$$



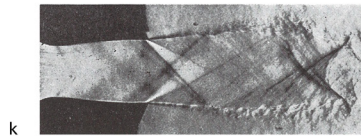
$$\frac{P_1}{P_E} = 0,85$$



$$\frac{P_1}{P_E} = 1,00$$



$$\frac{P_1}{P_E} = 1,50$$

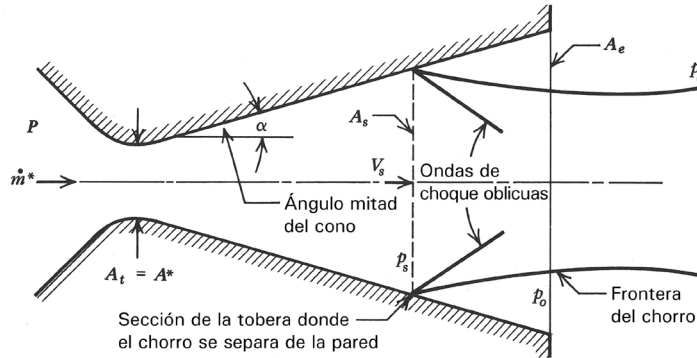


La figura 8.8 ilustra con fotografías Schlieren la estructura del flujo de descarga de una tobera en régimen supersónico a diferentes contrapresiones.



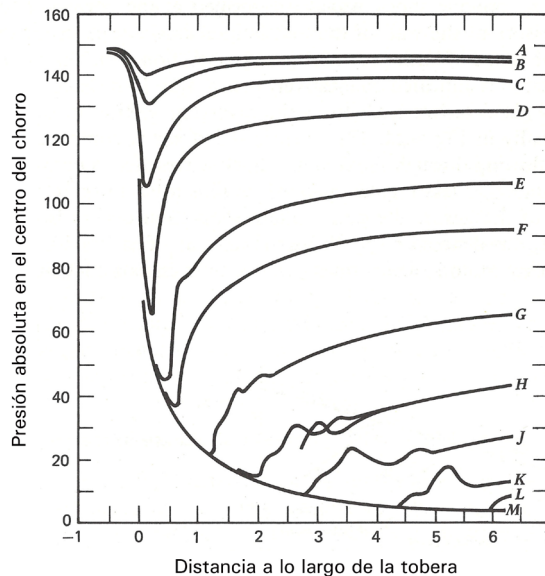
La figura 8.9 muestra qué ocurre en la parte divergente de la tobera cuando su funcionamiento es a sobrepresión³ y la figura 8.10 ilustra el efecto de la contrapresión sobre la presión del gas a lo largo del eje de la tobera.

Fig. 8.9.
[ZH76]



Los resultados representados por las curvas de la figura 8.10 fueron obtenidos por Stodola en los experimentos que llevó a cabo para determinar el efecto de la contrapresión sobre la presión estática a lo largo del eje de una tobera convergente-divergente.

Fig. 8.10.
[ZH76]



Las diferentes curvas muestran que, a medida que la contrapresión aumenta ligeramente, la presión a lo largo del eje de la tobera experimenta un incremento brusco como resultado de una onda de choque interna^{2 y 3} tanto más próxima a la sección de descarga de la tobera cuanto mayor es el valor de la contrapresión.

Experimentos⁴ realizados con toberas de motor cohete sobreexpansionadas indican que la presión de desprendimiento del chorro en su interior ocurre cuando la presión del gas es, aproximadamente, el 40 % de la contrapresión.



Ejercicios

Ejercicio 1

En una sección de un tubo aislado de 0,1 m de diámetro fluye aire a la presión de 3 atm, a una velocidad de 30 m/s. En otra sección corriente abajo, el aire se encuentra a la presión de 1,5 atm y su temperatura es de 200 K. Aceptando que la fricción del aire en el tubo es despreciable, determina:

- El número de Mach en cada una de las dos secciones de tubo especificadas
- El flujo másico de aire
- El diámetro del tubo en la sección corriente abajo

Resolución:

Al estar el tubo aislado, se puede considerar el flujo adiabático y, siendo despreciable, el rozamiento resulta isoentrópico.

Denotando por 1 y 2 los estados corriente arriba y corriente abajo, respectivamente, a partir de las relaciones isoentrópicas de estado del fluido y del flujo, tenemos:

$$K T_1 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 200(2)^{0,4/1,4} = 243,8 \text{ K}$$

$$a_1 = (\gamma R T_1)^{1/2} = \left(1,4 \cdot \frac{8314}{28,964} \cdot 243,8 \right)^{1/2} \left(1,4 \cdot \frac{8314}{28,964} \cdot 243,8 \right)^{1/2} = 313 \text{ m/s} \rightarrow M_1 = V_1 / a_1$$

$$= 30 / 313 = 0,0958$$

$$M_2 = \left[\frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{P_0}{P_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right\} \right]^{1/2}$$

$$P_0 = P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 3 \left(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2 \right)^{3,5} \left(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2 \right)^{3,5} = 3,019 \text{ atm}$$

$$M_2 = \left[5 \left\{ \left(\frac{3,019}{1,5} \right)^{0,4/1,4} - 1 \right\} \right]^{1/2} = 1,0517$$

El flujo másico se determina mediante la ecuación

$$\dot{m} = \frac{M_1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \left(\frac{\gamma}{R T_0} \right)^{1/2} P_0 A$$

$$\text{donde } T_0 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) = 243,8 \left(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2 \right) \left(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2 \right) = 244,25 \text{ K}$$



Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\dot{m} = \frac{0,0958}{(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2)^3} \left(\frac{1,4}{287,04 \cdot 244,2} \right)^{1/2} \frac{0,0958}{(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2)^3} \left(\frac{1,4}{287,04 \cdot 244,2} \right)^{1/2} \\ \cdot 3,019 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \frac{\pi}{4} 0,1^2 \\ \dot{m} = 1,023 \text{ Kg} / \text{s}$$

Aplicando la ecuación de continuidad, se calcula el diámetro D_2 . En efecto:

$$\rho_2 V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2 = \dot{m} \\ D_2 = \left[\frac{\dot{m}}{\pi / 4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}}{M_2 (\gamma / RT_0)^{1/2} P_0} \right]^{1/2} = \\ = \left[\frac{1,023}{\pi / 4} \cdot \frac{(1 + 0,2 \cdot 0,0958^2)^3}{1,0517 (1,4 \cdot 287,04 \cdot 244,25)^{1/2} 3 \cdot 0,19 \cdot 1,013 \cdot 10^5} \right] \\ D_2 = 4,064 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Observación: Dado que $M_1 < 1 < M_2$, en una sección del tubo intermedia entre la 1 y la 2, debe existir una sección crítica cuyo diámetro D^* se calcula mediante la ecuación:

$$D^* = \left[\frac{4 \cdot \dot{m}}{\pi \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)} \left(\frac{\gamma}{RT_0} \right)^{1/2} P_0} \right]^{1/2} = \\ = \left[\frac{4 \cdot 1,0233}{\pi \left(\frac{2}{2,4} \right)^3 \left(\frac{1,4}{287,04 \cdot 244,25} \right)^{1/2} 3,019 \cdot 1,013 \cdot 10^5} \right]^{1/2} = 4,058 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

(Ver [Em86])



Ejercicio 2

Sea una tobera convergente-divergente de las características geométricas y con el estado termodinámico de referencia siguientes:

$$(A_1 / A_2) = 6 ; (A_3 / A_2) = 2,5 ; P_1 = 2 \cdot 10^2 \text{ Pa} ; T_1 = 300 \text{ K} ; (P_\infty / P_0) = 0,97$$

Determina: $M_1, M_2, M_3, P_1 / P_0, P_2 / P_0, V_3, \dot{m} / A_1$

¿Qué valor ha de tener la relación P_∞ / P_0 para que la sección A_2 sea crítica?

Resolución:

Este problema se va a resolver utilizando la tabla de magnitudes de flujo isoentrópico para $\gamma = 1,4$.

Suponiendo subsónico el flujo a lo largo de toda la tobera, se cumple $P_3 / P_0 = 0,97$. A partir de este valor, la tabla citada aporta los valores siguientes:

$$M_3 = 0,21, \frac{A_3}{A^*} = 2,83, \frac{T_3}{T_0} = 0,991$$

por consiguiente

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{A_2}{A_3} \frac{A_3}{A^*} = 2,83 / 2,5 = 1,132.$$

En las mismas tablas, esta relación de áreas aporta los valores

$$75M_2 = 0,645, P_2 / P_0 = 0,7533, \text{ y, en la cámara (1), } \frac{A_1}{A^*} = \frac{A_1}{A_2} \frac{A_2}{A^*} = 6 \cdot 1,132 = 6,792$$

$$\rightarrow M_1 = 0,085, \frac{P_1}{P_0} = 0,995.$$

La velocidad de salida viene dada por

$$V_3 = (\gamma R T_3)^{1/2} M_3 = (1,4 \cdot 287 \cdot 300)^{1/2} (1,4 \cdot 287 \cdot 300)^{1/2} \cdot 0,21 = 72,6 \text{ ms}^{-1}$$

El flujo másico por unidad de área en el conducto de entrada a la tobera viene dado por:

$$\frac{\dot{m}}{A_1} = \frac{M_2}{\left[1 + \left\{\frac{\gamma-1}{2}\right\} M_2^2\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \cdot \left(\frac{\gamma}{RT_0}\right)^{1/2} P_0 \frac{A_2}{A_1}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{A_1} &= \frac{0,645}{\left[1 + 0,2 \cdot 0,645^2\right]^3} \left(\frac{1,4}{287 \cdot 300}\right)^{1/2} \frac{0,645}{\left[1 + 0,2 \cdot 0,645^2\right]^3} \left(\frac{1,4}{287 \cdot 300}\right)^{1/2} 2 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \frac{1}{6} = \\ &= 69,4 \text{ Kg} / \text{m}^2 \text{s} \end{aligned}$$



Ahora, para $\frac{A_2}{A^*} = 1$ (régimen crítico), las tablas dan $\frac{P_2}{P_0} = 0,5283$.

Dado que $\frac{A_3}{A_2} = 2,5$, resulta $\frac{A_3}{A^*} = 2,5$ y las tablas dan $M_3 = 0,24$, $\frac{P_3}{P_0} = 0,9607$.

(Ver [Em86])

Ejercicio 3

Dos depósitos se comunican mediante una tobera convergente-divergente cuya garganta tiene un área de $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Por ella, se expansiona el nitrógeno procedente del primer depósito, en que se encuentra a 400 K y 1,5 atm absolutas, hasta el estado que reina en el segundo depósito.

Suponiendo que la evolución se produce como si se tratase de un gas perfecto de calores específicos constantes en régimen estacionario, se pregunta:

- 1) Determina la velocidad del nitrógeno en la garganta y el flujo másico cuando la presión en el depósito receptor es de 0,2 atm absolutas.
- 2) Ídem cuando dicha presión es de 1 atm absoluta.

Si en la garganta se alcanza el régimen crítico, se verifica $\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma - 1} \right)} = 0,528$ para $\gamma = 1,4$.

Si $\frac{P_2}{P_0} < \frac{P^*}{P_0}$, el régimen de descarga del nitrógeno en el depósito receptor es supersónico; en caso contrario, subsónico.

Resolución

1. $\frac{P_2}{P_0} = \frac{0,2}{1,5} = 0,133 < \frac{P^*}{P_0}$; por consiguiente, el régimen de descarga es supersónico.

A partir de las tablas de flujo isoentrópico para $M = 1$, se tiene:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833; \text{ por tanto, } T^* = 0,833 \cdot 400 = 333,2 \text{ K}$$

$$a^* = \left(\gamma R T^* \right)^{1/2} = \left(1,4 \cdot \frac{8314}{28} \cdot 333,2 \right)^{1/2} = \left(1,4 \cdot \frac{8 \cdot 314}{28} \cdot 333,2 \right)^{1/2} = 372,17 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_g = a^* = 372,17 \text{ m.s}^{-1}$$



$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= (\rho V)_g \cdot A_g \cdot A_g = \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} P_0 \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} = \\
 &= \sqrt{\frac{1,4}{\frac{8314}{28} \cdot 400}} \sqrt{\frac{1,4}{\frac{8.314}{28} \cdot 400}} \cdot 1,5 \cdot 1.013 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{2}{2,4}\right)^3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{2}{2,4}\right)^3 = \\
 &= 0,148 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$2. \frac{P_2}{P_0} = \frac{1}{1,5} = 0,666 > \frac{P^*}{P_0}; \text{ por consiguiente, el régimen de descarga es subsónico.}$$

Entonces, a partir de las tablas de flujo isoentrópico, se obtiene:

$$M = 0,784 < 1, \frac{T}{T_0} = 0,89.$$

$$\begin{aligned}
 T &= 0,89 \cdot T_0 = 0,89 \cdot 400 = 356 \text{ K} \rightarrow a = (\gamma RT)^{1/2} = (1,4 \cdot 297 \cdot 356)^{1/2} (1,4 \cdot 297 \cdot 356)^{1/2} = \\
 &= 384,74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$V_g = (aM)_g = 384,74 \cdot 0,784 = 301,64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= (\rho VA)_g = \frac{P_0}{RT_0} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/\gamma-1} \cdot V_g \cdot A_g = \\
 &= \frac{1,5 \cdot 1,013 \cdot 10^4 \cdot 9,81}{\frac{8314,3}{28} \cdot 400} \cdot 0,89^{2,5} \cdot 301,64 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/\gamma-1} \cdot V_g \cdot A_g = \\
 &= \frac{1,5 \cdot 1,013 \cdot 10^4 \cdot 9,81}{\frac{8.314,3}{28} \cdot 400} \cdot 0,89^{2,5} \cdot 301,64 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \\
 &\dot{m} = 0,1414 \text{ Kg} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

(Ver [Vi93])



Flujo estacionario unidimensional con fricción. Línea de Fanno para gases perfectos. Flujo isoterma

9.1 Introducción

En la práctica, se encuentran muchos procesos de flujo en conductos de sección transversal constante cuyo principal factor gobernante es el rozamiento fluidodinámico en la pared. El análisis de este tipo de flujo simple se fundamenta en las condiciones siguientes:

- Flujo adiabático estacionario unidimensional
- Conducto de sección recta constante
- Fricción en la pared del conducto

La figura 9.1 muestra un elemento del conducto que contiene un volumen de control infinitesimal de fluido en que se han de satisfacer las ecuaciones fundamentales de continuidad, de cantidad de movimiento, de energía y de estado termodinámico. Dichas ecuaciones se escriben:

$$\text{Ecuación de continuidad} \quad G = \dot{m} / A = \rho V \quad (9.1)$$

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad dP + \rho V dV + \left(\rho V^2 / 2 \right) (\lambda dx / D) = 0 \quad (9.2)$$

$$\text{Energía} \quad dh + d \left(V^2 / 2 \right) = 0 \quad (9.3)$$

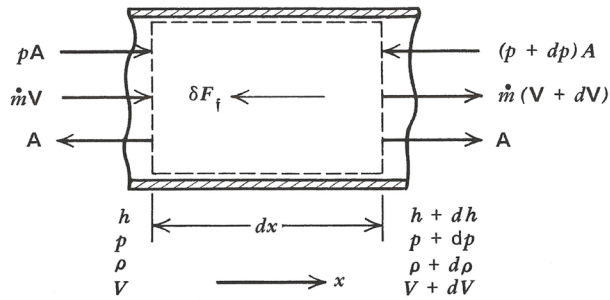
$$\text{Estado} \quad P = \rho RT \quad (9.4)$$

Integrada la ecuación 9.3 entre un estado arbitrario y el estado de reposo, e introduciendo en la ecuación resultante la de continuidad, resulta:

$$h + \left(G^2 v^2 / 2 \right) = h_0 \quad (9.5)$$



Fig. 9.1.
Volumen de control para el análisis del flujo de Fanno [ZH76]



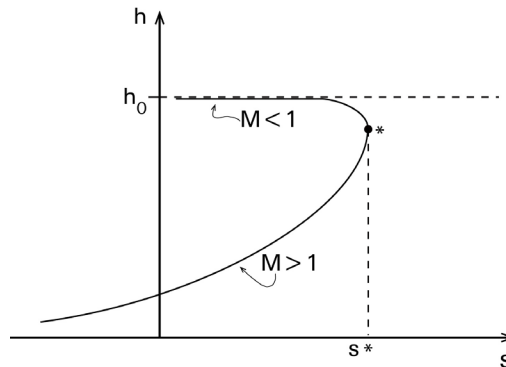
9.2 Línea de Fanno

En la ecuación 9.5, v es el volumen específico del gas y h_0 su entalpía de remanso por unidad de masa. Para un valor constante del flujo másico específico G , la curva que representa h en función de v recibe el nombre de *línea de Fanno* y la ecuación 9.5 es conocida como la *ecuación de la línea de Fanno*. La línea de Fanno es el lugar geométrico de los posibles estados termodinámicos que el gas puede alcanzar para un valor de G constante.

Conocidas las condiciones del flujo y del fluido en una sección de la corriente, es posible definir las variables de estado del fluido en cualquier otra sección mediante la línea de Fanno trazada en el diagrama h, s (entalpía-entropía) (v. figura 9.2).

La ecuación de la línea de Fanno en términos de entalpía-entropía se deduce como sigue.

Fig. 9.2.
Línea de Fanno en el plano h, s



La variación de entropía entre dos estados se escribe:

$$s - s_1 = c_v \cdot \ln \left[\frac{P}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma \right] \quad (9.6)$$

Sustituyendo $(P/\rho) = (h/c_p)$, $\rho = (G/V)$ y $V = (2[h_0 - h])^{1/2}$ en la ecuación 9.6, resulta:



$$s - s_1 = c_v \cdot \ln \left[\frac{\rho_1^\gamma}{P_1} \cdot \frac{R}{c_p} \left(\frac{\sqrt{2}}{G} \right)^{\gamma-1} \right] + c_v \cdot \ln \left[h(h_0 - h)^{\frac{\gamma-1}{2}} \right] \quad (9.7)$$

En general, los valores iniciales de h , v y G son conocidos. El trazado de una línea de Fanno para un valor particular del flujo específico de masa G parte de una serie de valores del volumen específico v del gas y, mediante la ecuación 9.5, se calculan los valores correspondientes a la entalpía h , bien entendido que su valor de remanso se mantiene constante. A partir de los valores de h y v , se calculan los correspondientes valores de s mediante la ecuación 9.7, o bien se toman de las tablas de propiedades termodinámicas del gas.

La figura 9.3 muestra una línea de Fanno genérica para el vapor de agua en la cual se han trazado varias líneas isobaras.

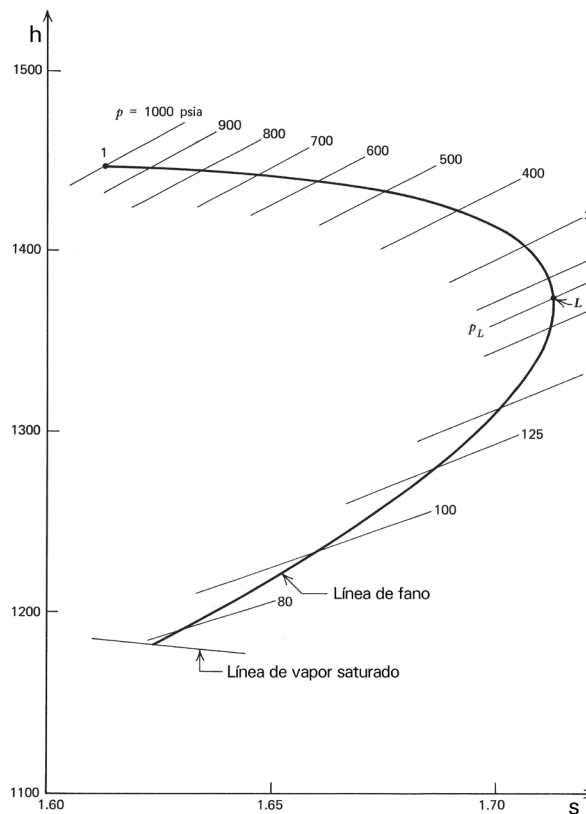


Fig. 9.3.
Línea de Fanno para
el vapor de agua
[ZH76]

Como ilustra la figura, la línea de Fanno presenta dos ramas. Manteniendo G constante, a lo largo de la rama superior la entalpía del vapor disminuye y su entropía aumenta a medida que la presión disminuye, mientras que a lo largo de la rama inferior la entalpía y la entropía aumentan a medida que lo hace la presión. A la confluencia de ambas ramas, punto L, le corresponde un valor particular de la presión estática P_L , y en él la entropía alcanza su valor máximo.



La línea de Fanno informa de tres consecuencias principales. Supóngase que, en un conducto de sección recta constante, la presión en la entrada es P_1 y en la salida se puede reducir a voluntad. En el flujo adiabático de expansión del gas en el conducto, la presión irá disminuyendo por efecto de la fricción en la pared y la velocidad irá aumentando, pero la presión no puede alcanzar un valor inferior a P_L , pues, en virtud de los principios de la termodinámica, la entropía del gas no puede disminuir. Cuando el gas alcanza dicha presión límite, se dice que el flujo está “bloqueado” y la velocidad del gas es la máxima que se puede alcanzar en el proceso de expansión, que recibe el nombre de “velocidad límite o de bloqueo”.

La rama inferior de la línea de Fanno representa los estados termodinámicos que se pueden alcanzar en un proceso de flujo que se genera a partir de valores de entalpía y presión estática inferiores a los del estado de máxima entropía. Se trata de un *flujo de compresión*.

La velocidad máxima que se puede alcanzar por un proceso de compresión o por un proceso de expansión, dado un flujo específico másico de gas, recibe el nombre de *velocidad límite* y corresponde al estado termodinámico de máxima entropía.

Por otra parte, se verifica que, en el caso del flujo adiabático con fricción de un fluido compresible en un conducto de sección transversal constante, la entropía del fluido es máxima cuando su velocidad es igual a la del sonido y el valor del número de Mach es la unidad. En efecto, diferenciando la ecuación 9.5 resulta: $dh + G^2 dv = 0$.

Ahora bien, para una variación infinitesimal de estado en el entorno al punto de máxima entropía de la línea de Fanno, se ha de satisfacer la condición: $Tds = dh - vdP = 0$.

Combinando ambas igualdades, se obtiene:

$$vdP + G^2 dv = 0 \quad (9.8)$$

Integrando la ecuación 9.8 y teniendo en cuenta que $v = 1/\rho$ y $G = \rho V$, se la puede escribir en la forma:

$$\frac{dP}{\rho} - V^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Despejando V^2 y recordando que se considera una evolución infinitesimal en el entorno al punto de máxima entropía, de modo que esta se conserva constante, se obtiene:

$$V^2 = \frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = a^2 \quad (9.9)$$

La ecuación 9.9 ratifica cuanto se ha enunciado anteriormente.

En la figura 9.4, se muestra que, en el punto L de la línea de Fanno, la entropía del fluido es máxima, su velocidad es también máxima y el número de Mach es la unidad.

Por consiguiente, la rama superior de la línea de Fanno representa flujos para los cuales $V < a^*$ y $M < 1$, mientras que a la inferior le corresponden flujos en los cuales $V > a^*$ y $M > 1$.

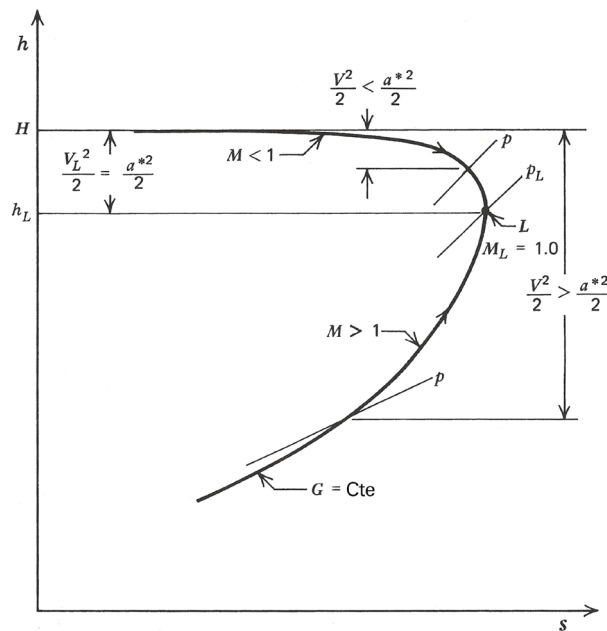


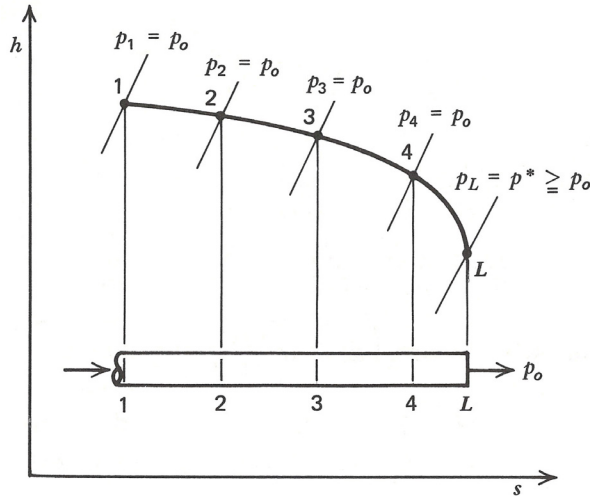
Fig. 9.4.
Punto de máxima
entropía sobre una línea
de Fanno
[ZH76]

Conforme a lo expuesto en los párrafos anteriores, cabe sacar, entre otras, las importantes conclusiones siguientes:

- Si la velocidad inicial del fluido en un conducto de sección recta constante es subsónica, el efecto de la fricción en la pared es acelerar el flujo hasta la velocidad acústica local, como límite, y disminuir progresivamente la presión del fluido.
- Si la velocidad inicial es supersónica, el efecto de fricción es desacelerar el flujo hasta la velocidad acústica local, como límite, y aumentar progresivamente la presión del fluido.
- Todo aumento de la longitud del conducto significa un incremento de la resistencia al flujo por fricción, lo cual se refleja en un mayor valor del cambio de entropía. Manteniendo en el conducto alargado la misma presión inicial que en el conducto de referencia, a la misma diferencia de presión entre la entrada y la salida del conducto debería corresponderle la misma diferencia de entropía del fluido, condición que satisface la línea original de Fanno. En este caso, el proceso de flujo requiere representarlo por otra línea de Fanno con un valor menor de G . Si se desea mantener el mismo valor de G , habrá que aumentar la presión del fluido a la entrada del conducto hasta que el valor correspondiente de su entropía difiera del del estado original (conducto no alargado) en una cantidad igual al incremento de entropía originado por el alargamiento del conducto.
- Si las condiciones iniciales se mantienen constantes pero se reduce gradualmente la contrapresión en el conducto, la velocidad del gas aumenta progresivamente hasta alcanzar el valor crítico $V = a^*$ en la sección de salida donde la presión es crítica P^* . La reducción de la presión de salida a un valor inferior al crítico no tiene influencia sobre el valor de G . La figura 9.5 muestra la influencia de la disminución de la contrapresión sobre el flujo a lo largo de la línea de Fanno.



Fig. 9.5.
Efecto de la disminución
de la contrapresión sobre
el flujo a lo largo de la
línea de Fanno
[ZH76]



- Impuesto un valor de G constante, hay una longitud definida de conducto de sección recta constante que causa su *bloqueo* en la sección de salida. Esta longitud de conducto recibe la denominación de *longitud crítica* y se designa por L^* . Las propiedades del fluido y del flujo allí donde es bloqueado se denotan con la tilde *, pero no hay que confundirlas con las de notación idéntica para el flujo isoentrópico.

9.3 Relaciones entre los valores de las propiedades del fluido y del flujo a lo largo de la línea de Fanno para un gas perfecto

En el caso de un flujo estacionario unidimensional adiabático con fricción de un gas perfecto por un conducto de sección recta constante, la relación entre los valores de las propiedades del fluido y del flujo en dos secciones del conducto pueden expresarse en términos del número de Mach del flujo.

Sean dos secciones 1 y 2 del conducto de área A . Puesto que el flujo es adiabático, la entalpía de remanso se mantiene y se verifica:

$$T_1 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right\} = T_2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right\}$$

Habida cuenta de que el flujo específico másico se mantiene constante, se cumple:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V = \frac{P}{RT} a M = P M \left(\frac{\gamma}{RT} \right)^{1/2} = P_1 M_1 \left(\frac{\gamma}{RT_1} \right)^{1/2} = P_2 M_2 \left(\frac{\gamma}{RT_2} \right)^{1/2} \quad (9.10)$$

A partir de la ecuación 9.10, se obtienen, por simples transformaciones, las relaciones siguientes:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{1/2} \quad (9.11)$$



$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{1/2} \quad (9.12)$$

La relación entre las presiones de remanso se escribe:

$$\frac{P_{10}}{P_{20}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad (9.13)$$

El cambio de entropía en función del número de Mach se obtiene combinando la ecuación $\Delta s = s_2 - s_1 = -R \ln(P_{20}/P_{10})$ y la ecuación 9.13, y resulta:

$$s_2 - s_1 = R \ln \left[\frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \right] \quad (9.14)$$

Para facilitar los cálculos, es conveniente referir el estado del fluido en una sección del conducto a las condiciones límite $M = 1$ como estado de referencia.

Los valores correspondientes de P/P^* , T/T^* , $s-s^*$, etc., son los siguientes:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right\}} \quad (9.15)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{\gamma+1}{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9.16)$$

$$\frac{s-s^*}{c_p} = \ln M^2 \left[\frac{\gamma+1}{2 M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \quad (9.17)$$

Los valores de las relaciones entre las propiedades del fluido y también entre las del flujo adiabático unidimensional con fricción en un conducto de sección recta constante se encuentran tabulados en el anexo I.



9.4 Dinámica del flujo estacionario unidimensional adiabático con fricción en un conducto de sección recta constante

En un conducto de sección recta circular de diámetro D , la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de un fluido compresible se escribe:

$$\frac{dP}{\rho} + VdV + \lambda \frac{V^2}{2} \frac{dx}{D} = 0 \quad (9.18)$$

donde λ es el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach.

La ecuación 9.18 se puede escribir así:

$$\frac{dP}{P} + \rho \frac{VdV}{P} + \frac{\lambda}{2D} \rho \frac{V^2}{P} dx = 0 \quad (9.19)$$

Mediante simples transformaciones, se obtienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= - \left\{ \frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)M^2} \right\} \cdot \frac{dM}{M} \\ V^2 &= M^2 \cdot a^2 = M^2 \cdot \gamma \frac{P}{\rho} \rightarrow \rho \frac{V^2}{P} = \gamma M^2 \\ \frac{dV}{V} &= \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right\}} \cdot \frac{dM}{M} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación 9.19, se obtiene:

$$\frac{\lambda}{D} dx = \frac{2(1 - M^2)}{\gamma M^3 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right\}} dM = \frac{(1 - M^2)}{\gamma M^4 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right\}} dM^2 \quad (9.20)$$

Conociendo $\lambda(x)$ e integrando la ecuación 9.20 entre los límites $x=0, M=M_1$ y $x=L, M=M$, se obtiene:

$$\lambda \frac{L}{D} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right\} + \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \cdot \ln \left[\left(\frac{M_1}{M} \right)^2 \left\{ \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right\} \right] \quad (9.21)$$

La ecuación 9.21 permite determinar la máxima longitud de conducto, de diámetro D y coeficiente de fricción λ , en que M_1 es el número de Mach del flujo en la entrada. Para ello, se ha de aplicar la condición $L = L_{\max}$ para $M = 1$. Resulta:

$$\bar{\lambda} \frac{L_{\max}}{D} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{M_1^2} - 1 \right\} + \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \cdot \ln \left[M_1^2 \frac{(\gamma - 1)}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right\}} \right] \quad (9.22)$$



A partir de esta solución general, procede considerar dos condiciones particulares:

- (i) Efectos de compresibilidad despreciables
- (ii) Flujo isotérmico

9.4.1 Flujo de Fanno en caso de compresibilidad despreciable

En las condiciones consideradas, $\rho V \frac{dV}{dx} \rightarrow 0$; entonces, la ecuación de conservación de

cantidad de movimiento se expresa: $\frac{dP}{dx} = -\frac{\lambda}{2D} \rho V^2 = -\frac{\lambda}{2D} \cdot \frac{P}{(RT)} V^2$

O sea:
$$\frac{dP}{P} = -\frac{\lambda}{2D} \gamma M^2 dx \quad (9.23)$$

Por otra parte:
$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma M^2 [1 + (\gamma - 1)] M^2}{2(1 - M^2)} \left(\frac{\lambda}{D} dx \right) \quad (9.24)$$

Sustituyendo la ecuación 9.24 en la ecuación 9.23 e integrando, se obtiene L en función de M .

9.4.2 Flujo isotérmico

Por ser isoterma el proceso de flujo, se cumple la ley de Boyle, o sea:

$$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P}{\rho} = RT_1$$

A partir de la ecuación de continuidad, se derivan las relaciones siguientes:

$$\rho V = \rho_1 V_1 \rightarrow V = \frac{\rho_1 V_1}{\rho} = \frac{P_1 V_1}{P} \rightarrow dV = -\frac{P_1 V_1}{P^2} dP \quad (9.25)$$

$$\rho V^2 = \rho_1 V_1 V = \rho_1 \frac{P_1 V_1^2}{P} \quad (9.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 9.25 y 9.26 en la ecuación de la cantidad de movimiento 9.18, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} - \rho_1 V_1 \frac{P_1 V_1}{P^3} dP + \rho_1 \frac{P_1 V_1^2}{P^2} \frac{\lambda}{2D} dx = 0 \quad (9.27)$$

Multiplicando por P^2 y teniendo en cuenta que $\rho_1 V_1^2 = P_1 \frac{V_1^2}{RT_1} = \gamma P_1 M_1^2$, resulta:

$$PdP - \gamma P_1^2 M_1^2 \frac{dP}{P} + \gamma P_1^2 M_1^2 \frac{\lambda}{2D} dx = 0$$



que, integrada entre los límites $x=0; P=P_1; x=L; P=P$, resulta:

$$\bar{\lambda} \frac{L}{D} = \frac{1}{\gamma \cdot M_1^2} \left[1 - \left(\frac{P}{P_1} \right)^2 \right] + \ln \left(\frac{P}{P_1} \right)^2 \quad (9.28)$$

Procede ahora analizar el nuevo estado límite. En las condiciones de bloqueo, $dx/dP = 0$; entonces, a partir de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento 9.18, tomando:

$$P = \rho RT = \frac{GRT}{V}; \quad dP = -\frac{GRT}{V^2} dV = -\rho RT \frac{dV}{V}$$

resulta:
$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V} \quad (9.29)$$

Sustituyendo la relación 9.29 en la ecuación 9.18 se obtiene:

$$\frac{dP}{\rho} - V^2 \frac{dP}{P} + \frac{\lambda}{2D} V^2 dx = 0 \quad (9.30)$$

A partir de la ecuación 9.30, una simple reordenación de los términos conduce a la ecuación:

$$\frac{dx}{dP} = \frac{2D}{\lambda} \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{\rho V^2} \right) \quad (9.31)$$

La condición límite $(dx/dP)_{\text{limite}} = 0$ impone $\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{\rho V^2} \right)_{\text{limite}} = 0$. Entonces:

$$V_{\text{lim}} = \sqrt{\left(\frac{P}{\rho} \right)_{\text{lim}}} = \sqrt{RT_{\text{lim}}} = \sqrt{RT_1} = \frac{a_1}{\sqrt{\gamma}} \rightarrow \frac{V_{\text{lim}}}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (9.32)$$

Por otra parte,
$$\frac{P_{\text{lim}}}{P_1} = \frac{\rho_{\text{lim}}}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_{\text{lim}}} = \frac{V_1 \sqrt{\gamma}}{a_1} = M_1 \sqrt{\gamma}$$

Ahora, considerando $V = V_{\text{lim}}$ y $P = P_{\text{lim}}$, se tiene $L = L_{\text{máx}}$ y su ecuación:

$$\bar{\lambda} \frac{L_{\text{máx}}}{D} = \frac{1}{\gamma \cdot M_1^2} \left[1 - \left(\frac{P_{\text{lim}}}{P_1} \right)^2 \right] + \ln \left(\frac{P_{\text{lim}}}{P_1} \right)^2 \quad (9.33)$$

En términos solo de M_1 , se escribe:

$$\bar{\lambda} \frac{L_{\text{máx}}}{D} = \frac{1}{\gamma \cdot M_1^2} \left[1 - \gamma \cdot M_1^2 \right] + \ln \left(\gamma \cdot M_1^2 \right) \quad (9.34)$$



Si, además del flujo isotérmico, se puede admitir que la condición de compresibilidad es despreciable, la ecuación $\frac{dP}{P} = -\frac{\lambda}{2D} \gamma M^2 dx$ se transforma en $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{M_1^2}{2} \left(\frac{\lambda}{D} dx \right)$, cuya integral es:

$$\ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = -\gamma \frac{M_1^2}{2} \left(\bar{\lambda} \frac{L}{D} \right) \quad (9.35)$$

La ecuación 9.35 se puede simplificar teniendo en cuenta que, para $(P_2 / P_1) \cong 1$, se tiene:

$$\ln(P_2/P_1) = (P_2/P_1) - 1$$

Por consiguiente:

$$\frac{P_2}{P_1} \approx 1 - \gamma \frac{M_1^2}{2} \left(\frac{\bar{\lambda} L}{D} \right) \quad (9.36)$$

9.5 El coeficiente de fricción

El efecto de la fricción sobre el flujo de fluidos compresibles en conductos de área de sección recta circular constante fue investigado analíticamente por Grashof¹ y Zeuner,² que llegaron a establecer una relación entre el coeficiente de presión y la velocidad del fluido para gases perfectos. Stodola³ demostró que las curvas de Fanno permiten un tratamiento gráfico general de cualquier ley de fricción. Frössel⁴ presentó las primeras mediciones extensas de coeficientes de fricción para el flujo de aire a través de tubos lisos con velocidades superiores e inferiores a la del sonido. Los valores medidos para flujo subsónico y supersónico parecen coincidir, a los correspondientes números de Reynolds, con los valores medidos para flujo incompresible. Keenan y Neumann⁵ realizaron una investigación experimental exhaustiva de los coeficientes de fricción del flujo de aire en régimen subsónico y supersónico en un tubo.

El intervalo de valores del número de Mach va desde 0,27 hasta 3,87, y el de números de Reynolds, desde 10^4 hasta $8,7 \cdot 10^5$.

Las conclusiones más importantes son las siguientes:

- Para valores de L/D superiores a 50, el coeficiente aparente de fricción para el flujo compresible a números de Mach mayores o menores que 1 es aproximadamente igual, para los mismos números de Reynolds, a los coeficientes de fricción para flujo incompresible con capa límite completamente desarrollada.
- Para valores de L/D inferiores a 50, el coeficiente de fricción es una función de L/D y del número de Reynolds. Si el número de Reynolds es inferior a 10^6 el valor del coeficiente de fricción es generalmente menor que el dado por la fórmula de Kármán-Nikuradse. El efecto del número de Mach es limitar el rango de valores de L/D .
- Para números de Mach superiores a la unidad, el coeficiente de fricción aparente medio disminuye rápidamente desde de un valor relativamente alto en la entrada hasta un valor mínimo a una distancia aproximada de 20 diámetros a partir de la



entrada. A mayor distancia, dicho valor aumenta progresivamente a medida que la distancia a la entrada aumenta hasta alcanzar un valor límite dado por la fórmula de Kármán-Nikuradse.

- La variación del valor del coeficiente de fricción con L/D para un flujo supersónico es similar al observado en el flujo de fluidos incompresibles.
- El coeficiente de fricción aparente está sumamente influido por la presencia de ondas de choque oblicuas en el tubo.

El coeficiente de fricción aparente es definido en la publicación de Keenan y Neumann como $\lambda = 2\tau / \rho V^2$, donde τ es la tensión de cortadura en la pared del tubo, ρ es la densidad media del fluido y V es la velocidad media en él. En términos de L/D , γ y M , su valor para un gas perfecto viene dado por la fórmula:

$$\lambda = \frac{D}{4L} \left\{ \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{2 + M_1^2(\gamma - 1)}{M_1^2} - \frac{2 + M_2^2(\gamma - 1)}{M_2^2} \right] - \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right) \ln \sqrt{\frac{[2 + M_1^2(\gamma - 1)] M_2^2}{[2 + M_2^2(\gamma - 1)] M_1^2}} \right\} \quad (9.37)$$

La figura 9.6 muestra los valores del coeficiente de fricción para un flujo subsónico, comparados con los de un flujo incompresible para el mismo número de Reynolds, y la figura 9.7 muestra el coeficiente de fricción en función de la distancia a lo largo del tubo para el mismo régimen de flujo. En ambas representaciones, el coeficiente de fricción se ha de entender como el valor medio, a lo largo del tubo, del coeficiente de fricción aparente dado por la ecuación 9.37.

Fig. 9.6.
Coeficientes de fricción
en el flujo subsónico,
comparados con los de
flujo incompresible⁵

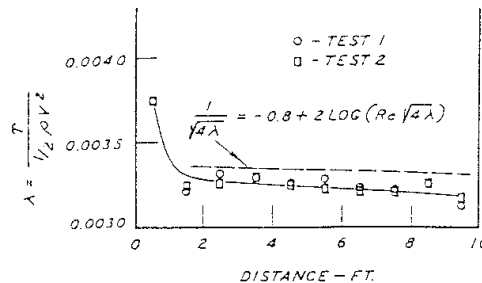
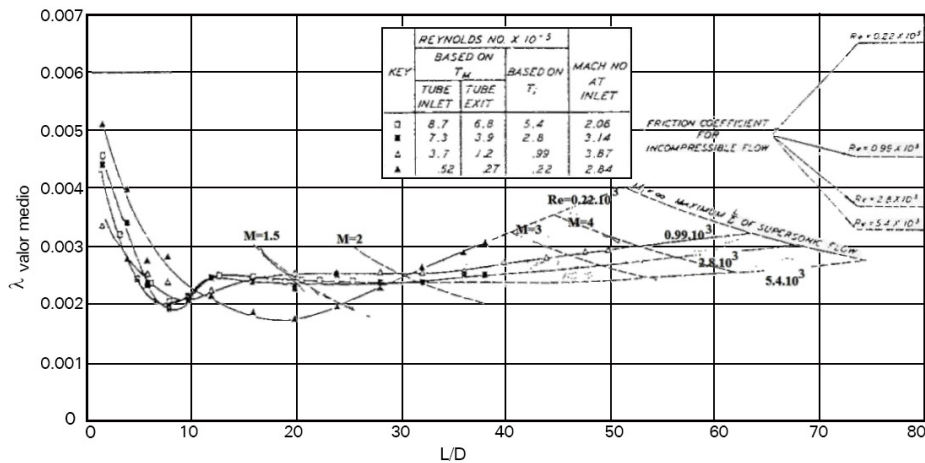


Fig. 9.7.
Coeficiente de fricción a
lo largo del tubo para
flujo subsónico





En la figura 9.8, se ha representado el coeficiente de fricción aparente medio entre la entrada y cualquier valor de L/D frente al valor de L/D para flujo supersónico, a varios números de Mach.

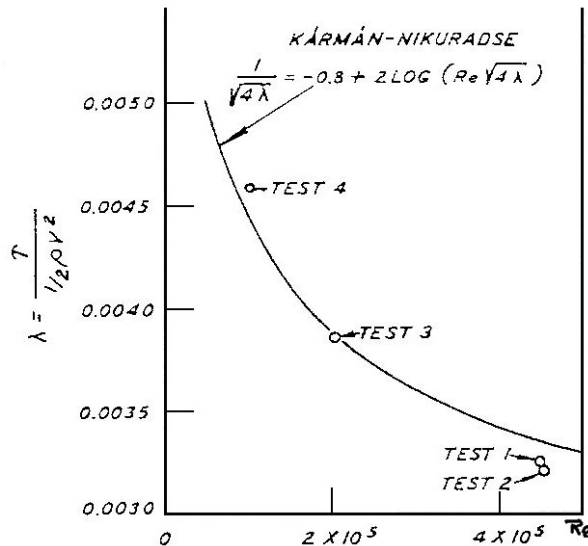


Fig. 9.8.
Coeficiente de fricción
aparente medio en
función de L/D para
flujo supersónico⁵

Sobre cada curva, se indica el número de Reynolds que corresponde a la viscosidad para la velocidad cero, y en el margen de la derecha se muestra el valor correspondiente al coeficiente de fricción para un fluido incompresible a grandes valores de L/D .

En la misma figura, se han trazado varios segmentos de hipérbola que representan el máximo valor de $\lambda(L/D)$ al cual corresponde $M_2 = 1$ para el valor M_1 en la entrada al tubo indicado sobre cada segmento.

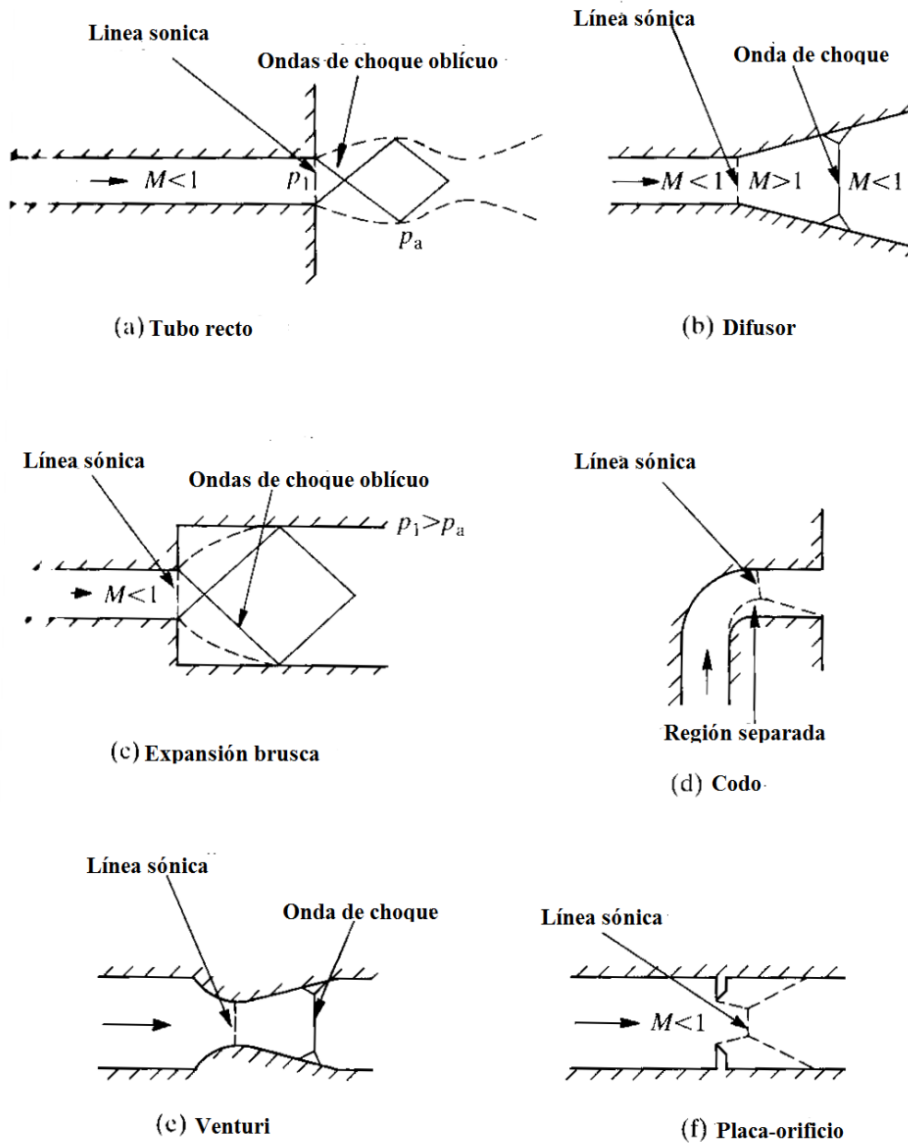
9.6 Procedimiento simplificado de cálculo de flujo adiabático teniendo en cuenta las pérdidas en accesorios

La mayoría de fenómenos de flujo en la industria se producen con números de Mach inferiores a 0,2. El cálculo de los flujos de gas con bajos números de Mach puede llevarse a cabo suponiendo que el fluido se comporta como incompresible, excepto en sistemas que implican conducciones de gran longitud, en cuyo caso el sistema deberá subdividirse en secciones, en que los cambios de densidad representan solo un pequeño tanto por ciento. En este caso, para cada sección se toma el valor medio de la densidad del fluido en ella.

Si un proceso de flujo en particular no puede tratarse como de fluido incompresible, es necesario aplicar las relaciones de flujo compresible y decidir si se darán o no las condiciones de bloqueo. Al estudiar un sistema, habitualmente es posible establecer dónde es probable que se produzca el bloqueo. Se conocen varias situaciones de flujo bloqueado, la mayoría no suficientemente bien comprendidas, que dan lugar a inestabilidades de flujo. La figura 9.9 ilustra alguna de estas situaciones y muestra dónde se produce el choque.



Fig. 9.9.
Diferentes situaciones
de flujo con bloqueo
[Mi90]



Como ya se ha explicado en otro capítulo, el choque da lugar a cambios significativos del estado del fluido y del flujo corriente abajo.

El bloqueo puede ocurrir:

1. En el extremo de un tubo que descarga en un gran recinto (v. figura 9.9a). Para establecer la velocidad del sonido en el extremo de un tubo de longitud significativa, la relación de presiones estáticas entre la salida del tubo y su entrada ha de ser inferior a 0,5.
2. En el extremo de un tubo cuya área de sección transversal aumenta en la dirección del flujo (v. figuras 9.9b y 9.9c).



3. En un cambio de dirección en un conducto de sección recta constante (v. figura 9.9d). En el flujo por un codo, parte de la corriente se acelera, lo cual incrementa el número de Mach local. Para codos con r/d superiores a 1, el bloqueo no ocurre en el propio codo si el tubo de salida tiene una longitud mayor que cuatro veces su diámetro.
4. En una restricción en un tubo o paso (v. figuras 9.9e y 9.9f). En el caso de un tubo de Venturi, se puede establecer bloqueo con relaciones de presión estática corriente abajo/corriente arriba próximas a la unidad. Esto hace que el tubo de Venturi sea un buen dispositivo de medición, en que es necesario que se produzcan pérdidas mínimas de presión bajo funcionamiento normal y mínimo flujo másico en condiciones de fallo, al igual que un tubo de evacuación de gases de explosión.

El flujo másico a través de dispositivos tales como toberas y tubos de Venturi depende solo de la presión del gas corriente arriba y de la temperatura, una vez establecido el bloqueo. En el caso de dispositivos tales como orificios y válvulas que tienen grandes áreas de separación de flujo, el valor del coeficiente de descarga puede continuar aumentando con el descenso de la contrapresión por debajo de la requerida para que se alcance la velocidad del sonido.

A la hora de calcular el flujo por tuberías y accesorios, es bien conocido que las propiedades del fluido permanecen constantes en un flujo incompresible, lo cual permite calcular las pérdidas de presión en componentes en cualquier orden y después sumarlas para evaluar la pérdida de presión total. Sin embargo, en los flujos compresibles, las condiciones de estado del fluido a través de cada componente deben establecerse por cálculo hacia atrás o hacia adelante, a lo largo del sistema, a partir de una localización donde las condiciones de estado del gas sean conocidas.

A título de ejemplo, la figura 9.10 muestra, para un tubo recto con flujo bloqueado en la salida, la variación dramática del número de Mach con la distancia a su extremo: a una distancia del extremo del tubo de cinco veces su diámetro, el número de Mach de la corriente pasa de 0,8 a 1. De ello, resulta que la variación del estado del fluido a lo largo del tubo es considerable.

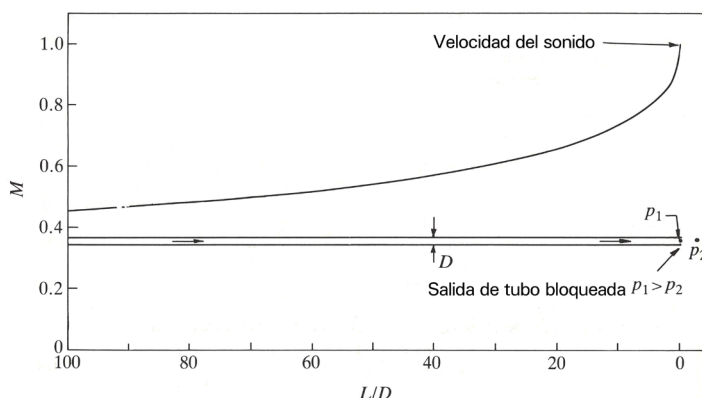


Fig. 9.10. Variación del valor del número de Mach del flujo a lo largo de un conducto de sección recta constante cuyo extremo está bloqueado (aire a $Re=106$). [Mi90]

Ese modo de proceder resulta, en general, tedioso, por lo cual se han desarrollado otros métodos, más simples y rápidos. Así, para flujos adiabáticos, es frecuente utilizar para calcular las pérdidas continuas y singulares un método basado en funciones de flujo másico adimensionales y las ecuaciones de los coeficientes de pérdidas singulares. Son las siguientes:



$$F_1(M) = \frac{P_1}{P} = \left[1 + (\gamma - 1)M^2 / 2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (9.38)$$

$$F_2(M) = \frac{\dot{m}(RT_1)^{1/2}}{AP_1} = \frac{\gamma^{1/2}M}{\left[1 + (\gamma - 1)M^2 / 2\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \quad (9.39)$$

$$F_3(M) = \frac{\dot{m}(RT_1)^{1/2}}{AP} = \gamma^{1/2}M \left[1 + (\gamma - 1)M^2 / 2\right]^{1/2} \quad (9.40)$$

$$K_c = \frac{P_{10} - P_{20}}{P_{20} - P_2} \quad (9.41)$$

9.6.1 Tubos rectos y accesorios de pequeña pérdida e idénticas secciones de entrada y salida

Los cálculos en caso de tubos y accesorios que producen pérdidas pequeñas, con áreas de entrada y de salida idénticas, requieren corregir los datos correspondientes al flujo incompresible para tener en cuenta los cambios de densidad, suponiendo que el patrón de flujo no cambia como resultado de la compresibilidad del fluido. Cuanto más alto es el coeficiente de pérdida de un accesorio, tanto mayor es el riesgo de cambio de patrón de flujo. A efectos prácticos, un accesorio con un coeficiente de pérdida menor que 0,25 a un número de Reynolds de 10^6 puede considerarse un accesorio de baja pérdida.

Siempre es necesario comprobar que los accesorios que tienen una diferencia de presión estática alta en comparación con su pérdida de presión total, como los tubos de Venturi y las válvulas de alta recuperación, no quedan bloqueados ni siquiera aunque sus números de Mach en la entrada sean moderados. Cuando se duda sobre si existe bloqueo, se estima el área mínima de flujo y se calcula el número de Mach suponiendo que no hay pérdida de presión total desde la entrada al área mínima de flujo.

En las condiciones de flujo que se han especificado, la ecuación básica de cálculo de los sistemas de tubos rectos con accesorios de baja pérdida es:

$$K_i = X_1 - X_2 \quad (9.42)$$

donde K_i es el coeficiente de pérdida del componente en flujo incompresible, o bien el coeficiente de pérdida por fricción dado por fL/D , y los valores de X se calculan mediante la ecuación:

$$X = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1)M^2}{2\{1 + (\gamma - 1)M^2 / 2\}} \right] \quad (9.43)$$

El valor de este parámetro de pérdida viene representado en la figura 9.11, en función del número de Mach.

En cuanto a los accesorios con coeficiente de pérdida mayor que 0,25, hay que tener en cuenta que en ellos suelen encontrarse áreas de separación de flujo seguidas por una recuperación de la presión estática después de una *vena contracta*. La separación de flujo da lugar a importantes efectos de compresibilidad: expansión radial, que puede reducir



la contracción del flujo y, por tanto, pérdida total de presión, y, a altos números de Mach subsónicos, resulta necesario relacionar las pérdidas a la velocidad máxima en el flujo separado y no a la velocidad en el tubo.

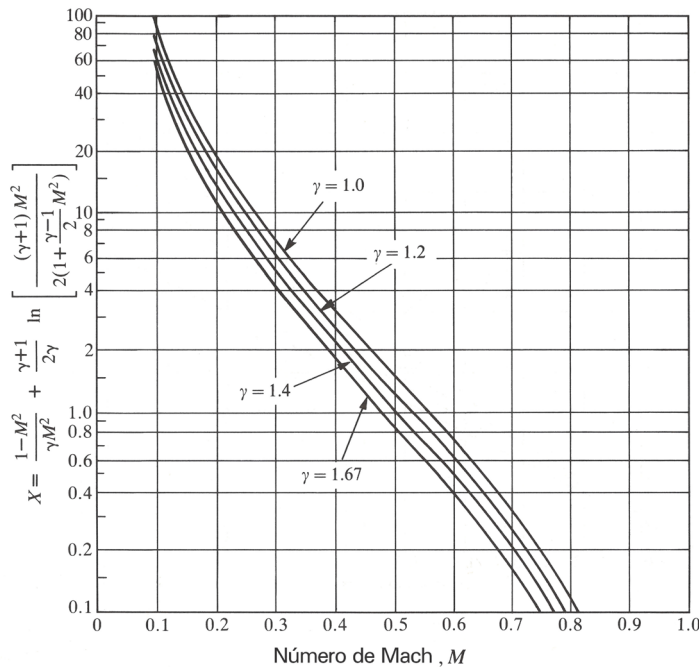


Fig. 9.11.
[Mi90]

Procedimiento de cálculo del coeficiente de pérdida en accesorios cuyo valor es mayor que 0,25

1. Hallar el coeficiente de pérdida, K_i , del componente considerando el flujo incompresible. Si se conoce el número de Mach en la entrada, verificar si K_i es menor que X (v. figura 9.11). Si K_i fuera mayor que X , el flujo está bloqueado. Ello obliga a reasignar al sistema nuevos valores de caudal y de presión.
2. Utilizando K_i , encontrar la relación de área aparente mediante la expresión:

$$R \cdot A_a = \frac{1}{(K_i^{0.5} + 1)} \quad (9.44)$$

3. Calcular el número de Mach no corregido, M_u , en el área aparente mínima de flujo utilizando las ecuaciones 9.38 y 9.40. Área mínima de flujo = área de entrada $\times R \cdot A_a$

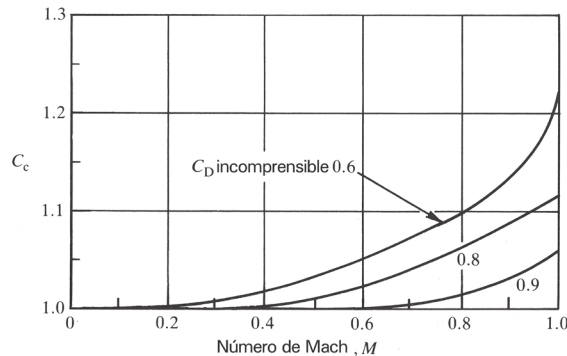
Suponer la presión total en el área mínima de flujo igual a la presión total en la entrada al componente. Cuando se lleven a cabo cálculos hacia atrás, será necesario estimar la presión total en la entrada P_{10} . Si el valor de la función de flujo másico (ecuaciones 9.39 o 9.40) es mayor que el que corresponde a Mach 1, suponer $M = 1$ y seguir los pasos 4 a 6. Si, en el paso 6, queda indicado todavía un valor de la función de flujo másico no realista, ir al paso 10. Si, en el paso 6, se indica que el número de Mach es inferior a la unidad, cuando en el paso 3 se tomó la unidad, suponer un número de Mach intermedio entre el valor indicado y la unidad, y repetir los pasos 5 y 6.



4. Si se conoce el área geométrica mínima del componente, sea en una malla metálica o en una placa-orificio, determinar el coeficiente de descarga aparente para fluido incompresible, C_{Da} ; de lo contrario, estimar un valor de C_{Da} aparente a partir de los datos representados en la figura 9.12.

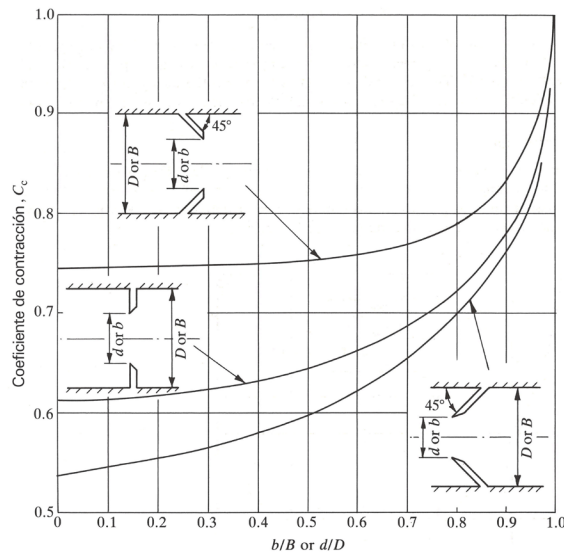
$$C_{Da} \text{ aparente} = \text{Área de entrada} \times R \cdot A_a / \text{Área de flujo conocida}$$

Fig. 9.12.
Coeficiente de
contracción
[Mi90]



5. Utilizar el número de Mach aparente a partir del punto 3 y el C_{Da} aparente a partir del punto 4 para obtener el coeficiente de corrección de compresibilidad, C_c , a partir de la figura 9.13.

Fig. 9.13.
Coeficiente de
corrección de
compresibilidad
[Mi90]



6. Calcular el número de Mach corregido en la sección mínima de flujo utilizando la ecuación 9.39, con:

$$\text{Área} = \text{área de flujo en la entrada} \times R \cdot A_a \times C_c, \text{ y}$$

Presión total en el área mínima de flujo = presión total en la entrada al componente.

7. Calcular K_s mediante la ecuación $K_s = (1 - R \cdot A_a \times C_c)^2$ (9.45)
8. Determinar P_{20} utilizando la ecuación siguiente, basada en la ecuación 9.41:



$$P_{20} = P_{10} \left[1 - K_s \left(1 - \frac{P_{vc}}{P_{10}} \right) \right] \quad (9.46)$$

donde $\frac{P_{vc}}{P_{10}}$ se calcula mediante la ecuación 9.38 utilizando el número de Mach del punto 6.

9. Si es necesario, encontrar el número de Mach en la salida utilizando las ecuaciones 9.1 a 9.3, y continuar los cálculos a lo largo del sistema, o bien si, estimada la presión total en la entrada, P_{10} , el valor calculado (paso 8) de P_{20} no coincide con el valor conocido de P_{20} , entonces suponer un nuevo valor de P_{20} en el punto 3 y repetir los cálculos.
10. Suponer que el número de Mach es la unidad en el área de flujo calculada en el punto 6 y calcular el flujo másico utilizando la ecuación 9.3. Si este caudal calculado es menor que 0,9 del supuesto en el punto 3, entonces es improbable que el caudal supuesto en dicho punto pase a través del componente, independientemente de cuán baja sea la presión corriente abajo. El caudal máximo que cabe esperar con toda probabilidad se ha de estimar a partir de una valoración de los efectos de compresibilidad sobre los patrones de flujo dentro del componente.

9.6.2 Accesorios con entrada y salida de área de sección recta diferente

De entre los numerosos accesorios con la característica enunciada, cabe distinguir:

- Contracciones bruscas
- Expansiones bruscas
- Difusores

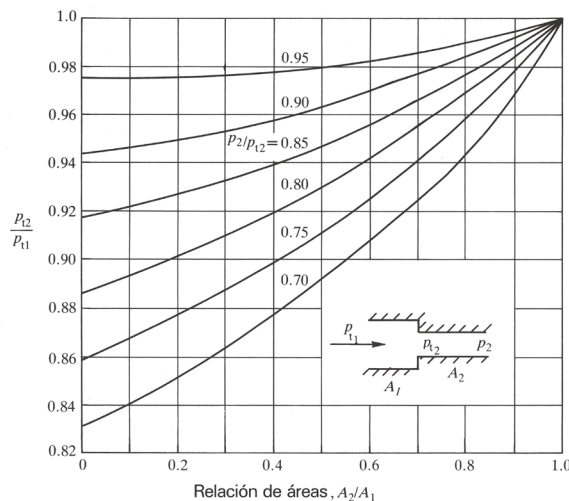


Fig. 9.14.
[M190]

El coeficiente de pérdida de contracciones bruscas se calcula mediante la ecuación 9.41, sustituyendo en ella los valores de las relaciones de presión que se encuentran en la figura 9.14 en función de la relación de áreas.



En los casos de expansión brusca, se ha de distinguir si el flujo a la entrada del accesorio es subsónico o, por el contrario, si es crítico ($M = 1$). Si es subsónico, el coeficiente de pérdida es el correspondiente a fluido incompresible, $k_s = (1 - A_1 / A_2)^2$, y la relación de presiones de remanso a través del accesorio viene definida por la ecuación:

$$P_{20} = P_{10} [1 - k_s (1 - P_1 / P_{10})] \quad (9.47)$$

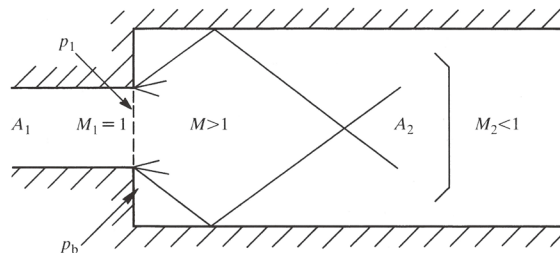
Si el régimen del flujo de entrada en el accesorio es crítico, se ha de distinguir si está bloqueado o no. En caso de flujo bloqueado, el número de Mach del flujo a la salida del accesorio M_2 ha de determinarse en una sección corriente abajo donde sean conocidas las condiciones de estado del gas comprobando que la presión base P_b es menor que la presión estática de entrada; si no lo es, entonces el flujo no está bloqueado.

La relación entre la presión base y la presión estática del gas en la entrada al accesorio está dada por la ecuación:

$$\frac{P_b}{P_1} = \frac{A_1 / A_2}{1 - A_1 / A_2} (1 + \gamma)^{1/2} \left[\frac{1 + \gamma M_2^2}{M_2 \{2 + (\gamma - 1) M_2^2\}^{1/2}} - (1 + \gamma)^{1/2} \right] \quad (9.48)$$

La figura 9.15 ilustra un caso de aplicación de la ecuación 9.48.

Fig. 9.15.
[Mi90]



9.6.3 Criterios que rigen el procedimiento simplificado de cálculo de una tubería con accesorios

Los criterios que sirven de pauta, según Miller, para aplicar el procedimiento simplificado de cálculo de sistemas compuestos por tuberías y accesorios para el transporte de gases con efectos de compresibilidad importantes en régimen adiabático son los siguientes:

1. Si se desconoce el caudal, suponer uno. Como quiera que habitualmente el número de Reynolds es alto, lo cual permite suponer que los valores de los coeficientes de pérdida dependerán poco de Re, es relativamente fácil hacer una previsión de caudal razonablemente precisa.
2. Si se han de encontrar el tamaño del tubo y de los componentes, suponer un tamaño de tubo.
3. Si es probable que la relación de presión a través de un sistema sea suficiente para causar bloqueo sónico, localizar dónde puede ocurrir. A tal fin, es útil el punto 5.



Conociendo dónde es probable que se produzca el bloqueo, o bien dónde se producirá definitivamente, los cálculos se minimizan.

4. Dividir el sistema en tramos que tengan un tamaño de tubo y de componente constante. Las condiciones del gas a través de cambios de área deben considerarse por separado.
5. Si cabe esperar que ocurra bloqueo sónico dentro de un componente que forma parte de un tramo del sistema de área constante, ya sea un tubo de Venturi o una válvula parcialmente abierta, subdividir el sistema ulterior en secciones corriente arriba y corriente abajo del dispositivo potencialmente bloqueado.
6. Determinar el número de Mach y las condiciones del gas en las secciones en que se disponga de datos detallados de la presión. Siempre que sea posible, los cálculos deben realizarse desde el extremo final del sistema hacia atrás, particularmente en los sistemas ramificados que implican soluciones iterativas a lo largo de varias ramas.
7. Para la sección del sistema donde se conocen las condiciones corriente arriba o bien las condiciones corriente abajo, hallar ΣK_i , donde:
 $\Sigma K_i \equiv$ suma de los coeficientes de todos los componentes, incluyendo tubos, para un fluido incompresible. Para un tubo, $K = \lambda (L / D)$.
8. Utilizar la información aportada en los puntos anteriores para calcular X_1 o X_2 , o bien ΣK_i , y calcular el número de Mach en la entrada y en la salida. Obsérvese que, para componentes con $K_i \geq 0,25$, se aplican los valores aportados en el subapartado C9.6.1.1 pero, para una primera estima, puede ser suficiente utilizar solo los del apartado de pequeña pérdida.
9. Calcular las condiciones a través de cualquier cambio de área de sección transversal utilizando los datos del apartado C9.6.2 y las ecuaciones $F_1 (M)$, $F_2 (M)$, $F_3 (M)$.
10. Con los resultados del paso (9), repetir los pasos 6 y siguientes, en la medida que sean apropiados.
11. Si el caudal y la pérdida de presión, o bien las presiones de entrada o de salida no coinciden con los valores estimados o requeridos, repetir los pasos 1 a 10 con nuevos valores de caudal, tamaño de tubo o presión.



Ejercicios

Ejercicio 1

En un tubo de 0,25 m de diámetro interior, entra vapor recalentado ($T_1 = 755,6$ K, $P_1 = 68,95 \cdot 10^5$ Pa) a una velocidad de 150 m/s. Determina el lugar geométrico de los posibles estados termodinámicos que satisfacen las ecuaciones de continuidad y de energía (línea de Fanno).

Resolución

A partir de las tablas, el volumen específico, la entalpía y la entropía por unidad de masa del vapor recalentado en el estado especificado son:

$$v_1 = 0,04747 \text{ m}^3\text{kg}^{-1}; h_1 = 3.368,5 \cdot 10^3 \text{ J/kg}; s_1 = 6.749,5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

El flujo másico específico del vapor recalentado que se introduce en el tubo es:

$$G = V_1/v_1 = 150/0,04747 = 3.159,89 \text{ kg/s} \cdot \text{m}^2$$

La entalpía de remanso es $h_0 = h_1 + V_1^2/2 = 3.368,5 \cdot 10^3 + 150^2/2 = 3.379,75 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

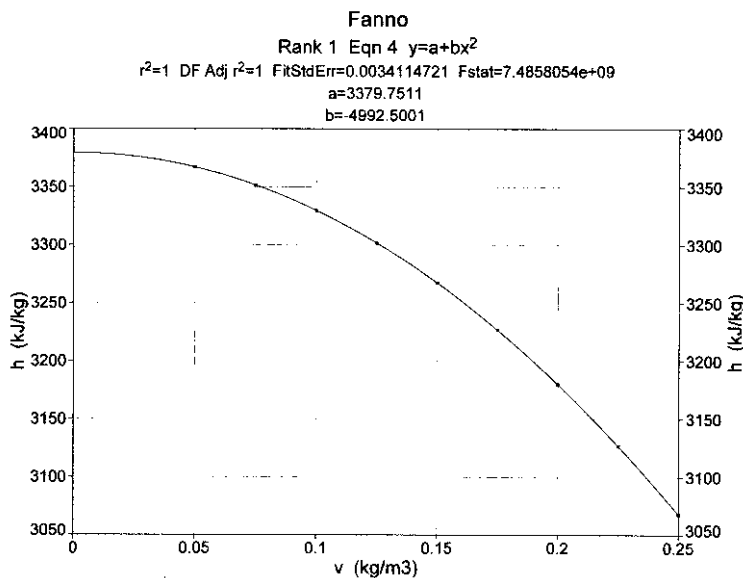
Entonces, la ecuación de la línea de Fanno se escribe:

$$h = 3.379,75 \cdot 10^3 - 3.159,89^2 \cdot v^2/2 \text{ J/kg}$$

Algunos puntos de la línea de Fanno para $G = 3.159,89 \text{ kg/s} \cdot \text{m}^2$ son:

v (m ³ /kg)	0,05	0,075	0,10	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250
h (kJ/kg)	3367,27	3351,67	3329,83	3301,74	3267,42	3226,85	3180,05	3127,01	3067,72

Fig. E1.1



(Ver [Vi15])



Ejercicio 2

Sea un conducto cuya relación longitud/diámetro es 60; el coeficiente de fricción en él es 0,01 y descarga aire en un recinto que se encuentra a la presión de 0,5 atm. Conocidas la presión de remanso del gas en la entrada dada, $P_{10} = 3$ atm; su relación con la presión estática, $P_{10}/P_1 = 36,74$, y el número de Mach, $M_1 = 3$, determina el número de Mach en la salida y la distancia a lo largo del tubo desde su origen, donde ocurre choque normal. La figura 1 del ejercicio muestra un esquema del tubo con su tobera en la entrada.

Resolución

Supóngase que el régimen de flujo en la salida del tubo es subsónico; entonces, $\frac{P_4}{P^*} = \frac{P_4}{P_{10}} \cdot \frac{P_{10}}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P^*}$. A partir de las tablas de flujo isoentrópico para $M_1 = 3$, se obtiene $P_1/P^* = 0,2182$. Sustituyendo valores, se obtiene $P_4/P^* = 1,336$.

A partir de este valor de la relación entre las presiones de salida y la crítica, las tablas de Fanno dan (interpolando valores) $M_4 = 0,775$ y $\lambda(L/D) = 0,1$.

Para determinar la distancia x_{ch} donde se produce choque, se plantean las ecuaciones siguientes:

$$\lambda \frac{x_{ch} - x_1}{D} = \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_1 - \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_2$$

$$\lambda \frac{x_4 - x_{ch}}{D} = \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_3 - \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_4$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$\lambda \frac{L}{D} = \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_1 - \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_2 + \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_3 - \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_4$$

Conocidos λ , L/D y los términos $\left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_1$ y $\left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_4$, estos últimos a partir de las tablas de Fanno, resulta:

$$\left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_3 = \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_2 + 0,1778$$

Ahora se necesita una segunda relación entre M_2 y M_3 , o sea, a través de la onda de choque:

$$M_3 = \frac{M_2^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_2^2 - 1}$$

Aplicando un método iterativo de aproximaciones sucesivas, se obtiene:

$$M_2 = 1,74 \text{ y } M_3 = 0,63$$



Por último, aplicando la primera de las dos ecuaciones planteadas antes, se determina la distancia en términos de diámetro del conducto donde ocurre el choque recto:

$$\frac{x}{D} = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_1 - \left(\lambda \frac{L_{max}}{D} \right)_2 \right] = 100(0,5225 - 0,2216) = 30,1$$

El choque recto se produce a la mitad de la longitud del conducto.

Fig. E2.1
[Em86]

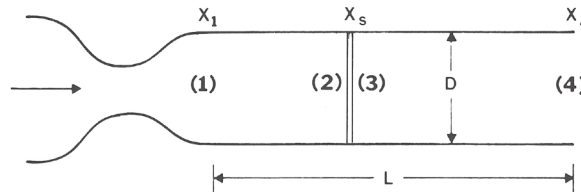
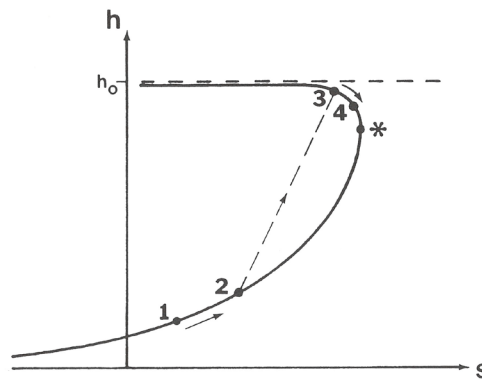


Fig. E2.2
[Em86]



(Ver [Em86])

Ejercicio 3

Un gasoducto de 0,35 m de diámetro interior y 100 km de longitud transporta gas natural. La presión y la impulsión es de 80 bar, y la caída de presión es de 65 bar. Determina el flujo másico del gas transportado.

Peso molecular del gas = 20; viscosidad absoluta = $10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$; temperatura = 15°C

Rugosidad de la tubería = 0,025 mm (tubo nuevo liso); $k = \lambda (L/D)$

Resolución

Los gasoductos son proyectados para un régimen de flujo subsónico, isoterma, con un número de Mach inferior a 0,2. El cálculo se lleva a cabo habitualmente mediante la ecuación:

$$\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 = K \left[\frac{\dot{m} (RT_1)^{1/2}}{AP_2} \right]^2 + 1 = \frac{1}{1 - k \left[\dot{m} (RT_1)^{1/2} / AP_1 \right]^2}$$



de donde:

$$\dot{m} = \frac{AP_2}{(RT_1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{k^{1/2}} \left[\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (1)$$

Suponiendo un régimen turbulento liso, $Re > 5 \cdot 10^6$, el coeficiente de fricción viene dado por la fórmula:

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{25 \cdot 10^{-6}}{3,7 \cdot 0,35} + \frac{5,74}{(5 \cdot 10^6)^{0,9}} \right) \right]^2} = 0,0117$$

Sustituyendo valores en la ecuación (1), se obtiene:

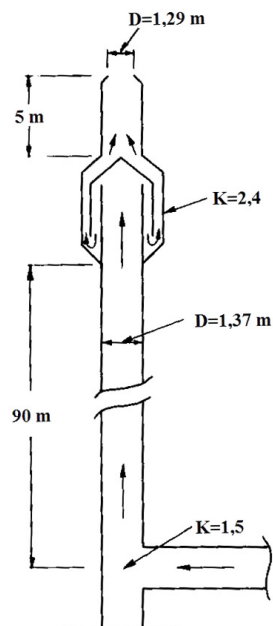
$$\dot{m} = \frac{0,35^2 \cdot 0,785 \cdot 15 \cdot 10^5}{\left(\frac{8314,4}{20} \cdot 288 \right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(0,0117 \cdot \frac{100 \cdot 10^3}{0,35} \right)^{1/2}} \left[\left(\frac{80}{15} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

Y resulta:

$$\dot{m} = 37,77 \text{ kg s}^{-1}$$

Ejercicio 4

La figura representa el esquema de una antorcha diseñada para evacuar 500 kg/s de gas hidrocarburo de peso molecular 49,5 ($R = 168 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ y $\gamma = 1,1$) a la temperatura total de 90°C .





Determina la presión necesaria a pie de la chimenea, suponiendo un coeficiente de fricción $\lambda = 0,012$.

Resolución

Para hallar la solución, se procede a aplicar la ecuación $F(M) = \frac{\dot{m}(RT)^{1/2}}{AP_0}$ a los tramos sucesivos de la antorcha a partir de la salida.

En la salida, las condiciones son $T = 273 + 90 = 363 \text{ K}$; $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $A = 1,29^2 \cdot 0,785 = 1,31 \text{ m}^2$; por consiguiente, $F(M)_s = \frac{500(168.363)^{1/2}}{1,31 \cdot 1,013 \cdot 10^5} = 0,93$.

El número de Mach correspondiente al valor de la función $F(M)_s = 0,93$ se calcula

$$\text{mediante la ecuación } F(M)_s = \frac{\gamma^{1/2} M_s}{\left[1 + (\gamma - 1) M_s^2 / 2\right]^{(\gamma + 1)/2(\gamma - 1)}}.$$

Sustituyendo valores e iterando, se obtiene $M_s = 0,87$.

Para este valor del número de Mach, la presión de estancamiento es:

$$P_{00} = \frac{P_0}{0,665} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{0,665} = 1,523 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

En el cierre del gas, se tiene: $F(M)_{cg} = \frac{\dot{m}(RT)^{1/2}}{A_{ch} P_{00}}$,

donde $A_{ch} = 1,37^2 \cdot 0,785 = 1,473 \text{ m}^2$.

Sustituyendo valores, se obtiene $F(M)_{cg} = 0,5412$.

Aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se tiene $M_{cg} = 0,64$.

Para este valor del número de Mach, la aplicación de la ecuación 9.43 del texto da $X_{cg} = 0,467$.

El valor total de la función X de la antorcha es:

$$X_a = \sum X_i + X_{cg} = 0,01295 / 1,37 + 2,4 + 1,5 + 0,465 = 5,12$$

Procediendo como antes para $X_a = 5,12$, se obtiene $M_a = 0,3$.

A partir de $M_a = 0,3$, la ecuación 9.39 del texto da $\frac{\dot{m}(RT)^{1/2}}{A_{ch} P_{p0}} = 0,31$, de donde se obtiene:

$$P_{p0} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(Ver [Mil90])



→ 10



Flujo estacionario unidimensional con transferencia de calor. Línea de Rayleigh. Flujo con adición de masa. Flujo de gases reactivos

10.1 Introducción

En muchos procesos industriales, se utilizan instalaciones y equipos en que ocurre flujo estacionario unidimensional de fluidos compresibles por conductos de sección recta constante, prácticamente sin fricción ni intercambio de trabajo, pero con un intercambio importante de calor, que se traduce en un cambio de la entalpía de remanso. Tales flujos se producen en las cámaras de combustión y son frecuentes en intercambiadores de calor, recalentadores y equipos similares. Los flujos en que $\delta q \neq 0$ se denominan *flujos diabáticos*.

Si bien todos los casos prácticos de flujo diabático están acompañados invariablemente de fricción, la consideración del flujo con transferencia de calor sin fricción es una buena aproximación, con la finalidad de evaluar el efecto de variación de la entalpía de remanso del fluido sobre su flujo.

En este capítulo, se analiza el *flujo diabático simple*, basado en las hipótesis siguientes:

- Flujo estacionario unidimensional
- Conducto recto de área de sección recta constante
- Efectos de las fuerzas másicas (gravitacionales) y de fricción despreciables
- Transferencia finita de calor

10.2 Ecuaciones básicas y línea de Rayleigh

Sea q el calor por unidad de masa que recibe el gas a lo largo del conducto hasta una sección determinada. Las ecuaciones básicas que ha de satisfacer el fluido en movimiento son las siguientes:

(i) Conservación de masa: $\rho V = G = \text{cte.}$ (10.1)

(ii) Conservación de impulso: $P + V^2 = B = \text{cte.}$ (10.2)



(iii) Energía:
$$h + \frac{V^2}{2} = h_{00} + q \quad (10.3)$$

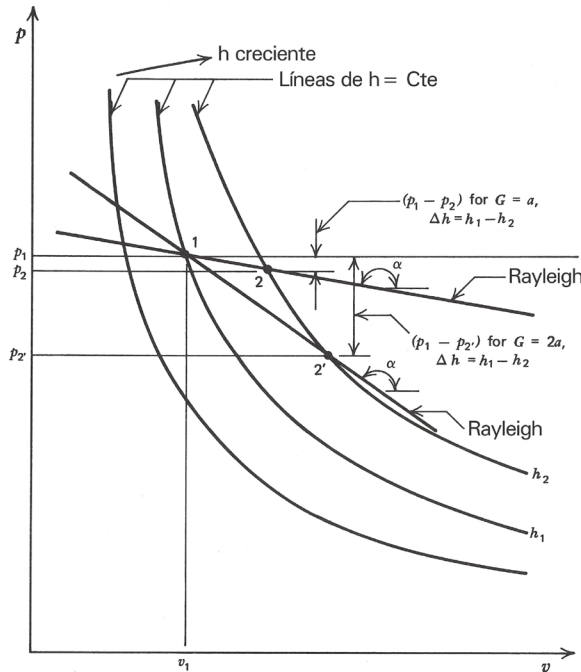
donde h_{00} es la entalpía de remanso correspondiente al fluido en estado de reposo.

A partir de la derivada de la ecuación 10.2, $dP + \rho V dV = 0$; sustituyendo en ella ρV por G e integrando, se obtiene:

$$P + GV = \text{cte.} \quad (10.4)$$

La ecuación 10.4 define una familia de curvas en el plano h, v cuyo parámetro es el valor de G . Son las *líneas de Rayleigh* (v. figura 10.1).

Fig. 10.1.
Línea de Rayleigh
en el plano $h-v$
[ZH76]



A lo largo de una línea de Rayleigh, se verifica:

$$\frac{dP}{dv} = -G^2 = -\left(\frac{V}{v}\right)^2 \quad (10.5)$$

donde v es el volumen específico del fluido.

Integrada entre dos estados 1, 2, se obtiene la ecuación $\frac{P_2 - P_1}{v_2 - v_1} = -G^2$, cuya representación es una recta de pendiente $-G^2$.

La velocidad del fluido que corresponde a cualquier estado a lo largo de la línea de

Rayleigh viene dada por $V = vG = v \left(\frac{P_2 - P_1}{v_1 - v_2} \right)^{1/2} = v(-tg\alpha)^{1/2}$.



Otra forma de representación de la línea de Rayleigh es en el plano h, s . La ecuación de la familia de curvas de Rayleigh en dicho plano se obtiene a partir de la ecuación de la entropía:

$$s - s_1 = c_v \ln \left[\frac{P}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma \right]$$

que, para el flujo en cuestión, se escribe:

$$s - s_1 = c_v \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma + c_v \ln \left(\frac{B - \frac{G^2}{\rho}}{\rho^\gamma} \right) \quad (10.6)$$

Como quiera que $B - \frac{G^2}{\rho} = \frac{\rho h R}{c_p}$, resulta:

$$s - s_1 = c_v \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\gamma + c_v \ln \left(\frac{h R}{c_p \rho^{(\gamma-1)}} \right) \quad (10.7)$$

La ecuación 10.7 representa también una familia de curvas en el plano h, s ; cada una de ellas corresponde a un valor particular de h_0 y de G (v. figura 10.2).

10.2.1 Condiciones de máxima entalpía y de máxima entropía

Cuando el estado del fluido es de máxima entalpía, cualquier adición ulterior de calor provoca un incremento de la energía cinética del fluido en una tasa igual a la de adición de calor, de manera que la entalpía del fluido se mantiene constante. Si la velocidad del fluido aumenta más rápidamente que la adición de calor (por ejemplo, disminuyendo la contrapresión), la energía requerida para tal aumento de velocidad ha de provenir de la energía que tiene el fluido; el resultado es una disminución de su entalpía y un incremento de la entropía.

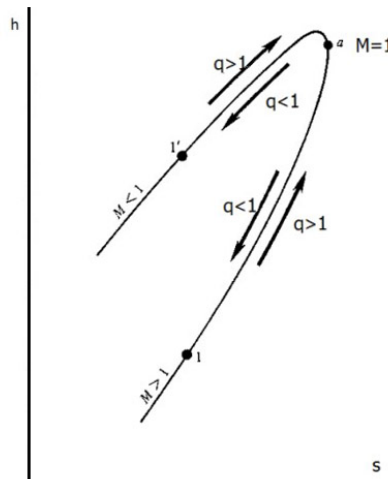


Fig. 10.2.
Línea de Rayleigh en
el plano h, s



La figura 10.2, que representa una línea de Rayleigh en el plano h, s , ilustra el fenómeno comentado.

Como ya se ha visto, la pendiente de una línea de Rayleigh es $\tan \alpha$, que es igual a $-G^2$. En el estado de máxima entropía, dicha pendiente ha de coincidir con la de la línea de entropía, que es $\tan \beta = \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = -\frac{a^2}{v^2}$, o sea, $\frac{a^2}{v^2} = \frac{V^2}{v^2}$, pues se ha de cumplir $\tan \beta = \tan \alpha$. Resulta que la entropía es máxima cuando la velocidad del fluido

es igual a la velocidad del sonido local $V = a^*$. Cuando se alcanza esta condición, se produce el denominado *bloqueo térmico*.

10.2.2 Relaciones entre las propiedades de estado del fluido y las propiedades del flujo a lo largo de la línea de Rayleigh para un gas perfecto

Los valores de estas relaciones se encuentran en las tablas que se presentan en el anexo I. No obstante, se considera conveniente exponer aquí las fórmulas correspondientes para calcularlos:

$$\text{Relación de presiones estáticas} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (10.8)$$

$$\text{Relación de presiones de remanso} \quad \frac{P_{20}}{P_{10}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (10.9)$$

$$\text{Relación de temperaturas estáticas} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \quad (10.10)$$

$$\text{Relación de temperaturas de remanso} \quad \frac{T_{20}}{T_{10}} = \left(\frac{M_2^2 [1 + \gamma M_1^2]^2}{M_1^2 [1 + \gamma M_2^2]^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right) \quad (10.11)$$

$$\text{Cambio de entropía} \quad \frac{\Delta s}{R} = \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \right] \quad (10.12)$$

$$\text{Cambio de entropía debido a la transferencia de calor} \quad \frac{\Delta s}{c_p} = \ln \left[\frac{T_{20} / T_{10}}{(P_{20} / P_{10})^{(\gamma-1)/\gamma}} \right] \quad (10.13)$$



10.3 Descarga de un depósito por un tubo de fricción despreciable y adición de calor

El sistema de ecuaciones 10.1, 10.2 y 10.3 nos permite calcular las variables de estado y la velocidad en función de q y las condiciones de entrada del tubo, distinguidas por el subíndice 0. Sea M el número de Mach de la corriente a una distancia l de la entrada al tubo. A partir de la ecuación 10.2, se deduce $(P/P_0) = (1 + \gamma M_0^2 / 1 + \gamma M^2)$.

Y, de la ecuación 10.3:

$$c_p \cdot T + \frac{1}{2} M^2 \gamma \cdot RT = c_p T_{00} \left\{ 1 + \frac{q}{h_{00}} \right\}$$

Sustituyendo el valor de c_p , resulta:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} RT \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right\} = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{00} \left\{ 1 + \frac{q}{h_{00}} \right\}$$

Teniendo en cuenta que $T_{00} = T_0 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right\}$, su sustitución en la ecuación anterior da:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{q}{h_{00}} \right\}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (10.14)$$

A su vez, como quiera que $\frac{T}{T_0} = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}$ y $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{P}{P_0} \left\{ \frac{M}{M_0} \right\}^2$, sustituyendo estas relaciones y la de P/P_0 en la ecuación 10.4, se obtiene:

$$\left\{ \frac{1 + \gamma M_0^2}{1 + \gamma M^2} \right\}^2 \cdot \left\{ \frac{M}{M_0} \right\}^2 = \frac{\left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{q}{h_{00}} \right\}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (10.15)$$

Por otra parte, definida una función de M como:

$$F(M) = M \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \quad (10.16)$$

Se obtiene:

$$\frac{F^2(M)}{F^2(M_0)} = 1 + \frac{q}{h_{00}} \quad (10.17)$$

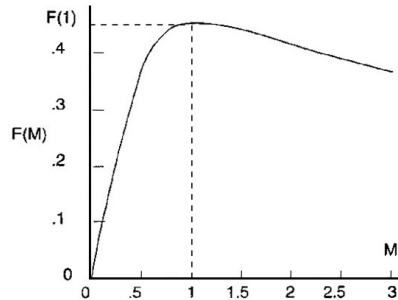
La relación $F(M)$ con respecto a M está representada en la figura 10.3 y se observa que presenta un máximo en $M = 1$.

A la vista de la ecuación 10.17, se puede extraer la conclusión siguiente: dado un estado inicial del fluido caracterizado por $M_0 < 1$, toda adición de calor determina un aumento de M , que tiende a la unidad. Así pues, dado un estado determinado del fluido en



movimiento, la cantidad máxima de calor que se le puede añadir es la que corresponde para alcanzar $M = 1$.

Fig. 10.3.
[Sh53]



A partir de la relación $\frac{P}{P_0} = \frac{1 + \gamma M_0^2}{1 + \gamma M^2}$, y teniendo en cuenta que en $x = L$ (longitud del

tubo) $P = P_a$, $M = M(L)$ y $P_{00} = P_0 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$, donde P_a es la presión en la descarga y P_{00} es la presión de remanso del gas en la entrada al tubo, se obtiene la relación P_a / P_{00} , o su inversa, dada por la expresión:

$$\frac{P_{00}}{P_a} = \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left\{ \frac{1 + \gamma M_{(L)}^2}{1 + \gamma M_0^2} \right\} \quad (10.18)$$

Esta ecuación, junto con la ecuación 10.7, particularizada para el extremo de salida del tubo, forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite calcular los números de Mach a la entrada y a la salida del tubo como función de los datos P_{00} y T_{00} ,

etc., o sea, de $\frac{P_{00}}{P_a}$, $\frac{q}{h_{00}}$, γ , etc.

La cantidad máxima de calor que puede añadirse al fluido desde un estado caracterizado por la temperatura T y el número de Mach M se calcula a partir de la segunda relación de Damköhler, haciendo $M_L = 1$. En efecto, sean T_{x0} la temperatura de remanso del fluido a la distancia x de la entrada del tubo y T_{L0} la temperatura de remanso del fluido a la salida del tubo, habiéndose añadido al fluido una cantidad de calor q entre x y L . Se ha de verificar:

$$q = c_p (T_{L0} - T_{x0}) = c_p T_{x0} \left\{ \frac{T_{L0}}{T_{x0}} - 1 \right\}$$

$$\frac{q}{c_p T_x} = \frac{T_{x0}}{T_x} \left\{ \frac{T_{L0}}{T_{x0}} - 1 \right\} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{(1 + \gamma M^2)^2 \cdot M_L^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2 \right\}}{(1 + \gamma M_L^2)^2 \cdot M^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right\}} \right\}$$



Como quiera que el máximo valor de $\left(\frac{q}{c_p T_x}\right)$ se alcanza cuando $M(L)=1$, resulta:

$$\frac{q_{\max}}{c_p T_x} = \frac{(M^2 - 1)^2}{2(\gamma + 1)M^2} \quad (10.19)$$

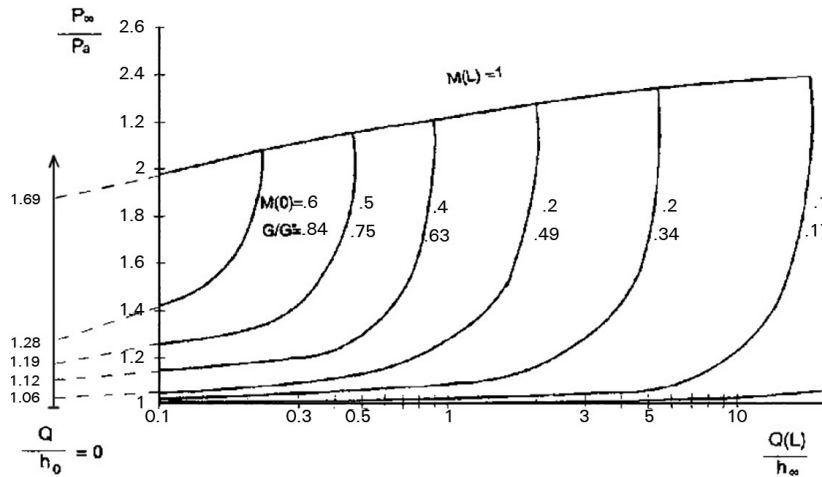


Fig. 10.4.
Descarga de un gas
por un conducto a lo
largo del cual se ha
añadido calor

En la figura 10.4, se representa en el plano (P_0/P_a) , (q_L/h_{00}) las curvas correspondientes a varios números de Mach a la entrada de un tubo de longitud L hasta alcanzar el valor límite $M = 1$ como resultado de la adición de calor.

Por otra parte, a partir de la ecuación 10.19, se demuestra que se cumple la ecuación:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{q}{c_p T} \left\{ \frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2} \right\} \quad (10.20)$$

A la vista de las ecuaciones anteriores, cabe concluir:

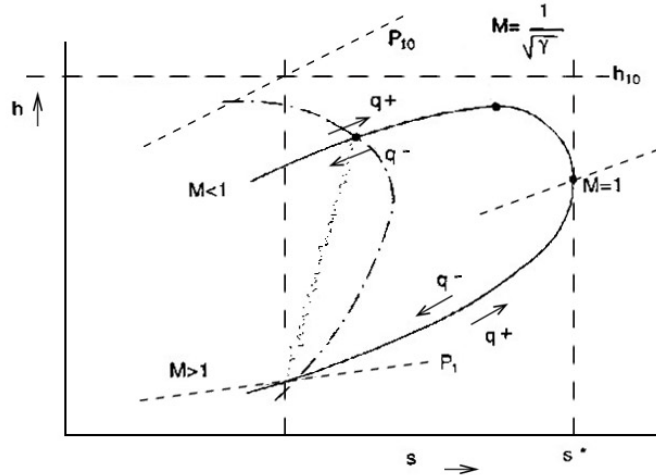
	$q > 0$,	Calefacción	$q < 0$,	Refrigeración
Magnitud	$M < 1$	$M > 1$	$M < 1$	$M > 1$
T_0	aumenta	aumenta	disminuye	disminuye
M	aumenta	disminuye	disminuye	aumenta
T	(1)	aumenta	(2)	disminuye
P	disminuye	aumenta	aumenta	disminuye
P_0	disminuye	disminuye	aumenta	
V	aumenta	disminuye	disminuye	aumenta

(1) Aumenta para $M < 1/\sqrt{\gamma}$ y disminuye para $M > 1/\sqrt{\gamma}$

(2) Disminuye para $M < 1/\sqrt{\gamma}$ y aumenta para $M > 1/\sqrt{\gamma}$

La representación de la línea de Rayleigh en el plano h, s (v. figura 10.5) permite situar el punto $M = 1/\sqrt{\gamma}$ e identificar qué es lo que sucede, desde el punto de vista de la transferencia de calor, en las dos ramas $M < 1/\sqrt{\gamma}$ y $M > 1/\sqrt{\gamma}$.

Fig. 10.5.
Líneas de Fanno y de
Rayleigh en el plano h, s



La figura 10.5 muestra la existencia de dos puntos de intersección de la línea de Rayleigh con la línea de Fanno. Puesto que a todos los estados sobre la línea de Fanno les corresponde la misma entalpía de remanso y, a todos los puntos sobre la línea de Rayleigh, el mismo valor del empuje específico de la corriente $(P + GV)$, el cambio espontáneo del estado 1 al estado 2 se puede producir por una onda de choque. Como ya se ha explicado en otro capítulo, el proceso de onda de choque es una compresión brusca que incrementa la presión y la entropía del fluido, pero disminuye su velocidad de supersónica a subsónica.

10.4 Flujo por un tubo de sección recta constante, alimentado desde un depósito, con fricción y adición de calor

El depósito se supone muy grande, de forma que el proceso se pueda considerar casi permanente.

Sean P_0 y T_0 la presión y la temperatura del gas en el depósito, donde la velocidad del gas es prácticamente nula. Admitiendo que la transición del depósito al tubo se lleva a cabo por una contracción suave y gradual que no produce pérdidas, el estado termodinámico de remanso del fluido a la entrada del tubo es el mismo que en el depósito. La presión a la salida del tubo ha de ser igual a la presión ambiente mientras el movimiento sea subsónico en el tubo, o sea:

$$P_L = P_a \text{ si } M < 1 \quad (10.21)$$

Ahora bien, si la presión en el depósito, P_0 , es suficientemente grande y la presión en el exterior, P_a , es suficientemente pequeña, la corriente a lo largo del tubo puede acelerarse



hasta alcanzar $M = 1$ en el extremo. Entonces, la condición 10.21 deja de cumplirse y ha de ser sustituida por:

$$M_L = 1 \text{ para } P_0 / P_a > \text{valor límite, } P_L > P_a; \quad M_L < 1 \text{ para } P_0 / P_a < \text{valor límite, } P_L = P_a$$

donde:

$$\left(\frac{P_0}{P_a} \right)_{\lim} = \frac{1}{0,53} \quad (10.22)$$

Cuando hay simultáneamente fricción y adición de calor, se necesita una relación de presiones mayor que la relación límite para alcanzar el bloqueo sónico. Se ha de notar que tanto la fricción como la adición de calor introducen una caída de presión a lo largo del tubo, como puede observarse en la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = - \left\{ 1 + \frac{\gamma \cdot M^2}{(1 - M^2)} \right\} \cdot \frac{\lambda \cdot V^2}{2D} - (\gamma - 1) \frac{M^2}{1 - M^2} \cdot q \quad (10.23)$$

Cuanto mayor es el efecto de fricción y de adición de calor, tanto mayor es el valor del cociente P_0 / P_a necesario para alcanzar el bloqueo sónico, o para alcanzar un determinado flujo másico de gas. Para un valor dado de P_0, P_a puede descender por debajo del valor límite para el cual el número de Mach en el extremo del tubo es la unidad (bloqueo sónico), pero, a partir de este valor límite, toda disminución de P_a no afecta el movimiento del fluido en el tubo, cuya presión en el extremo alcanzará el valor límite. Desde dicho extremo, el fluido se expansiona hasta el valor P_a por mecanismos de ondas de expansión.

(Ver ref. 2)

10.5 Descarga de gas de un depósito por un conducto térmicamente aislado de sección recta constante con fricción

El flujo de gas por el conducto ha de satisfacer las ecuaciones siguientes:

(i) Ecuación de conservación de la masa: $\frac{\dot{M}}{A} = G = \rho \cdot V$ (10.24)

(ii) Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$dP + \rho V dV + \rho \frac{V^2}{2} \left(\frac{\lambda}{D} \right) dx = 0 \quad (10.25)$$

(iii) Ecuación de conservación de la energía: $dh + V dV = 0$ (10.26)

Dividiendo la ecuación 10.25 por P, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} + \rho \frac{V dV}{P} + \frac{\lambda}{2D} \rho \frac{V^2}{P} dx = 0 \quad (10.27)$$



La ecuación 10.27 se puede transformar para ser integrada entre extremos del tubo aplicando las relaciones siguientes:

$$V^2 = M^2 \gamma \frac{P}{\rho} \quad ; \quad \rho \frac{V^2}{P} = \gamma M^2$$

$$V^2 = M^2 \gamma R \frac{T_0}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}} \rightarrow 2VdV = \gamma R T_0 \frac{2MdM \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\} - (\gamma-1)MdM \cdot M^2}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}^2}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}} \rightarrow \rho \frac{V}{P} dV = \gamma \frac{MdM}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}}$$

$$P = \rho RT = \frac{GRT_0}{V} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}} = \frac{GRT_0}{\{\gamma \cdot RT_0\}^{1/2}} \cdot \frac{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}^{1/2}}{M \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}} \quad (10.28)$$

$$\frac{dP}{P} = - \frac{1 + (\gamma-1)M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M} \quad (10.29)$$

Sustituyendo los valores de $\frac{dP}{P}$, $\rho \frac{VdV}{P}$ y $\rho \frac{V^2}{P}$ en la ecuación 10.27, se obtiene:

$$\frac{\lambda}{2D} dx = \frac{1 - M^2}{\gamma M^3 \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right\}} dM \quad (10.30)$$

Integrando la ecuación 10.30 entre los límites $x=0; M=M_0; x=L; M=M_L$, resulta:

$$\frac{\bar{\lambda}}{2D} L = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M_L^2} \right\} - \frac{\gamma+1}{4\gamma} \ln \left[\frac{M_L^2 \cdot \{2 + (\gamma-1)M_0^2\}}{M_0^2 \cdot \{2 + (\gamma-1)M_L^2\}} \right] \quad (10.31)$$

donde: $\bar{\lambda} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \lambda \cdot dx$

La condición $L = L_{\max}$ impone $M = 1$; entonces:

$$\frac{\bar{\lambda}}{2D} L_{\max} = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \frac{1}{M_0^2} - 1 \right\} - \frac{\gamma+1}{4\gamma} \ln \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_0^2}{(\gamma+1)M_0^2} \right] \quad (10.32)$$



A partir de la condición $M = 1$ $P = P^*$, se obtienen las relaciones del valor de las propiedades termodinámicas del gas y las de su flujo en una sección arbitraria del flujo con respecto a los valores críticos. Son las siguientes:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{(\gamma + 1)}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right\}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10.33)$$

$$\frac{P_0}{P^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right\}}{(\gamma + 1)} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} ; \quad T_0 = T_0^* = cte = T_\infty \quad (10.34)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right\}} ; \quad \frac{\rho^*}{\rho} = M \frac{(\gamma + 1)^{\frac{1}{2}}}{\left[2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (10.35)$$

$$\frac{S - S^*}{c_p} = \ln M^2 \left[\frac{(\gamma + 1)}{2 M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}} \quad (10.36)$$

A partir de la ecuación 10.30, aplicada en $x = 0$, donde $P = P_0$ y $M = M_0$, y en $x = L$, donde $P = P_a$ y $M = M_L$, dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{P_0}{P_a} = \frac{\left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} / M_0 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}}{\left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2 \right\}^{\frac{1}{2}} / M_L \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2 \right\}}$$

Y, como quiera que $P_0 = \frac{P_{00}}{\left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$, donde P_{00} es la presión del gas en el

depósito, resulta:

$$\left(\frac{P_{00}}{P_a} \right)^2 = \frac{M_L^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2 \right\} \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right\}^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}{M_0^2} \quad (10.37)$$



Las ecuaciones 10.31 y 10.37 constituyen un sistema para las dos incógnitas M_0 y M_L . Una vez calculado M_0 , se pueden obtener todas las propiedades del fluido a la entrada del tubo, en particular el flujo másico:

$$\dot{m} = \rho_0 \cdot V_0 \cdot A = \frac{\rho_0}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}} \cdot \frac{M_0 \cdot a_{00}}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot A$$

$$\dot{m} = \rho_{00} \cdot a_{00} \cdot A \cdot \frac{M_0}{\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$
(10.38)

Para:

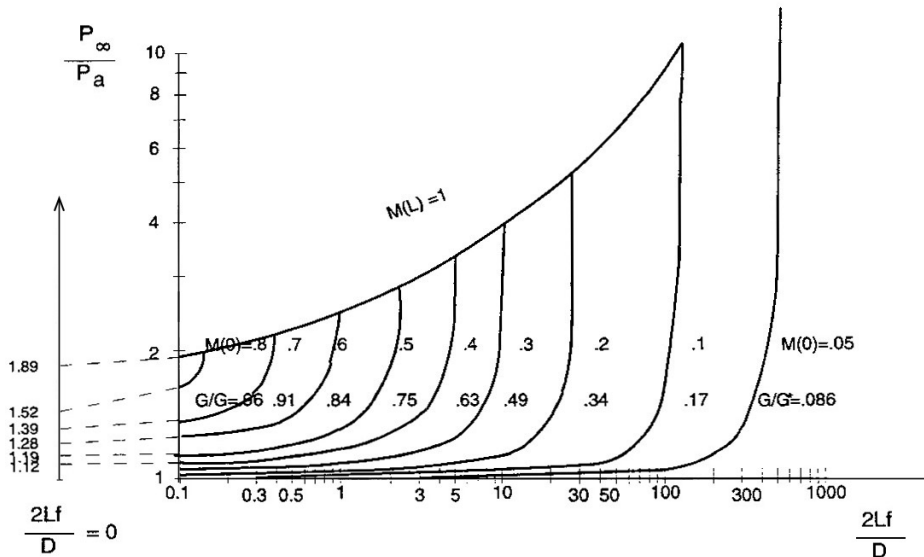
$$M_0 = 1 \rightarrow \dot{m} = \dot{m}^* = \rho_{00} \cdot a_{00} \cdot A \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$
(10.39)

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \frac{M_0}{\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right\}\right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}$$
(10.40)

Finalmente:

En la figura 10.6, se ha representado gráficamente la función $(P_{00}/P_a) = g(\lambda L/2D)$ para un gas de $\gamma = 1.4$. El procedimiento que permite encontrar una solución aproximada al problema es el siguiente.

Fig. 10.6.
Descarga de gas de un
depósito a través de un
conducto con fricción





Supóngase que el problema parte de los datos P_{00}/P_a y $\lambda L/2D$. Si el punto determinado en el diagrama por estos datos se sitúa por debajo de la línea $M_L = 1$, la curva a que pertenece da los valores de M_0 y del flujo másico específico G . Esta misma curva permite determinar la distribución de presión en el tubo simplemente buscando el valor de la ordenada correspondiente a los valores de la abscisa $\lambda x/2D$, donde x representa los diferentes puntos del tubo en que se desea conocer el valor de P . Si el punto definido por los datos del problema se sitúa por encima de $M_L = 1$, la condición a la salida del tubo es $M_L = 1$ y la presión allí queda determinada por la ordenada que en la curva límite corresponde al valor de la abscisa dato.

(Ver [Sh53])

10.6 Flujo estacionario unidimensional con adición de masa

Hasta aquí, todos los flujos por conductos considerados tenían como rasgo común que el flujo másico en cada sección transversal del conducto era constante. En este apartado, se estudian los efectos que se derivan de la adición de masa a una corriente principal, o sea, cuando los cambios en las propiedades de flujo tienen como única causa la tasa de adición de masa $d\dot{m}$.

La figura 10.7 ilustra un modo, entre otros muchos, de adición de masa a una corriente principal. El rasgo diferenciador del proceso de adición de masa es, en general, que sus propiedades V_i, P_i, ρ_i, h_i son distintas de las de la corriente principal, V, P, h , cuyo flujo másico es \dot{m} .

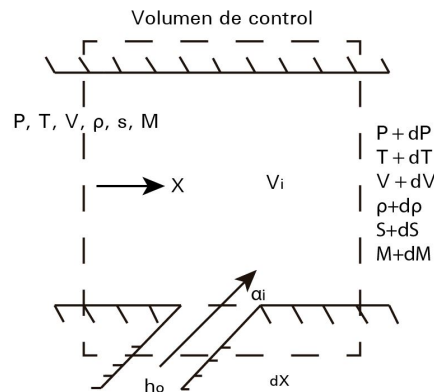


Fig. 10.7.

Se parte del supuesto de que las dos corrientes se mezclan completamente y que la corriente que resulta de la mezcla, cuyo flujo másico es $\dot{m} + d\dot{m}$, deja el volumen de control con propiedades uniformes $P + dP$, $\rho + d\rho$, etc.

A fin de simplificar el problema, se supone que el fluido de ambas corrientes es perfecto y que sus constantes de gas, calor específico y entalpía de remanso son idénticas.



10.6.1 Ecuaciones básicas

Para estudiar el problema de simple adición de masa, se parte de las hipótesis siguientes:

- Flujo estacionario unidimensional en un conducto de área de sección transversal constante
- Flujo de un gas calóricamente perfecto, adiabático, sin fricción
- Idéntica composición de los gases inyectados y de la corriente principal con la misma entalpía de remanso
- Relación de velocidades, $\beta = V_{ix} / V$, constante

Las ecuaciones por las cuales se rige el fenómeno son las siguientes:

$$\text{Ecuación de continuidad} \quad \dot{m} = \rho AV \rightarrow \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} \quad (10.41)$$

$$\text{Ecuación de la energía} \quad h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (10.42)$$

$$\text{que para un gas perfecto se escribe:} \quad c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} = C^{te}$$

$$\text{o bien:} \quad \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (10.43)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$PA - (P + dP)A = (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) - \dot{m}V - d\dot{m}V_{ix} \quad (10.44)$$

donde V_{ix} es la componente de la corriente añadida en la dirección de la corriente principal.

Introduciendo el parámetro β , definido como $\beta = V_{ix}/V$, se llega a la ecuación siguiente:

$$dP + \rho V dV + \rho V^2 (1 - \beta) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (10.45)$$

Dividiendo por P y teniendo en cuenta que $P/\rho = a^2/\gamma$, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} + \gamma M^2 \frac{dV}{V} + \gamma M^2 (1 - \beta) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (10.46)$$

10.6.2 Ecuaciones de las variaciones relativas de los valores de las propiedades de estado del gas y de su flujo

Se sabe que, a partir de la ecuación de estado y de la definición de número de Mach, se llega por simples transformaciones a las ecuaciones siguientes:



$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}; \quad \frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}; \quad \frac{ds}{c_p} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{dP_0}{P_0}$$

donde el subíndice 0 indica las condiciones de remanso.

A su vez, aplicando la derivada logarítmica a la expresión de la presión de remanso, se obtiene:

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M} \quad (10.47)$$

A partir de las ecuaciones 10.41 a 10.47, se deducen por simples transformaciones las ecuaciones que definen las variaciones relativas de las propiedades del gas y de su flujo como consecuencia de la variación relativa del flujo másico del gas debida a la inyección de masa. Son las siguientes:

$$\frac{dM}{M} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \left[\left(1 + \gamma M^2\right) - \beta \gamma M^2 \right] \cdot \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.48)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \left[2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) (1 - \beta) + \beta \right] \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.49)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{1 - M^2} \left[(\gamma + 1) M^2 - \beta \gamma M^2 \right] \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.50)$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1) M^2}{1 - M^2} \left[\left(1 + \gamma M^2\right) - \beta \gamma M^2 \right] \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.51)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 - M^2} \left[\left(1 + \gamma M^2\right) - \beta \gamma M^2 \right] \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.52)$$

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\gamma M^2 (1 - \beta) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.53)$$

$$\frac{dF}{F} = \beta \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.54)$$

$$\frac{ds}{c_p} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{dP_0}{P_0} = (\gamma-1) M^2 (1 - \beta) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (10.55)$$

A la vista de las ecuaciones, se constata que la influencia de la adición de masa en la variación del valor de las propiedades termodinámicas del gas y de su estado de movimiento depende del parámetro β y del número de Mach de la corriente, subsónico o supersónico. En caso de inyección normal, $\beta = 0$, muchos de los rasgos de comportamiento del proceso de adición de masa son similares a los de los procesos de Rayleigh y de Fanno, pero el comportamiento que resulta de la adición de masa resulta más complejo cuando la componente de la velocidad en la dirección de la corriente del gas inyectado es mayor que la velocidad de la corriente principal, o sea, cuando $\beta > 1$.



Puesto que el flujo másico no es constante, la representación del proceso de adición de masa en sus diferentes aspectos no se puede llevar a cabo por líneas equivalentes a las de Fanno y de Rayleigh; sin embargo, el proceso se puede representar mediante un diagrama de Mollier como lugar geométrico de los estados de entalpía-entropía por los cuales pasa el gas.

Para la mayoría de los casos que tienen interés en ingeniería, el valor de β es tal que los términos en que aparece en las ecuaciones anteriores son siempre positivos. Por consiguiente, la influencia de la adición de masa en la variación de las magnitudes de estado del fluido depende únicamente de si el flujo es subsónico o supersónico.

En caso de $\beta = 0$, las ecuaciones que gobiernan el proceso de estado del gas después de la adición de masa a la corriente principal se obtienen de las anteriores sustituyendo en ellas $\beta = 0$. De ello, resulta un conjunto de ecuaciones diferenciales exactas, que pueden integrarse a partir de un estado de referencia. Por ejemplo, si, como estado de referencia, adoptamos el crítico, el flujo másico que corresponde a un flujo cuyo número de Mach es M resulta:

$$\int_{\dot{m}}^{\dot{m}^*} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \int_M^1 \frac{1-M^2}{M(1+\gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \frac{G}{G^*} = \frac{M \left[2(\gamma+1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{1/2}}{1+\gamma M^2} \quad (10.56)$$

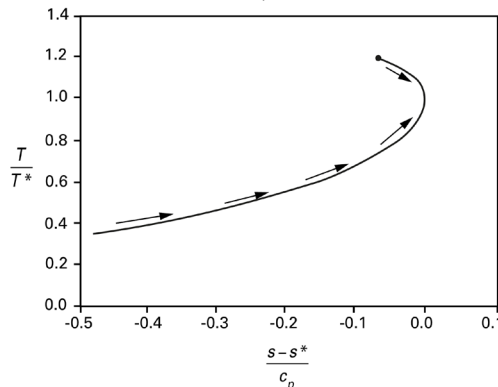
A su vez, la variación de la entropía, de la temperatura estática y de la presión estática del gas, referidas al estado crítico, son las siguientes:

$$\frac{s-s^*}{c_p} = \frac{\Delta s}{c_p} \ln \left[\left(\frac{T}{T^*} \right)^\gamma \left(\frac{P}{P^*} \right)^{1-\gamma} \right] \quad (10.57)$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma+1)/2}{1+(\gamma-1)M^2/2} \quad (10.58)$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad (10.59)$$

Fig. 10.8.
Evolución de T/T^*
en función de $\Delta s/c_p$
en un proceso de
adición de masa
simple con $\beta = 0^3$





La figura 10.9 muestra una representación adimensional sobre un diagrama de Mollier de $h/h^* = T/T^*$ en función de $\Delta s/c_p$ para un gas calóricamente perfecto de $\gamma=1,4$ y $\beta=0$.

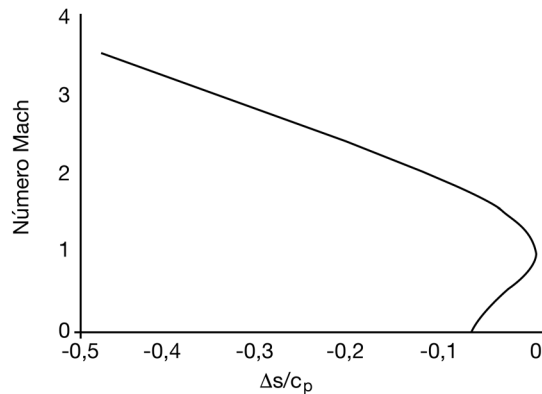


Fig. 10.9.
 M vs $\Delta s/c_p$ en el proceso representado en la figura 8³

La figura 10.10 ilustra cómo varía M en función de la variación adimensional de entropía para el mismo gas y las mismas condiciones de inyección.

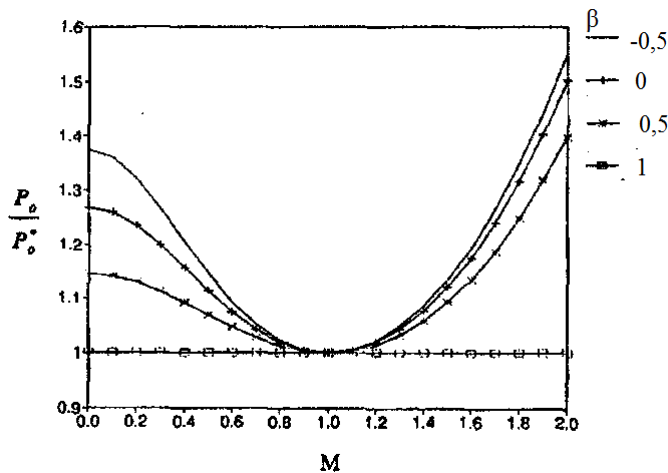


Fig. 10.10.
Relaciones de flujo másico para $\beta < 1^3$

A la vista de ambas figuras, se llega a la conclusión de que, tanto si el flujo es subsónico como si es supersónico, la adición de masa con $\beta = 0$ modifica el régimen acercándolo progresivamente al estado crítico en que el flujo másico es crítico, \dot{m}^* , o sea, máximo.

Por otra parte, se observa que ninguna de las ecuaciones que traducen las relaciones causa-efecto del fenómeno de adición de masa incorpora la longitud del conducto ni la fricción, que depende de la longitud. De hecho, se acepta que, para un proceso dado, la adición de masa y el estado inicial determinan el estado final.

El proceso de adición de masa simple con $\beta = 0$ se caracteriza también por dos rasgos adicionales interesantes, ambos relacionados con las ondas de choque normales. Ya que, para un valor dado de la relación de flujos másicos \dot{m}/\dot{m}^* , existen ambos regímenes de flujo (subsónico y supersónico), se cumple:



$$M_1 \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}}{1 + \gamma M_1^2} = M_2 \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2}$$

Pero esta es la ecuación que expresa la relación entre los números de Mach corriente arriba y corriente abajo en un proceso de flujo con onda de choque normal; por ello, sobre el camino del proceso de la adición de masa simple, con $\beta = 0$, las localizaciones de los números de Mach subsónico y supersónico con la misma relación de flujos másicos \dot{m} / \dot{m}^* definen un proceso de choque normal. Así, un camino de proceso de adición de masa simple que contenga una onda de choque normal puede representarse sobre un camino de proceso de adición de masa simple en un diagrama de Mollier.

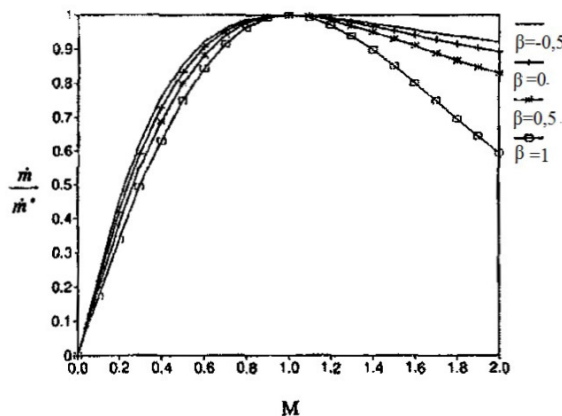
Hodge y Lamar¹ demuestran que las relaciones de flujo másico para una misma tasa de inyección \dot{m} en un conducto con una onda de choque recto, y en el mismo conducto sin ella, son las mismas, lo cual significa que dicha relación en el conducto con onda de

choque no depende de dónde se produce; por consiguiente, la localización de la onda de choque en un conducto con adición de masa simple no se puede utilizar para obtener una condición de flujo específica en la salida, típicamente de presión.

Caso de adición de masa con $\beta \neq 0$

La adición de masa en condiciones de $\beta = 0$, que corresponde a un tipo de inyección sin aporte de cantidad de movimiento en la dirección de la corriente principal, es un caso especial del problema general de adición de masa. En general, es frecuente encontrarse con problemas de adición de masa que comportan también inyección de cantidad de movimiento a la corriente principal, o sea, con $\beta \neq 0$.

Fig. 10.11.
Relaciones de
presión de remanso
para $\beta \leq 1$



Los coeficientes de influencia que aparecen en las ecuaciones 10.48 a 10.55 evidencian la existencia de dos límites críticos, uno para el parámetro β y otro para el número de Mach. El primero viene determinado por la condición:

$$1 + (1 - \beta_{cr})\gamma = 0, \text{ que da } \beta_{cr} = (\gamma + 1) / \gamma \quad (10.60)$$

El segundo, por:



$$1 + \gamma(1 - \beta)M^2 = 0, \text{ que da } M = \sqrt{1/(\gamma(\beta - 1))} \quad (10.61)$$

Bajo cualquiera de estos límites, toda adición de masa no afecta el estado del fluido o de su movimiento. Entre cada uno de estos valores limitantes, el proceso de adición de masa simple presenta unas características diferentes. A continuación, se resumen estas características para varios valores de β .

Para $\beta < 1$, la adición de masa aumenta la entropía, el flujo másico máximo ocurre en el punto sónico $M = 1$ y, cuanto más pequeño es el valor de β , tanto mayor es el cambio de presión de remanso (v. figuras 10.10 y 10.11).

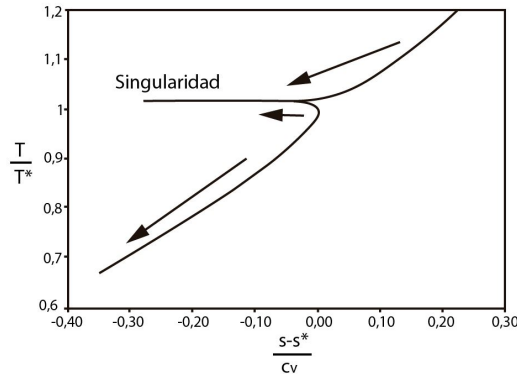


Fig. 10.12.
Diagrama de Mollier
para $\beta < \beta_{cr}$

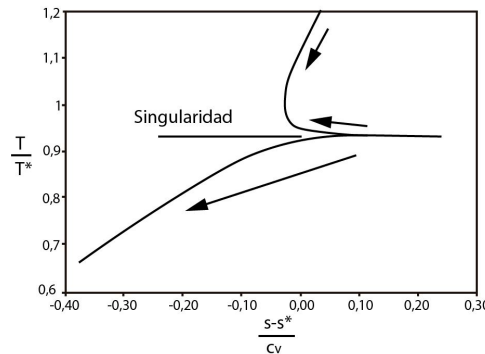


Fig. 10.13.
Diagrama de Mollier
para $\beta > \beta_{cr}$

- La condición $\beta = 1$ corresponde a un proceso isoentrópico de adición de masa, mientras que los valores de $\beta > 1$ dan como resultado una disminución de la entropía. El valor de β_{cr} separa dos regiones distintas de adición de masa en que existen singularidades para el valor crítico de M .
- La figura 10.12 es un diagrama de Mollier, T/T^* vs. $(s - s^*)/c_p$, de un proceso en que $\beta < \beta_{cr}$, y la figura 10.13 muestra el mismo diagrama, pero con la condición $\beta > \beta_{cr}$. En ambos, las flechas indican la dirección de recorrido del camino del proceso para un incremento del flujo másico. Para $\beta < \beta_{cr}$, la singularidad ocurre cuando el número de Mach en régimen supersónico alcanza el valor crítico.

- Para valores del número de Mach superiores al crítico, la adición de masa va asociada a una disminución de entropía.
- La adición de masa al flujo cuyo número de Mach se encuentra en el intervalo $1 < M < \sqrt{1/\gamma(\beta-1)}$ causa disminución del número de Mach, que tiende al punto sónico.
- Para $\beta > \beta_{cr}$ la singularidad ocurre también cuando el número de Mach del flujo alcanza el valor crítico, pero la adición de masa al flujo en régimen subsónico produce un incremento del número de Mach y una disminución de entropía.
- En el caso de flujo supersónico, la adición de masa está asociada a una disminución de la entropía. La adición de masa al flujo cuyo número de Mach se encuentra en el rango subsónico $\sqrt{1/\gamma(\beta-1)} < M < 1$ causa una disminución del número de Mach, que se aleja del punto sónico.

(Ver [ZH76])

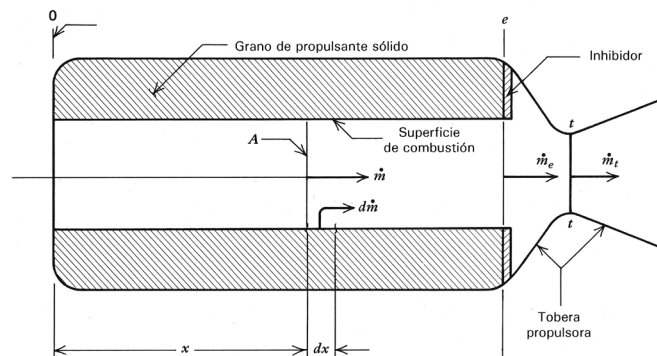
10.7 Aplicación del proceso de flujo con adición de masa: propulsión de cohetes por combustibles sólidos

La figura 10.14 es el esquema de un motor de cohete equipado con una cámara de combustión interna de un grano propulsor sólido (los agentes propulsores sólidos se utilizan en formas denominadas *granos*). Hay dos tipos básicos de propulsores sólidos:

1. Homogéneos o de base doble, en que el combustible y el oxidante están contenidos dentro de la misma molécula, que se descompone durante la combustión. Ejemplos típicos son la nitroglicerina y la nitrocelulosa.
2. Agentes propulsores compuestos, mezclas heterogéneas de cristales oxidantes en un aglomerante combustible, como el plástico orgánico, típicamente el caucho sintético.

En ocasiones, se añade al propulsor polvos metálicos (por ejemplo, de aluminio), a fin de incrementar la energía del proceso de combustión, así como la densidad del combustible, como es el caso del propulsor de refuerzo de la “lanzadera espacial”, que utiliza aluminio como combustible primario.

Fig. 10.14.
Esquema de un motor
de cohete que utiliza
un agente propulsor
sólido que quema
internamente [ZH76]





En la figura 10.14, A es el área de la sección transversal de la perforación o núcleo hueco del grano, entendiendo por *grano* toda partícula elemental de agente propulsor, independientemente de su tamaño y forma.

Esta área va aumentando a medida que progresa la combustión del grano, que se realiza en dirección normal al mismo (v. figura 10.15).

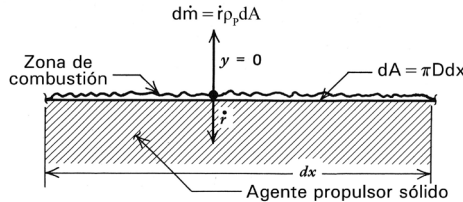


Fig. 10.15.
[ZH76]

Las propiedades de estado del gas de combustión y las de su movimiento en el núcleo hueco del grano son las siguientes:

- Superficie O: $\dot{m}_0 = 0$, $V_0 = M_0 = 0$, ρ_0 , P_0 , $T_0 = T_{llama}$
- Sección e: $\dot{m}_e, V_e, M_e, \rho_e, P_{0e}, T_{0e}$

Sea un tramo elemental dx de grano en combustión. La velocidad a la cual se generan los gases de combustión, generalmente muy pequeña (entre 0,001 y 0,5 m/s), se expresa en términos de la velocidad de regresión de la superficie del grano, tal como se muestra en la figura 10.15.

El flujo másico total de gas de combustión es: $\dot{m}_g = \rho_p A_c \dot{r}$

donde ρ_p es la densidad del agente propulsor sólido, A_c es el área de la superficie en la que se produce la combustión y \dot{r} es la velocidad de regresión de dicha superficie.

La física de la transición de fase y de combustión que subyace en la velocidad de regresión de la superficie es extremadamente compleja. En general, \dot{r} depende de la temperatura inicial del agente propulsante, de la presión en la cámara y, en menor medida, de la velocidad de los gases de combustión en el conducto configurado por el núcleo hueco del grano cuyo diámetro va aumentando a medida que la combustión progresa. En general, la velocidad de regresión de la superficie viene dada por la expresión:

$$\dot{r} = \frac{K}{T_i - T_p} (P_{02})^n \quad (10.62)$$

donde P_{02} es la presión de remanso en la cámara de combustión, K es una constante empírica particular para cada agente propulsor, T_i es una temperatura de detonación empírica, T_p es la temperatura del agente propulsante y n es un exponente empírico, aproximadamente independiente de la temperatura. En general, $0,4 < n < 0,7$ y $T_i \gg T_p$.

10.7.1 Flujo de gases y presión de remanso en la cámara de combustión

Sean m_g la masa de gas en la cámara de combustión en un momento dado, ρ_g la densidad del gas y V el volumen de la cámara. La ecuación de conservación de la masa se escribe:



$$\frac{dm_g}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_g V) = \rho_g \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho_g}{dt} \quad (10.63)$$

El cambio de volumen de la cámara a medida que el agente propulsor sólido se convierte en gas es $\frac{dV}{dt} = \dot{r}A_c$, y la variación de la densidad del gas en la cámara de combustión viene determinada por la ley del gas ideal $P_{02} = \rho_g RT_{02}$, admitiendo que una buena aproximación de la temperatura de remanso en la cámara tiende a ser independiente de la presión de remanso; por consiguiente:

$$\frac{d\rho_g}{dt} = \frac{1}{RT_{02}} \frac{dP_{02}}{dt} \quad (10.64)$$

Por otra parte, el flujo másico descargado por la tobera es

$$\dot{m}_t = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{\gamma P_{02} A^*}{\sqrt{\gamma RT_{02}}} \quad (10.65)$$

A su vez, el flujo másico generado en la superficie del agente propulsor se divide entre el flujo másico en la tobera y la acumulación temporal de masa en el volumen de la cámara de combustión:

$$\dot{m}_g = \dot{m}_t + \frac{dm_g}{dt} \quad (10.66)$$

Sustituyendo los diferentes términos de la ecuación 10.66 por sus correspondientes expresiones 10.65 y 10.63, se obtiene:

$$\rho_p A_c \dot{r} = \rho_g \dot{r} A_c + V \frac{d\rho_g}{dt} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{\gamma P_{02} A^*}{\sqrt{\gamma RT_{02}}} \quad (10.67)$$

Despejando \dot{r} y sustituyéndolo por su expresión 10.62, la ecuación 10.67, una vez ordenados convenientemente los términos, se escribe:

$$\frac{V}{RT_{02}} \frac{dP_{02}}{dt} + \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{\gamma P_{02} A^*}{\sqrt{\gamma RT_{02}}} - \frac{K(\rho_p - \rho_g) A_c}{T_l - T_p} (P_{02})^n = 0 \quad (10.68)$$

Después de un transitorio de arranque durante el cual P_{02} cambia rápidamente en el transcurso del tiempo, la presión alcanza un valor cuasiestacionario, por lo cual la derivada temporal en la ecuación 10.68 puede ser considerada pequeña, comparada con los otros términos. Así, despreciando el término temporal, se obtiene la siguiente aproximación del valor de la presión de remanso del gas en la cámara:

$$P_{02} = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{K(\rho_p - \rho_g)}{\gamma(T_l - T_p)} \left(\frac{A_c}{A^*} \right) \sqrt{\gamma RT_{02}} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (10.69)$$



Esta expresión de la presión de remanso del gas en la cámara de combustión puede utilizarse siempre que A_c varíe lentamente a lo largo del tiempo. Obsérvese que la presión en la cámara tiende a aumentar a medida que incrementa el área de la superficie en que se produce la combustión y, además, depende de la cinética de reacción química del agente propulsor, que determina el valor de T_{02} .

Un análisis dinámico del problema conduce a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal para la presión en la cámara, de la forma:

$$\frac{dP_{02}}{dt} + \left(\frac{1}{\tau}\right)P_{02} - \beta(P_{02})^n = 0 \quad (10.70)$$

En la ecuación 10.70, el tiempo característico es:
$$\tau = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}}{(\gamma RT_{02})^{1/2}} \left(\frac{V}{A^*}\right) \quad (10.71)$$

Y la constante en el término no lineal es:
$$\beta = \left(\frac{K(\rho_p - \rho_g)A_c}{T_l - T_p} \left(\frac{RT_{02}}{V} \right) \right) \quad (10.72)$$

Mediante varias transformaciones, la ecuación diferencial 10.32 se simplifica en la forma:

$$\frac{dP_{02}}{dt} + \left(\frac{1-n}{\tau}\right)P_{02} = 0 \quad (10.73)$$

La solución de la ecuación 10.73 es:

$$\frac{P_{02}}{P_{02}|_0} = e^{\left(\frac{n-1}{\tau}\right)t} \quad (10.74)$$

Si $n < 1$, una pequeña desviación de presión será restaurada al valor de equilibrio; pero, si $n > 1$, el flujo de gas generado supera el flujo másico de escape por la tobera y la presión en la cámara aumentará exponencialmente, hasta llegar a producir la explosión del cohete.

10.8 Dinámica de flujos reactivos

El análisis del flujo de mezclas de gases reactivos se realiza generalmente considerando los gases medios continuos, pues el tiempo t_λ entre las colisiones sucesivas de una molécula y el recorrido medio λ entre las colisiones son, en la práctica, pequeños frente al tiempo t_m y la longitud característica L del movimiento macroscópico.

Para caracterizar el estado de equilibrio termodinámico local de una mezcla de gases reactiva, se necesita conocer:



- La densidad ρ de la mezcla
- La energía interna específica u , y
- Las fracciones másicas $Y_i = \rho_i / \rho$ de $n-1$ de las n especies moleculares que componen la mezcla

Se ha de tener presente que tanto la velocidad local del gas (o velocidad media de todas las especies) \vec{V} como ρ , u , Y_i son funciones continuas de posición x y tiempo t , pues en el flujo no hay equilibrio térmico global.

Resumiendo, el flujo de la mezcla de gases reactiva es un problema de flujo compresible no estacionario en que ocurren fenómenos de difusión de masa, con velocidades de difusión $\vec{V}_{di} = \vec{V}_i - \vec{V}$, de flujo de calor \vec{q} , de disipación viscosa τ'_{ij} y de producción de masa de la especie i por unidad de volumen y tiempo W_i . La resolución del problema requiere que se satisfagan las ecuaciones de conservación de la masa de cada especie i , de conservación de la energía, de estado y cinética química, teniendo en cuenta las leyes constitutivas de transporte y las condiciones iniciales y de contorno.

10.8.1 Ecuaciones de conservación

- (i) Principio de conservación de la masa de cada especie i :

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} = -\nabla(\rho Y_i \vec{V}) - \nabla(\rho Y_i \vec{V}_{di}) + W_i \quad (10.75)$$

- (ii) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{V}) \quad (10.76)$$

pues, para las n ecuaciones de conservación de especies de la mezcla, se cumple:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n Y_i \vec{V}_{di} = 0, \quad \sum_{i=1}^n W_i = 0$$

- (iii) Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{V} \vec{V}) + \nabla P + \nabla \bar{\tau} + \rho \vec{f}_m \quad (10.77)$$

- (iv) Ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right\} = \nabla \left\{ -\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \vec{V} - P \vec{V} + \bar{\tau}' \vec{V} - \vec{q} \right\} + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{V} \quad (10.78)$$

- (v) Leyes constitutivas del transporte:

Ley de Newton-Poisson

$$\tau'_{ij} = \mu (\nabla_i V_j + \nabla_j V_i) + (\mu_v - 2\mu/3) \nabla_k V_k \delta_{ij} \quad (10.79)$$



Ley de Fick

$$\bar{J}_i = \rho Y_i \bar{V}_{di} = -\rho D_i \nabla Y_i \quad (10.80)$$

Ley de Fourier generalizada

$$\bar{q} = -k \nabla T + \sum_{i=1}^n \bar{J}_i h_i \quad (10.81)$$

(vi) Ecuaciones de estado y cinética química:

Ecuación térmica de estado

$$P = \rho T R / M \quad (10.82)$$

donde $(1/M) = \sum_{i=1}^n Y_i / M_i$.

Ecuación energética de estado

$$u + (P / \rho) = h = \sum_{i=1}^n Y_i h_i \quad (10.83)$$

(vii) Velocidades de reacción química:

$$W_i = W_i(P, T, Y_i) \quad (10.84)$$

Las ecuaciones 10.46, proporcionadas por la cinética química, dan las masas de las especies i producidas por unidad de volumen y tiempo por la reacción química. Las reacciones químicas son consecuencia de colisiones inelásticas que eliminan moléculas reactivas y dan lugar a otras especies reactivas y productos. Por ejemplo, si se consumen $\dot{v}_{\alpha,j}$ moléculas de la especie α para dar lugar a $\ddot{v}_{\beta,j}$ moléculas de la especie β en una reacción elemental de las r posibles entre n especies, la velocidad de producción másica de la especie β puede escribirse en la forma:

$$W_\beta = M_\beta \sum_{j=1}^r (\ddot{v}_{\beta,j} - \dot{v}_{\beta,j}) \omega_j \quad (10.85)$$

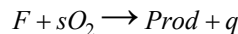
donde $\ddot{v}_{\beta,j}$, $\dot{v}_{\beta,j}$ son coeficientes de estequiometría molar y ω_j es la velocidad de reacción molar j .

Para las reacciones elementales, la velocidad de reacción se define por la expresión:

$$\omega_j = k_{f,j} \prod_{\beta=1}^n (\rho Y_\beta / M_\beta)^{\dot{v}_{\beta,j}} - k_{h,j} \prod_{\beta=1}^n (\rho Y_\beta / M_\beta)^{\ddot{v}_{\beta,j}} \quad (10.86)$$

En la expresión 10.86, $k_{f,j}$ y $k_{h,j}$, constantes de las reacciones directa e inversa, son funciones solo de la temperatura y pueden escribirse como producto de un factor preexponencial constante y un factor de Arrhenius $\exp(-E/RT)$, determinado por la energía E de activación de la reacción.

A título de ejemplo, sea una reacción global de tipo Arrhenius de la forma:





que representa la combinación reactiva de una masa s de oxígeno consumida por una masa unidad de combustible para producir una masa $(1+s)$ de productos de combustión y generar una energía térmica q . Si Y_F e Y_O son las fracciones másicas de combustible y de oxígeno, la ley global de Arrhenius aporta una aproximación a los valores de las masas producidas por la reacción química:

$$W_O / s = W_F = -\rho B Y_F^n Y_O^m \exp(-E / RT) \quad (10.87)$$

donde B es el factor de frecuencia de la reacción, $n > 0$ y $m > 0$ son los órdenes de reacción global y E es la energía de activación.

(viii) Condiciones iniciales y de contorno

Las ecuaciones 10.37-10.46 constituyen un sistema de ecuaciones de tipo parabólico que permite describir, para $t > 0$, la evolución del estado del fluido representado por las $n+1$ variables termodinámicas independientes P, T, Y_i y la velocidad $\vec{V}(\vec{x}, t)$, si especificamos en $t=0$ el estado inicial del fluido y se conocen las condiciones de contorno.

Como se ha podido advertir, este tipo de problemas son de gran complejidad. No obstante, en algunos casos cabe admitir ciertas simplificaciones que permiten llegar a una ecuación de la energía útil para su aplicación en ingeniería.⁷ El caso más notorio es aquel que utiliza una reacción global del tipo Arrhenius y la cinética definida por la ecuación 10.87. Suponiendo constante la masa molecular y un calor específico c_p solo dependiente de T , el movimiento del fluido reactante queda descrito especificando los valores de \vec{V}, P, T y de las fracciones másicas Y_F e Y_O , pues, al ser el número de Mach pequeño, la energía cinética es despreciable frente a la térmica, los esfuerzos viscosos y el trabajo de las fuerzas másicas son despreciables y las variaciones espaciales de presión son muy pequeñas. En estas condiciones, la ecuación de la energía que resulta de la combinación de las ecuaciones 10.40, 10.42, 10.43 y 10.45 se escribe:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\vec{V} \cdot \nabla) T = \frac{dP}{dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) - q W_F \quad (10.88)$$

En la ecuación 10.88, q es el calor de reacción por unidad de masa dado por la ecuación:

$$q = h_F + s h_O - (1+s) h_p$$

Los subíndices F, O, p , que distinguen los tipos de entalpía, indican combustible, oxígeno y productos de combustión; en particular, h_p es la entalpía específica de formación de los productos de combustión.



Ejercicios

Ejercicio 1

Por un tubo recto de fricción despreciable, fluye nitrógeno procedente de un depósito de grandes dimensiones por intermedio de una tobera convergente. El estado del gas en la conexión de la tobera al depósito es $P_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_1 = 500 \text{ K}$

A la salida de la tobera convergente, o sea, al principio del tubo, el número de Mach es $M_2 = 0,5$ y, en la descarga libre, el flujo está bloqueado, $M_3 = 1$.

Determina P_3, q y \dot{m} / A .

Resolución:

A la salida de la tobera convergente, el estado del gas viene definido por una expansión isentrópica desde el depósito; por tanto:

$$\frac{P_{00}}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}; \quad \frac{T_{00}}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2$$

Sustituyendo valores $\gamma = 1,4$, $M_2 = 0,5$, se obtiene $\frac{P_{00}}{P_2} = 1,186$; $\frac{T_{00}}{T_2} = 1,05$.

A su vez, el estado del gas en la misma sección, pero referido al estado crítico en flujo de Rayleigh, viene definido por las ecuaciones:

$$\frac{P_2}{P^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M_2^2}; \quad \frac{P_{20}}{P_0^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M_2^2} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)};$$

$$\frac{T_{20}}{T_0^*} = \frac{2(\gamma+1) M_2^2}{(1+\gamma M_2^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\frac{P_2}{P^*} = 1,778; \quad \frac{P_{20}}{P_0^*} = 1,114; \quad \frac{T_{20}}{T_0^*} = 0,6914$$

Dado que, en el extremo del tubo, $P_3 = P^*$, $\frac{P_3}{P_1} = \frac{P^*}{P_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{\gamma+1}$ y, por otra parte:

$$P_1 = \frac{P_{00}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}, \quad \text{con } M_1 < M_2 \rightarrow P_1 \cong P_{00}$$

cabe admitir, sin gran error, que

$$P_3 = \frac{P_3}{P^*} \cdot \frac{P^*}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_{00}} \cdot \frac{P_{00}}{P_1} \cdot P_1 = \frac{1}{1,788} \cdot 0,843 \cdot 6 \cdot 10^5 = 2,845 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



El cálculo de q se lleva a cabo aplicando la ecuación $\frac{q}{RT_0^*} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{M_2^2 - 1}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2$.

Sustituyendo valores, $M_2 = 0,5$; $R = 83.144,4 / 28 = 296,94$; $T_0^* = 723 \text{ K}$, resulta:

$$q = 2,32 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Para determinar el valor de \dot{m} / A , se utiliza la ecuación $\frac{\dot{m}}{A} = PM \left(\frac{\gamma}{RT} \right)^{1/2}$ aplicada en el inicio del tubo, donde $T_2 = T_{00} / 1,05 = 476,2 \text{ K}$. Por consiguiente:

$$\frac{\dot{m}}{A} = P_2 M_2 \left(\frac{\gamma}{RT_2} \right)^{1/2} = 0,843 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 0,5, \left(\frac{1,4}{296,94 \cdot 476,2} \right)^{1/2} \rightarrow \frac{\dot{m}}{A} = 795,76 \text{ kg} / \text{m}^2 \cdot \text{s}$$

(Ver [Em90])

Ejercicio 2

Por un conducto de 0,1 m de diámetro, fluye aire en régimen adiabático. Determina la longitud de conducto requerida para elevar el número de Mach de 0,5 a 0,9 si el valor medio del coeficiente de fricción es 0,02.

Resolución:

La longitud de conducto se determina calculando la longitud máxima para alcanzar el bloqueo del tubo en las dos condiciones del número de Mach inicial y restándolas.

Las longitudes máximas se calculan mediante la ecuación:

$$\lambda \frac{L_{max}}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{\frac{\gamma + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right]$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\text{para } M = 0,5 \rightarrow L_{max}(0,5) = \frac{0,1}{0,02} \left[\frac{1 - 0,25}{1,4 \cdot 0,25} + \frac{2,4}{2,8} \ln \left(\frac{\frac{2,4}{2} \cdot 0,25}{1 + \frac{0,4}{2} \cdot 0,5^2} \right) \right] = 5,345 \text{ m}$$

Aplicando la misma ecuación para $M = 0,9 \rightarrow L_{max}(0,9) = 0,0145 \text{ m}$

Por consiguiente, $L(0,5 \rightarrow 0,9) = 5,345 - 0,0145 = 5,33 \text{ m}$

(Ver [Vi93])



Ejercicio 3

El motor de cohete cuyo esquema se muestra en el texto opera con un combustible sólido de densidad $\rho = 2.500 \text{ kg/m}^3$, constituido como un cartucho de 0,3 m de longitud y 0,025 m de diámetro del orificio. La garganta de la tobera de eyección de gases de combustión tiene un área de $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Sabiendo que la combustión se produce a una velocidad de $\dot{r} = 0,025 \text{ m/s}$ y que los gases de combustión ($\gamma = 1,2, R = 320 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$) tienen la temperatura de llama $T = 3.000 \text{ K}$, calcula:

1. La tasa de consumo de combustible, m_c ;
2. El número de Mach de la corriente de gases eyectados, M_e , y la presión de remanso P_{e0} ;
3. La presión de remanso en el extremo del cartucho, P_0 ;
4. La densidad de los gases en dicho extremo, ρ_0 ;
5. El flujo específico máximo, G^* , y
6. La caída de presión estática entre extremos del cartucho.

Resolución:

1. La velocidad con que se consume el combustible viene dada por

$$m_c = G_c A_c = \dot{r} \rho \pi D L$$

Sustituyendo valores, resulta $m_c = 0,025 \cdot 2.500 \cdot 3,14 \cdot 0,025 \cdot 0,30 = 1,473 \text{ kg/s}$

2. El número de Mach y la presión de remanso, P_{e0} , se determinan a partir de la relación de áreas A_c / A^* y la tabla de magnitudes del flujo con adición de masa en dirección normal a la corriente, de la cual se incluye la parte que interesa al problema.

Suponiendo flujo isentrópico, la relación de áreas se define en función el número de Mach por la ecuación:

$$\frac{A_c}{A^*} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{1}{A_g} = \frac{1}{M_e} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}, \text{ donde } \frac{A_c}{A^*} = 1,6363$$

En las tablas de flujo isentrópico para la relación de áreas 1,6363, se obtiene $M_e = 0,3938$.

El cálculo de P_{e0} se realiza aplicando la ecuación:

$$P_{e0} = \frac{m_c \sqrt{\gamma R T}}{\Gamma A_g}, \text{ con } \Gamma = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} = 0,7104$$



Sustituyendo valores, se obtiene: $P_{e0} = \frac{0,3938\sqrt{1,2320 \cdot 3.000}}{0,7104 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 74,16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

3. La presión de remanso en el extremo del cartucho se obtiene de la tabla de magnitudes de flujo con adición de masa para $\gamma = 1,2$, de la cual se muestra una parte.

A partir de la tabla para $M_e = 0,3938$, se obtiene $P_{e0} / P^* = 1,1483$, después de interpolación, y para $M_0 = 0 \rightarrow P_0 / P^* = 1,2418$. Resulta:

$$P^* = P_{e0} / P^* = 74,16 \cdot 10^5 / 1,1483 = 64,58 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Por tanto: $P_0 = 1,2418 \cdot 64,58 \cdot 10^5 = 80,198 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

4. La densidad es: $\rho_0 = P_0 / RT_0 = 80,198 \cdot 10^5 / 320 \cdot 3.000 = 8,354 \text{ kg/m}^3$
5. El flujo másico específico máximo se obtiene también a partir de la tabla.

.24	.25099	.10937+1	.20578+1	.18815+1	.12023+1	.47224+0
.26	.27177	.10926+1	.20349+1	.18624+1	.11960+1	.50616+0
.28	.29252	.10914+1	.20108+1	.18424+1	.11895+1	.53893+0
.30	.31324	.10902+1	.19856+1	.18213+1	.11827+1	.57050+0
.32	.33391	.10889+1	.19592+1	.17994+1	.11757+1	.60084+0
.34	.35455	.10874+1	.19320+1	.17767+1	.11684+1	.62992+0
.36	.37515	.10859+1	.19039+1	.17533+1	.11610+1	.65773+0
.38	.39570	.10843+1	.18751+1	.17292+1	.11535+1	.68426+0
.40	.41621	.10827+1	.18456+1	.17047+1	.11459+1	.70951+0
<i>M</i>	<i>M*</i>	$\frac{t}{t^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{G}{G^*}$
.00	.00000	.11000+1	.22000+1	.20000+1	.12418+1	.0
.02	.02098	.11000+1	.21989+1	.19991+1	.12415+1	.41933-1
.04	.04195	.10998+1	.21958+1	.19965+1	.12407+1	.83751-1

Para $M_e = 0,3938 \rightarrow G_e / G^* = 0,7017$; por consiguiente,

$$G^* = G_e / 0,7017 = \frac{m_e}{A_e} / 0,7017, \text{ o sea, } G^* = \frac{4,1,473}{0,7017} = 4,275,3 \text{ kg/s} \cdot \text{m}^2$$

6. La caída de presión estática se calcula determinando previamente la presión estática P_e de los gases en el extremo del cartucho antes de la tobera a partir de las tablas de flujo isoentrópico.

Así, para $M_e = 0,3938$, se obtiene:

$$P_e / P_{e0} = 0,9118 \rightarrow P_e = 0,9118 \cdot 74,16 \cdot 10^5 = 67,618 \text{ Pa}$$

La caída de presión estática es:

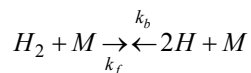
$$\Delta P = P_e - P_0 = (67,618 - 80,198) \cdot 10^5 = -12,58 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(Ver [ZH76])



Ejercicio 4

Calcula las constantes de velocidad de reacción directa e inversa hacia k_f y k_b , respectivamente, para la disociación de H_2 especificada por la reacción:



cuyas ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{X_H^2}{X_{H_2}} = k_{P,2H} \cdot P^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{X_H}{X_{H_2}^{1/2}} = k_{P,H} P^{-1/2}$$

de donde resulta:

$$k_{P,2H} = k_{P,H}^2$$

Resolución:

La ecuación de Arrhenius se escribe $k = BT^\alpha \exp(-E/RT)$, donde las constantes para la reacción inversa son $B = 7,50 \cdot 10^{18}$, $\alpha = -1$ y $E/R = 0$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Arrhenius, resulta $k_b = 7,50 \cdot 10^{18} \cdot T^{-1} \text{ cm}^6 / \text{mol}^2 \cdot \text{s}$.

Por otra parte, se sabe que las velocidades de reacción directa e inversa no son independientes, sino que están acopladas a través de la constante de equilibrio $k_{P,j}$, de la forma:

$$\frac{k_{f,j}}{k_{b,j}} = k_{P,j} (\hat{R}T)^{-\Delta v_j}, \quad (j = 1, \dots, m)$$

A partir de esta ecuación, se obtiene: $k_f = k_b k_{P,2H} (\hat{R}T)^{-\Delta v} = \frac{k_b k_{P,2H}}{\hat{R}T}$.

$$\text{A } T = 5.000 \text{ K} \rightarrow k_b = 7,50 \cdot 10^{18} \cdot (5.000)^{-1} = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^6 / \text{mol}^2 \cdot \text{s}$$

Por otra parte, para la reacción considerada, la tabla de valores de las constantes de velocidad de reacción da $k_{P,H} = 6,40$; por consiguiente, $k_{P,2H} = k_{P,H}^2 = 40,96 \text{ atm}$

$$\text{Finalmente, } k_f = 1,5 \cdot 10^{15} \cdot 40,96 \cdot 1013 \cdot 10^5 / 8,413 \cdot 5.000 \cdot 100^3 = 1,497 \cdot 10^{11} \text{ cm}^3 / \text{mol} \cdot \text{s}$$

(Ver [ZH76])



Chorros turbulentos circulares, planos y de pared

11.1 Introducción

En este capítulo, se exponen los conocimientos básicos de la mecánica de chorros turbulentos, con y sin efectos de remolino, los cuales, aunque han sido fenómenos muy estudiados en los últimos cincuenta años, han recibido particular atención en las últimas décadas por su capacidad de arrastre del fluido que les rodea, por su eficaz mecanismo de mezcla y por la intensidad del intercambio de energía y calor con los medios líquidos o sólidos con que impacta.

Los conocimientos que se proporcionan en este capítulo afectan numerosos procesos de sumo interés en tecnología; por ejemplo, los quemadores de gas y de combustibles líquidos atomizados o sólidos pulverizados, la dispersión de contaminantes en la atmósfera, la transferencia de calor a superficies sólidas por interacción con ellas, la ventilación por desplazamiento del fluido ambiente, las cortinas de aire, etc.

En este capítulo, definimos un *chorro* como el movimiento de un gas (en general, aire) cuya fuente primaria de energía cinética y flujo específico de cantidad de movimiento es una caída de presión a través de un orificio. Sin embargo, si el movimiento se debe a gradientes de fuerzas másicas (diferencias de densidad debidas a diferencias de temperaturas o de composición entre los fluidos del chorro y del ambiente del entorno), el fenómeno de flujo recibe el nombre de *penacho*. Los flujos cuyo movimiento es una transición de un chorro a un penacho se denominan *penachos forzados* o *chorros con efectos de empuje ascensional* (flotación).

Evidentemente, en este capítulo se incluyen solo aquellos conocimientos sobre chorros y penachos que se supone que están razonablemente bien contrastados y, en particular, aquellos resultados que pueden utilizarse para diseñar y proyectar procesos en ingeniería, puesto que, cuando los fundamentos físicos de los chorros y penachos todavía no se comprenden del todo, la simulación numérica de dichos fenómenos no sustituye la falta de conocimientos que impide su aplicación correcta en la práctica.

Si bien todos los chorros son corrientes de fluido emergentes de una “tobera”, es evidente que su naturaleza, su configuración y su evolución varían según cuáles sean la naturaleza del fluido (líquido o gas), el régimen de flujo (laminar o turbulento, subsónico o



supersónico, con o sin torbellino), las características de la tobera (plana, circular, anular), la naturaleza y el estado termodinámico del fluido ambiente en que descarga (líquido, gas, isoterma, no isoterma, reactivo, inerte, en reposo o en movimiento, etc.) y la dirección de inyección en una corriente externa envolvente (co-corriente, contracorriente, normal o inclinada).

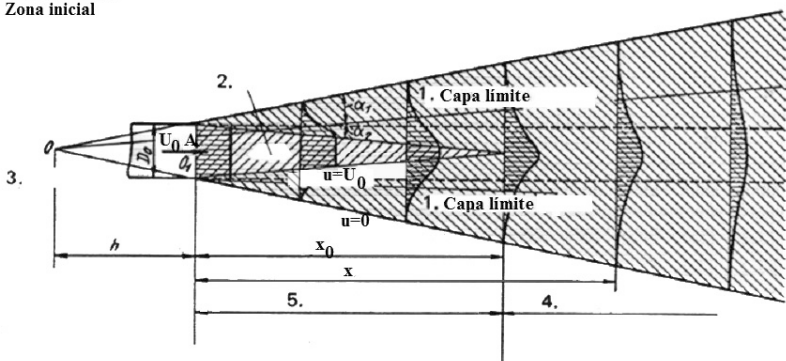
Los primeros apartados de este capítulo describen el caso de un chorro bidimensional (circular y plano) de un gas homogéneo e isoterma, descargando en un medio ambiente en reposo, que, aun siendo el más simple, sirve de referencia y fundamento de los otros tipos de chorro en que influyen factores perturbadores que modifican su configuración y propiedades.

11.2 Chorros turbulentos circulares y planos

Dos son, básicamente, las configuraciones de los chorros turbulentos: los chorros de sección transversal circular y los chorros planos. En ambos tipos, conviene distinguir, para el análisis del flujo, la región próxima al orificio de descarga del fluido de la del resto del chorro, donde se produce el arrastre del fluido ambiente. La figura 11.1 muestra, en escala distorsionada, la sección longitudinal de la configuración-estructura ideal de un chorro turbulento de sección recta circular.

Fig. 11.1.
Sección longitudinal
ideal de un chorro
turbulento de sección
recta circular
[Ide86]

1. Capa límite
2. Núcleo del chorro
3. Origen del chorro
4. Zona principal
5. Zona inicial



Esta configuración-estructura ideal fue concebida considerando que, teóricamente, el chorro circular es análogo a un manantial puntual cuyo origen se encuentra en el interior de un tubo cilíndrico de diámetro D_0 a una distancia desde el orificio tal que el ángulo de la generatriz del cono formado es de 15° .

El tramo inicial del chorro se define como la primera parte desde el orificio de salida, donde la velocidad del fluido en el eje del chorro permanece constante e igual a la velocidad de descarga. El tramo principal lo constituye la parte restante del chorro, donde la velocidad del fluido en el eje disminuye gradualmente, y la curva representativa de la distribución radial de la velocidad se aplanan. Entre ambos tramos existe una zona de transición, no representada en la figura. Además, se muestra una región, denominada *capa límite*, cuya frontera interna se encuentra a una distancia del eje del chorro donde la velocidad del fluido es igual a la velocidad inicial, desde la cual se extiende hasta el



exterior, donde la velocidad es cero en un chorro sumergido, o tiene la velocidad del fluido del medio ambiente del entorno si no está en reposo. No obstante, conviene prestar atención a este concepto pues, en algunos casos, la definición es distinta; por ejemplo, en ciertas teorías del chorro sumergido, se supone que la capa límite es de espesor infinito y tiene perfiles asintóticos de velocidad, temperatura y otras magnitudes.

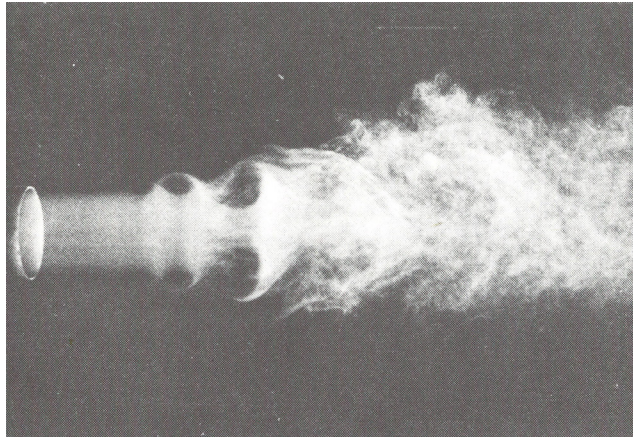


Fig. 11.2.
Visualización del flujo
de un chorro turbulento
que muestra la
estructura de vórtices
anulares.
 $Re = 10,5 \cdot 10^4$
[Rod82]

De hecho, como se explica más adelante, la configuración real del chorro turbulento circular difiere en varios aspectos de la representada en la figura 11.1.

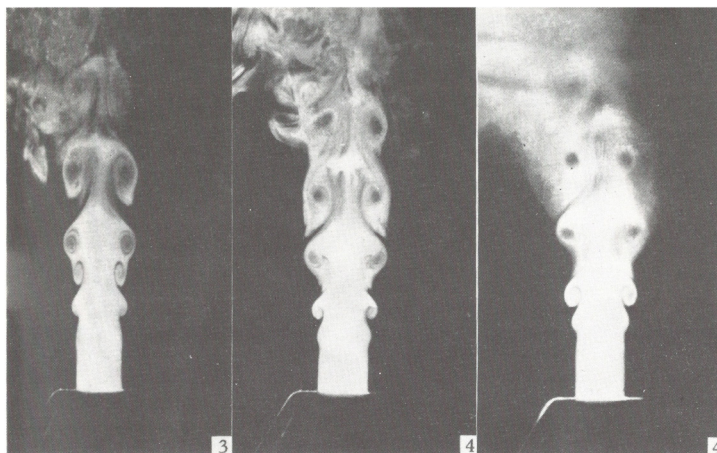
La idea básica subyacente en el estudio de los flujos turbulentos es que son el resultado de superponer, a una estructura organizada, un movimiento caótico y aleatorio. Por ejemplo, en la imagen fotográfica adjunta (v. figura 11.2) del flujo en un chorro turbulento circular cuyo número de Reynolds en el orificio de salida es aproximadamente de 10^5 , se observa una estructura de múltiples vórtices anulares. En los chorros planos, aparecen secuencialmente vórtices cilíndricos en sus lados opuestos. Estos vórtices encuentran su génesis en las capas de cortadura producidas en el orificio de descarga del chorro.

Wehrmann y Willis² observaron la existencia de vórtices anulares y helicoidales, y determinaron que la frecuencia de producción de vórtices anulares era proporcional a la velocidad del fluido en el orificio de salida. Por su parte, Grant³ demostró que la distribución de velocidad en el orificio desempeñaba un papel esencial en la determinación del valor del número de Reynolds en que un chorro laminar deviene turbulento.

El movimiento rotacional de los vórtices induce un campo de movimiento en el fluido ambiente que rodea el chorro y provoca su transporte. Investigaciones realizadas en los años setenta del siglo pasado evidencian que esta estructura de vórtices es arrastrada corriente abajo y forma la base del fenómeno conocido como *estructura de gran escala*. A medida que los vórtices aumentan de tamaño, el campo de velocidad producido por cada vórtice influye en los vórtices próximos de tal manera que, al final, dos vórtices próximos se aparean, como se muestra en la figura 11.3. Se trata de una fotografía del flujo de un chorro turbulento axisimétrico, debida a Becker y Massaro,⁴ que muestra de forma irrefutable la naturaleza “engullidora” del arrastre de fluido ambiente.



Fig. 11.3.
Apareamiento de
vórtices en un chorro
turbulento de simetría
axial
[Rod82]



Por otra parte, durante algún tiempo se sospechó que existían modos de oscilación en los chorros bidimensionales. A principios de los años ochenta, Gortari y Goldschmidt⁵ mostraron claramente la existencia de un modo de “aleteo” con un número de Strouhal localmente invariante $f_{y_{1/2}} / U_m = 0,11$, donde $y_{1/2}$ es la distancia a la línea central desde un punto del chorro plano en que la velocidad del fluido es la mitad de la velocidad en su línea central, y U_m es la velocidad máxima, o sea, la velocidad en el punto correspondiente de la línea central.

Está claro que el arrastre de fluido ambiente por chorros turbulentos en la región que se extiende hasta seis veces el diámetro del chorro desde el orificio está totalmente dominado por un movimiento de vórtice de gran escala. Corriente abajo, la estructura del flujo de un chorro de simetría axial parece ser producto de varios mecanismos: la producción, el aumento de tamaño y el apareamiento de los vórtices anulares, la inestabilidad circunferencial de estos vórtices y el crecimiento y la producción de vórtices helicoidales en la dirección de la corriente. La interacción y eventual auto-destrucción de estas estructuras de gran escala son el mecanismo que genera el siguiente movimiento de remolino turbulento.

11.2.1 Estructura del chorro

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, la estructura del flujo en un chorro isotermo y homogéneo viene determinada por el conocimiento de la distribución de velocidades, su evolución en el sentido de la corriente, los flujos medios de cantidad de movimiento, la distribución de fluctuaciones de la velocidad del fluido, la distribución de las tensiones de cortadura turbulentas y la intensidad de la turbulencia a través del chorro en el sentido de la corriente. En caso de un flujo de chorro heterogéneo y no isotermo, su caracterización completa comporta conocer, además, la distribución de temperatura y la distribución de concentración de componentes en el chorro.

Algunas dificultades importantes en el análisis del flujo de chorro han sido la falta de una instrumentación de medición fiable de la verdadera velocidad con capacidad para discriminar entre velocidades positivas y negativas, por una parte, y la medición simultánea de la velocidad y la temperatura, o bien de la concentración de especies, por otra. La disponibilidad actual de la técnica láser Doppler de medición de la velocidad y



la de visualización-medición “VIP” (*particle image velocimetry*) permiten analizar mejor y con más fiabilidad los flujos de chorro, particularmente los bidimensionales. Sin embargo, quedan todavía por resolver algunos problemas, como pueden ser, por ejemplo, los derivados de la existencia de velocidades negativas, la fiabilidad de las funciones de densidad de probabilidad para la velocidad axial, la exactitud de la medición de la fluctuación de la temperatura y/o de la concentración de especies en el chorro. Además, el conocimiento de la evolución del flujo desde la región próxima al orificio de descarga hasta la de corriente abajo, donde se supone que el chorro turbulento alcanza un estado de autoconservación en el sentido de que se ha establecido el equilibrio de tensiones turbulentas, es impreciso e insuficiente. Con la salvedad de las mediciones realizadas, en particular, por Antonia y otros,⁶ la distribución de tensiones de cortadura y de intensidad de turbulencia a través del chorro en el sentido de la corriente es claramente autosemejante en flujos de simetría axial para valores $x/D > 40$ cuando se les escala mediante el valor de la velocidad axial media máxima. La figura 11.4 muestra la distribución de tensiones de cortadura turbulentas $\overline{u'v'}/U_m^2$ en chorros.

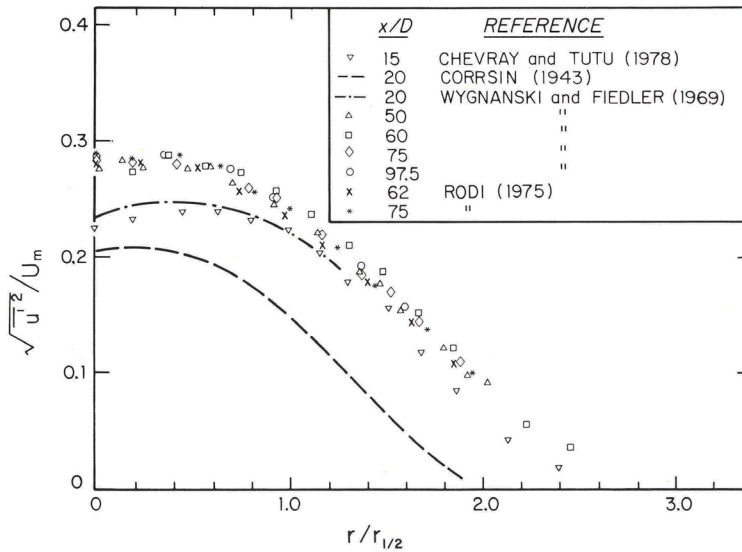


Fig. 4. Distribución de tensiones de cortadura turbulentas [Rod82]

Características de los chorros de sección recta circular

La distribución de velocidad axial media (temporal) es también completamente auto-semejante y puede describirse por una función del tipo:

$$\bar{u} = U_m \exp \left[- (r/b_u)^2 \right] \quad (11.1)$$

expresión en que r es el radio del chorro, posición en la cual la velocidad instantánea del fluido es $u = \bar{u} \pm u'$, y b_u es la distancia radial a la línea de corriente donde dicha velocidad media axial es el 37 % de la velocidad media en el eje, o sea, $0,37 U_m$. Frecuentemente, el perfil de la distribución de velocidad se describe en términos de $r_{1/2}$, que representa la



distancia radial donde la velocidad media axial es el 50 % de la velocidad axial media en el eje del chorro, o sea, $\bar{u} / U_m = 0,5$, de modo que, en este caso, se tiene:

$$b_u = 1,201r_{1/2}$$

La aplicación de la ecuación 11.1 para identificar la estructura del campo de movimiento en un chorro de sección recta circular requiere conocer U_m y b_u en función de la distancia x a lo largo del eje desde el orificio. Dicho conocimiento se alcanza planteando la ecuación del flujo específico de cantidad de movimiento axial promediado en el tiempo, y transformándola aplicando la aproximación de capa de cortadura debida a Townsend,⁷ que relaciona la presión a las fluctuaciones de velocidad radial.

La primera se escribe:

$$\int_0^{b(x)} \left[\overline{u^2} + \overline{u'^2} + \frac{\overline{p} - \overline{p_\infty}}{\rho} \right] 2\pi r dr = M \text{ (Ccte.)} \quad (11.2)$$

La ecuación transformada se escribe:

$$\int_0^{b(x)} \left[\overline{u^2} + \overline{u'^2} - \overline{v'^2} + \int_0^\infty \frac{\overline{v'^2} - \overline{u'^2}}{r} dr \right] 2\pi r dr = M \quad (11.3)$$

Habida cuenta de que, en el chorro completamente desarrollado, o sea, en $x/D > 40$, las distribuciones radiales de variancia de velocidad son autosemejantes, con una escala de longitud lateral b_u y una escala de velocidad U_m , la integración de la ecuación 11.2 da:

$$\frac{\pi}{2} b_u^2 U_m^2 (1 + \delta_u - \delta_p) = M \quad (11.4)$$

donde δ_u y δ_p son las contribuciones al flujo de cantidad de movimiento en el sentido de la corriente por la turbulencia y la presión, respectivamente, cuyos valores son 0,15 y 0,10.

Ahora bien, la única escala de longitud posible del flujo, en ausencia de fuerzas viscosas, es la distancia desde el orificio de eyección del chorro; por consiguiente, se puede escribir:

$$b_u = \alpha_1 x + \alpha_2 \quad (11.5)$$

La tabla 11.1 da los valores de α_1 propuestos por varios investigadores en el supuesto de que el valor de α_2 sea despreciable.

Denotando U_0 la velocidad media (temporal) del fluido en el orificio de salida, el flujo específico de cantidad de movimiento del chorro es $AU_0^2 = M$; por tanto, la relación entre los valores de las velocidades medias temporales en el eje del chorro a la distancia x del orificio y en él se escribe:

$$\frac{U_m}{U_0} = \left(\frac{2}{\pi (1 + \delta_u - \delta_p)} \right)^{1/2} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\sqrt{A}}{(x + \alpha_2 / \alpha_1)} \quad (11.6)$$



Investigadores	$\alpha_1 \approx b_u/x$	b_θ/x
Albertson <i>et al.</i> (1950)	0.114	--
Becker <i>et al.</i> (1967)	--	0.127
Corrsin (1943)	0.100	0.132
Corrsin and Uberoi (1950)	0.114	0.140
	0.130	0.156
Forstall and Gaylord (1955)	0.107	0.115
Hinze and van der Hegge Zijnen (1949)	0.102	0.115
Keagy and Weller (1949)	0.099	0.107
	0.106	0.126
Kizer (1963)	0.099	0.125
Rosenweig <i>et al.</i> (1961)	0.108	0.120
Ruden (1933)	0.103	0.124
Sunavala <i>et al.</i> (1957)	--	0.141
Uberoi and Garby (1967)	0.090	0.101
	0.101	0.114
Wilson and Danckwerts (1964)	0.120	0.156
Wynanski and Fiedler (1969)	0.103	--
Birch <i>et al.</i> (1978)	--	0.117
Shaughnessy and Morton (1977)	0.106	0.127
Chevray and Tutu (1978)	0.102	0.119
Mean values	0.107	0.126
	± 0.003	± 0.004

Tabla 11.1.
Parámetros de ancho
de chorros turbulentos
circulares

La ecuación 11.6 se puede escribir de la forma:

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{k\sqrt{A}}{x + \alpha_2 / \alpha_1} \quad (11.7)$$

El valor del coeficiente k depende de la contribución relativa de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad y de la presión al flujo específico de cantidad de movimiento.

En la figura 11.5, se representa una colección de valores de la relación de velocidades U_m/U_0 en función de la distancia adimensional x/\sqrt{A} desde el orificio. El valor del coeficiente de ajuste funcional es 7,0.

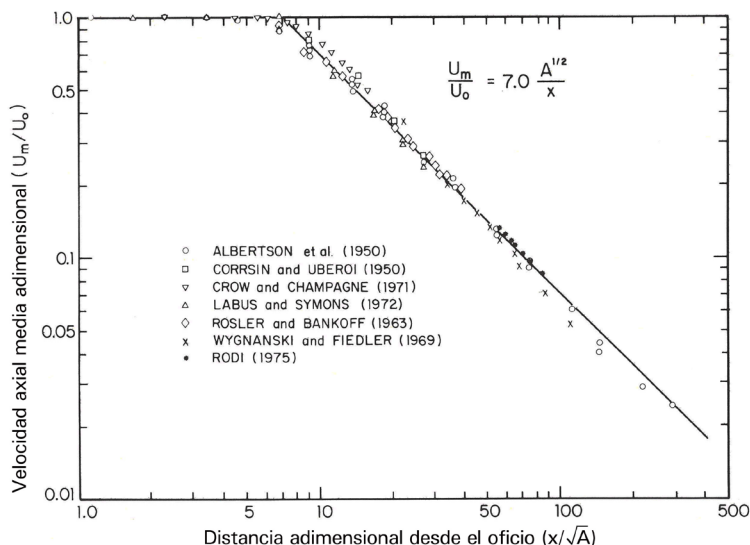
En cuanto al caudal local de arrastre μ , se ha sugerido que es proporcional a la velocidad del fluido en el eje del chorro, multiplicada por la escala de longitud característica local b_u . Considerada constante, su valor se expresa en términos del flujo específico de cantidad de movimiento M y de la distancia x al orificio, o sea:

$$\mu = \alpha\sqrt{8\pi Mx} \quad (11.8)$$

La figura 11.6 muestra su valor adimensional, escalado con el caudal del chorro eyectado \dot{V} , en función de la distancia adimensional al orificio x/l_Q , donde $l_Q = \dot{V}/\sqrt{M}$.



Fig. 11.5.
Velocidad media
adimensional a lo largo
del eje de un chorro
turbulento en función de
la distancia
adimensional al orificio
[Rod82]



Chorros no homogéneos

Otra de las características importantes de los chorros turbulentos es la distribución de concentración de especies (por *especie*, se entiende sea la naturaleza material en un chorro no homogéneo, sea la temperatura en un chorro no isoterma). Son muchos los datos disponibles, aportados por un gran número de investigadores. Chen y Rodi,⁹ entre otros, han realizado un resumen de ellos.

A partir de los resultados experimentales, resulta evidente que los perfiles de concentración media $\bar{\theta}$ son autosemejantes. Un buen ajuste funcional de ellos aporta la ecuación:

$$\bar{\theta} = \theta_m \exp \left[- (r / b_\theta)^2 \right] \quad (11.9)$$

donde b_θ es una función lineal de x , análoga a la de la velocidad. El valor medio de b_θ / x es de 0,126 (v. tabla 11.1).

En cuanto a la concentración media máxima temporal $\bar{\theta}_m$ a lo largo del eje, la mayoría de investigadores suponen que es una función del flujo másico total del trazador Y , de la distancia x a partir del orificio y del flujo específico de cantidad de movimiento invariante M . Se expresa por la ecuación:

$$\theta = aY \left(x\sqrt{M} \right)^{-1} \quad (11.10)$$

donde a es una constante cuyo valor es, según Chen y Rodi,⁹ de 5,64. Otros investigadores dan el valor de 5,8 en la región $30D$ corriente abajo a partir del orificio, si bien investigaciones recientes han concluido que la región autosemejante no se desarrolla realmente hasta 30-40 diámetros de orificio corriente abajo y que la tasa de crecimiento de chorro más allá de esta posición es constante, con un valor mayor que el de la región $x / D < 40$.



La figura 11.6 muestra la relación de concentraciones θ_0 / θ_m en función de la distancia adimensional al orificio, x / D , en un chorro turbulento.

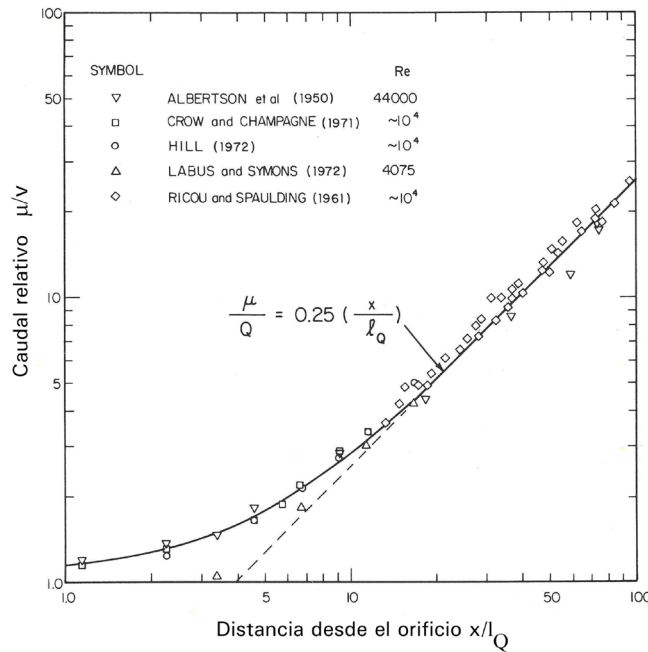


Fig. 11.6.
Caudal relativo en un chorro turbulento en función de la distancia al orificio [Rod82]

Conviene comentar que, si bien la intensidad relativa de las fluctuaciones turbulentas de concentración en el eje del chorro es muy similar a las de las fluctuaciones de velocidad, se ha comprobado que el valor máximo de $\sqrt{\theta'^2} / (\sqrt{\theta'^2})_m$ en $r/x \approx 0,1$ es distinto, mayor al valor correspondiente de $(\sqrt{u'^2}) / \sqrt{u'^2}$, lo cual parece que se debe a la diferencia entre las ecuaciones que describen la conservación de las variancias de energía cinética turbulenta y la de concentración (v. figura 11.7).

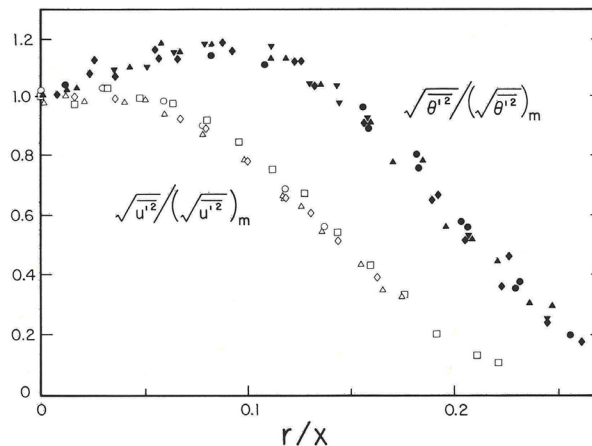


Fig. 11.7.
Distribución de valores rms de velocidad y de concentración en un chorro axisimétrico [Rod82]

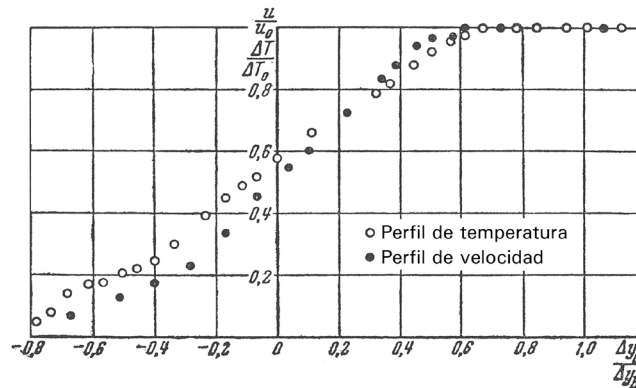


Chorros no isotermos

En ingeniería, es frecuente encontrar procesos en que la temperatura de un chorro sumergido (se entiende por tal el chorro que se expande en un fluido en reposo) difiere de la del fluido que lo rodea. La solución del problema de transferencia de calor entre el fluido ambiente y el fluido del chorro es posible solo si se conocen las variaciones de temperatura a lo largo del chorro y en sus secciones transversales.

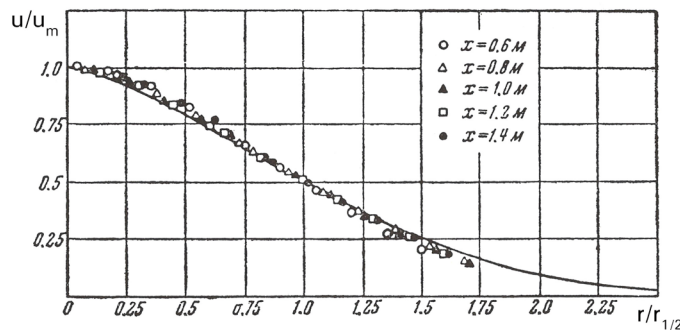
La naturaleza de la distribución de las magnitudes de las diferencias de temperatura en un chorro sumergido es similar a la de la distribución de velocidad, como puede observarse en las figuras 11.8 y 11.9.

Fig. 11.8.
Perfiles de
temperatura y de
velocidad
adimensionales en la
capa límite de un
chorro axisimétrico¹⁰
[Abr63]



La figura 11.8 muestra el campo de temperatura adimensional hallado por Abramovich¹⁰ para una capa límite en la región inicial de un chorro de aire de sección recta circular, de 100 mm de diámetro, a una distancia de 250 mm desde el orificio, y el campo de velocidad obtenido para la misma sección en función de la distancia relativa $(r - r_{1/2}) / (r_{0,9} - r_{0,1})$. La velocidad de descarga del chorro es de 25 m/s y la diferencia de temperatura entre la del chorro en el orificio y la del ambiente $\Delta T_0 = T_0 - T_a$ es de 35°C.

Fig. 11.9.
Variación de la
velocidad a lo largo
del eje de un chorro
circular¹⁰
[Abr63]



En la figura 11.9, se representan las diferencias de temperatura adimensionales y los perfiles de velocidad en la región principal de un chorro axisimétrico en función de $\Delta y_{1/2} / \Delta y_b$.

La distribución de temperatura a lo largo del eje de la región principal se puede establecer de la misma manera que para las velocidades, salvo que se debe utilizar la condición de



contenido constante de calor en el chorro, en lugar del valor constante de la cantidad de movimiento.

En otras palabras, el contenido de calor, a temperatura diferente de la del medio ambiente, de la masa total de fluido (inicial más arrastrada) que pasa a través de una sección del chorro elegida al azar es igual al contenido de calor inicial de la masa emergente por la tobera en el mismo intervalo de tiempo. Por tanto, como el flujo másico aumenta, la temperatura del fluido en el eje disminuye y la distribución radial de temperatura se aplanan.

A medida que se ha avanzado en los estudios de mecánica de chorros turbulentos, se han ampliado los conocimientos de la distribución de temperatura a lo largo del eje, en sus secciones transversales laterales, y también la difusión de calor del chorro al medio ambiente o la transferencia a una superficie sólida en la cual impacta.

Ello ha permitido aplicar la teoría de chorros a la solución de problemas de transferencia de calor en ingeniería, que, a pesar de los grandes avances en la modelización de la turbulencia y su implementación en supercomputadoras, dada la complejidad de los problemas reales, depende en una gran medida de los resultados experimentales que se hayan ido acumulando sobre cada problema en particular.

Las aproximaciones teóricas al problema están relacionadas con el flujo turbulento libre, que es el caso más simple de turbulencia dependiente de los efectos de viscosidad. Al respecto, hay que tener presente que el estudio de la turbulencia libre debe considerarse una etapa preliminar en el estudio del flujo turbulento.

(Ver ref. 8)

11.2.2 Síntesis de las teorías de turbulencia libre para el caso de chorros sumergidos

Varias son las teorías conocidas sobre la turbulencia libre, en ocasiones denominadas *teorías de chorro*, que sitúan su origen en un nuevo concepto de viscosidad aportado por Bussinesq.

Las teorías más conocidas se deben a Prandtl, Taylor, Prandtl-Görtler y Reichard, entre otros. De hecho, la primera teoría de Prandtl es el germen de todas las demás. Una conclusión directa de esta teoría para los casos de chorro libre es la semejanza absoluta entre los campos de velocidad y de temperatura. Sin embargo, al hallar experimentalmente una anomalía de escala entre los campos de velocidad y de temperatura, Taylor supuso que la tensión de cortadura turbulenta debía estar determinada por la transferencia lateral de vorticidad y no, como suponía Prandtl, por la transferencia de cantidad de movimiento. De esta manera, Taylor eliminó una inconsistencia de la teoría de Prandtl: el desprecio de los gradientes de presión instantánea local que sustancialmente influyen en el intercambio de cantidad de movimiento pero que no afectan la transferencia de vorticidad.

A principios de los años cuarenta, Prandtl publicó una nueva teoría de la turbulencia libre en que utilizó la ley de Newton de fricción viscosa, como ya antes había sugerido Bussinesq, para determinar la tensión de cortadura turbulenta en un chorro. Utilizando la nueva teoría de Prandtl, Görtler resolvió dos problemas de la teoría del chorro turbulento sumergido: el problema de la capa límite de una corriente paralela infinita y el problema de un chorro plano con una sección transversal inicial infinitamente estrecha. A



continuación, se expone una síntesis de los fundamentos y de los resultados de las teorías enumeradas.

Primera teoría de Prandtl

El punto de partida es la teoría de la capa límite de un fluido incompresible y supone que, en los chorros libres sumergidos, los gradientes de presión son tan pequeños que pueden despreciarse. Comparando los términos $\partial \overline{u'v'} / \partial y$ y $(\partial \tau_{xy} / \partial y) / \rho$ que aparecen en dos ecuaciones equivalentes de la capa límite turbulenta bidimensional, se llega a la relación original de la teoría de Prandtl para la denominada *tensión aparente de cortadura turbulenta* $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$.

Por otra parte, a partir de una interpretación física de las fluctuaciones turbulentas de velocidad, Prandtl concluye que $v' \sim \mp u'$ y $u' \approx l_t \partial u / \partial y$, donde l_t es la denominada *longitud de mezcla*.

En definitiva, Prandtl obtiene la conocida fórmula de la tensión de cortadura turbulenta

$$\tau_{xy} = \pm \rho l_t^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (11.11)$$

La esencia de esta primera teoría de Prandtl de la turbulencia libre es la siguiente: dada la ausencia de paredes en un chorro sumergido, la longitud de mezcla en dirección transversal al chorro ha de ser constante:

$$l_t(y) = \text{Ccte.} \quad (11.12)$$

A su vez, como quiera que el ancho de un chorro sumergido es proporcional a la distancia desde el polo del chorro, la ecuación 11.12 se puede escribir:

$$l_t = cx \quad (11.13)$$

La sustitución de la ecuación 11.13 en la 11.11 da:

$$\tau_{xy} = \pm \rho c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (11.14)$$

Fuente turbulenta axisimétrica de Tollmien

Tollmien considera que es posible analizar el flujo en la parte corriente abajo de un chorro turbulento axisimétrico sumergido examinando el flujo a partir de una fuente puntual turbulenta. Ello comporta determinar previamente la situación del foco puntual a partir del centro del orificio de emergencia del chorro. A tal efecto, parte de la ecuación fundamental de la velocidad del fluido a lo largo del eje $u_m x = \text{Ccte.}$ Y, aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento total en un chorro, obtiene:

$$2\pi\rho \int_0^{r_p} u^2 r dr = \pi\rho u_0^2 R_0^2 = \text{Ccte.} \quad (11.15)$$

donde r_p es el radio en la frontera del chorro.

Realizadas varias transformaciones, introduciendo la variable $\varphi = r/ax$, llega a la ecuación que define la velocidad axial en la parte corriente abajo de un chorro circular:



$$u_m / u_0 = 0,96 / (ax / R_0) \quad (11.16)$$

A partir de la ecuación 11.16, la distancia adimensional a que se encuentra la sección transversal de transición del chorro a partir del polo es:

$$(ax / R_0) = 0,96 \quad (11.17)$$

Una vez conocida la situación del polo, se puede determinar la velocidad a lo largo del eje del chorro y la distribución de la velocidad a lo largo del radio en cualquier sección del chorro. La figura 11.9 muestra el valor de la velocidad adimensional a lo largo del eje del chorro en función de la distancia adimensional desde el origen del chorro, as / R_0 . El excelente acuerdo entre los valores experimentales aportados por varios investigadores y los valores teóricos de la velocidad axial en un chorro axisimétrico se obtuvo adoptando una localización del polo (de la región principal del chorro) dentro de la tobera a una distancia adimensional desde su salida.

$$\frac{as_0}{R_0} = \frac{a(x-s)}{R_0} = 0,29 \quad (11.18)$$

La figura 11.10 muestra la comparación del perfil de velocidad en la parte corriente abajo de un chorro axisimétrico, resultado del modelo teórico de Tollmien, con los datos experimentales de Trüpel. El acuerdo es excelente.

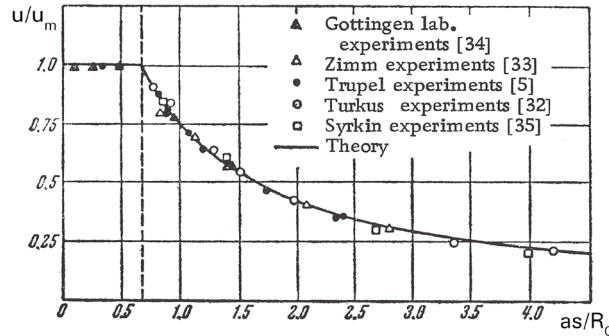


Fig. 11.10
Comparación del perfil de velocidad teórico en la parte corriente abajo de un chorro axisimétrico con los resultados experimentales de Trüpel¹⁰ [Abr63]

Teoría de Taylor de la turbulencia libre

El modelo físico de Taylor de la turbulencia libre parte de la hipótesis siguiente: las tensiones tangenciales en flujo turbulento se deben a la transferencia de vorticidad, no de cantidad de movimiento, como en la teoría de Prandtl.

Además, adopta una longitud de mezcla l_{IT} distinta de la definida por Prandtl, de la cual difiere en una constante:

$$l_{IT} = l_t \sqrt{2} = cx \sqrt{2}$$

A partir de la ecuación del movimiento, en la dirección x , de la capa límite de un fluido incompresible y de la ecuación de diferencia de vorticidad entre capas contiguas de fluido en el chorro, $\Delta \omega$, Taylor deduce la ecuación:



$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \overline{v' l_{tr}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11.20)$$

Sabiendo que las fluctuaciones transversales de velocidad tienen el mismo orden de magnitud que las fluctuaciones longitudinales, cabe admitir la relación siguiente:

$$\pm v' \sim u' \sim l_{tr} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Entonces, el tercer término de la ecuación 11.20 se escribe:

$$l_{tr}^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Por los mismos razonamientos expuestos en el subapartado anterior, se llega a la ecuación:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \pm l_{tr}^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.21)$$

Considerada constante la longitud de mezcla a lo largo de la sección transversal del chorro, la integral de la ecuación 11.21 da:

$$\tau_{xy} = \pm \frac{1}{2} \rho l_{tr}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (11.22)$$

A la vista de la ecuación 11.22, si la longitud de mezcla en la teoría de Taylor es $\sqrt{2}$ veces la longitud de mezcla en la teoría de Prandtl, los campos de velocidad y las tensiones de cortadura turbulentas son las mismas en ambas teorías. Las soluciones de Tollmien-Prandtl para tres problemas dinámicos clásicos de teoría de chorros (el problema de la capa límite en el borde de un chorro plano y los problemas de fuentes turbulentas planas y axisimétricas) continúan siendo válidas cuando se utiliza la teoría de Taylor.

Segunda teoría de Prandtl de turbulencia libre

En la segunda teoría de la turbulencia libre propuesta por Prandtl, se compara la expresión general de cortadura turbulenta $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$ con la fórmula que Bussinesq

propuso $\tau_{xy} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}$, donde ν_t es el coeficiente de viscosidad cinemática (viscosidad de remolino) del flujo turbulento. De esta comparación, resulta $\nu_t = l_{tr}^2 \left(\partial u / \partial y \right)$.

Prandtl supone que, a lo largo de la sección transversal del chorro, la longitud de mezcla no se mantiene constante, pero sí la viscosidad turbulenta. Por otra parte, los perfiles de velocidad adimensional en varias secciones transversales del flujo del chorro son idénticos. Sobre estas bases, deriva para la viscosidad turbulenta la ecuación siguiente:

$$\nu_t = \kappa b (u_m - u_H) \quad (11.23)$$

donde u_m y u_H son las velocidades del fluido en los bordes de la zona de mezcla (en un chorro sumergido $u_H = 0$), b es el ancho de esta zona y κ es una constante empírica de esta teoría.



En definitiva, la nueva teoría de Prandtl define la tensión de cortadura en el chorro mediante la ecuación:

$$\tau_{xy} = \kappa \rho b (u_m - u_H) \frac{du}{dy} \quad (11.24)$$

Aplicando esta ley de fricción, Görtler elabora una nueva teoría para la región de mezcla bidimensional, en particular para el caso de una fuente turbulenta plana, y obtiene expresiones analíticas para el perfil de velocidad. Por ejemplo, para la capa límite en el borde de un chorro sumergido, deduce la ecuación siguiente:

$$\frac{u}{u_0} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-z^2} dz \quad (11.25)$$

donde $\xi = \pm\infty$.

La teoría de Görtler para el flujo a partir de una fuente turbulenta parte de la ecuación del movimiento:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.26)$$

y obtiene la siguiente ecuación de cantidad de movimiento:

$$uv + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^y u^2 dy - \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (11.27)$$

donde, para un chorro sumergido ($u_H = 0$), se tiene:

$$\nu_t = \kappa x u_m \quad (11.28)$$

y $k = b / x$

Para un chorro turbulento plano, la velocidad a lo largo del eje se expresa $u_m = n / \sqrt{x}$ y, adoptando para la velocidad u a la distancia y del eje del chorro la expresión

$u = u_m F' \left(\sigma \frac{y}{x} \right)$, se obtienen, después de varias operaciones matemáticas, las

ecuaciones siguientes de las componentes de la velocidad:

$$u = u_m \left(1 - \tanh^2 \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right) \quad (11.29)$$

$$\sigma v = u_m \left(\sigma \frac{y}{x} \left(1 - \tanh^2 \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right) - 0,5 \tanh \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right) \quad (11.30)$$

El valor de la constante empírica σ , obtenido por ajuste de los resultados experimentales de Reichard con las anteriores ecuaciones, es 7,67.

En la figura 11.11, se representan los perfiles de velocidad $u / u_m = f(y / y_{1/2})$ en la parte corriente abajo de un chorro plano, derivados de las teorías de Görtler y Tollmien,



y los valores experimentales obtenidos por Reichard. En la figura 11.12, se muestra el perfil de velocidad en la parte corriente abajo de un chorro axisimétrico.

Fig. 11.11.
Perfiles de distribución
de velocidad la parte
principal de un chorro
axisimétrico¹⁰
[Abr63]

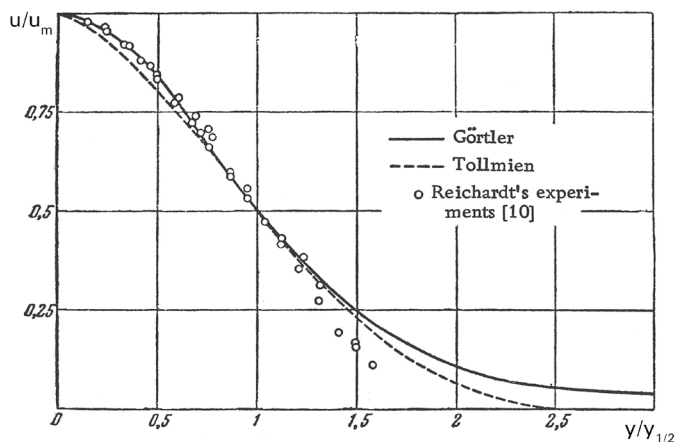
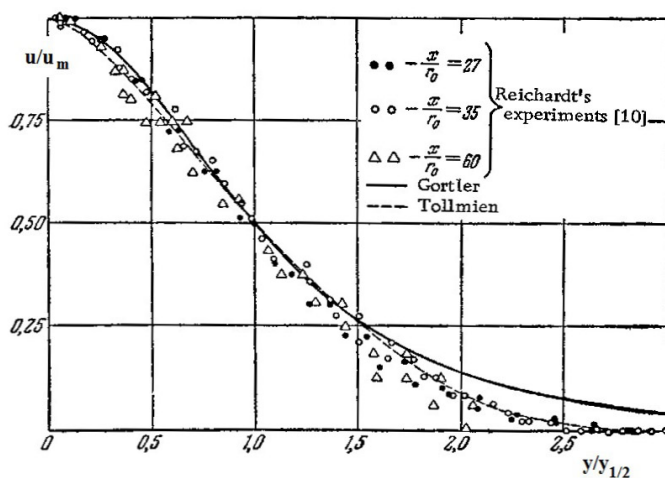


Fig. 11.12.
Perfiles de distribución
de velocidad en la parte
principal de un chorro
plano¹⁰



En el caso del chorro sumergido axisimétrico, las componentes de la velocidad del fluido en su parte corriente abajo se calculan mediante las ecuaciones siguientes:

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{\left(1 + 0,125 \left(\sigma \frac{y}{x}\right)^2\right)^2} \quad (11.31)$$

$$\sigma \frac{v}{u_m} = \frac{\sigma \frac{y}{x} - 0,125 \left(\sigma \frac{y}{x}\right)^2}{2 \left(1 + 0,125 \left(\sigma \frac{y}{x}\right)^2\right)^2} \quad (11.32)$$



11.2.3 Características de los chorros planos

Las características de los chorros planos son, esencialmente, muy similares a las de los chorros circulares. El primer rasgo evidente es el crecimiento inicial de vórtices en dos modos posibles: secuencialmente, sobre lados alternos del chorro o, simultáneamente, sobre lados opuestos. Algunos investigadores, entre ellos Goldschmidt y Bradshaw,¹¹ han observado claramente la aparición de modos de “aleteo”, que persisten muy corriente abajo. Es también bastante evidente que el ángulo de propagación de un chorro plano es una función lentamente creciente de la distancia a lo largo del eje del chorro, que tiende, según parece, a un valor constante a una distancia mayor que 200 anchos de orificio corriente abajo.

La figura 11.13, que reproduce los resultados experimentales obtenidos por Kotsovinos,¹² muestra cómo se desarrolla la mitad del ancho adimensional, $y_{1/2} / D$, del perfil de velocidad media en función de la distancia adimensional a la ranura, x / D , hasta alcanzar el valor asintótico $dy_{1/2} / dx = 0,14$.

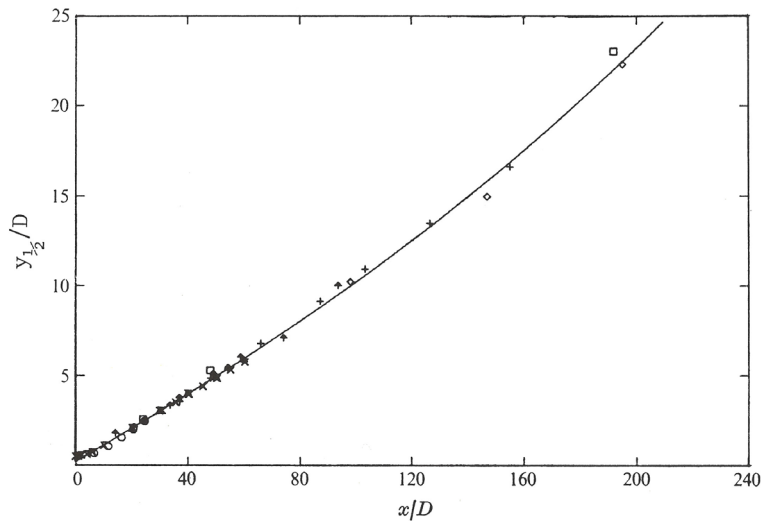


Fig. 11.13. Crecimiento del ancho medio de chorros turbulentos planos en función de la distancia desde el orificio de eyección del chorro⁸ [Rod82]

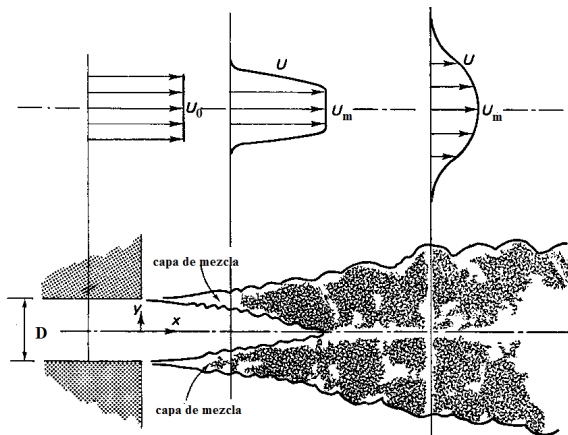
Las medidas de la tensión de cortadura turbulenta $\overline{u'v'}/U_m^2$ muestran una distribución similar a la del chorro circular. La intensidad pico es de 0,25, si bien para algunos investigadores el valor oscila entre 0,25 y 0,28.

La tasa de decaimiento de la velocidad media a lo largo del eje de un chorro turbulento plano se obtiene a partir de la integral de la ecuación de cantidad de movimiento, que, de forma aproximada, se escribe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \frac{\overline{P} - P_{\infty}}{\rho_0} \right) dy = M \quad (11.33)$$

La figura 11.14 muestra el esquema de un chorro turbulento plano. El chorro deviene auto- conservativo a cierta distancia desde el origen de las dos capas límite, situado cerca del orificio por el cual ha emergido.

Fig. 11.14.
Chorro turbulento
plano [TL74]



Habida cuenta de que los resultados experimentales muestran la dependencia con respecto de $y_{1/2}$ de los primeros términos en el paréntesis de la integral 11.33, y también la autosemejanza en la distribución de presión, la ecuación 11.33 implica:

$$kU_m^2 y_{1/2} = M \quad (11.34)$$

donde el valor de k depende de la forma de los perfiles de velocidad media temporal, de la fluctuación turbulenta de la velocidad y de la presión.

Al tratarse de un problema de simple escala de longitud, cabe admitir que la mitad del ancho del chorro viene definida por una función lineal de la distancia al orificio de descarga del chorro, o sea, $y_{1/2} = \alpha_1 x + \alpha_2$.

Admitiendo que el valor de k es del orden de la unidad, resulta:

$$U_m^2 \sim \frac{M}{\alpha_1 x + \alpha_2} \quad (11.35)$$

Los resultados experimentales obtenidos por varios investigadores, desde Knystautas¹³ hasta Kotsovinos y List,¹⁴ parece que convergen en una fórmula general para la evolución relativa de la velocidad a lo largo del eje del chorro de la forma:

$$U_m / U_0 = 2,3\sqrt{D/x} \quad (11.36)$$

Análogamente, se puede demostrar que la disminución de concentración media de material trazador en un chorro a partir de su origen satisface la ecuación:

$$\theta_m / \theta_0 = 1,9\sqrt{D/x} \quad (11.37)$$

El flujo por unidad de ancho en un chorro plano viene definido por la integral $\mu = \int u dy$ extendida al chorro, y se especifica mediante el flujo específico de cantidad de movimiento del chorro M en la forma:

$$\mu = \sqrt{C_j M x} \quad (11.38)$$



Por consiguiente, la tasa de arrastre de fluido ambiente por el chorro viene dada por la ecuación:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_j M}{x} \right)^{1/2} \quad (11.39)$$

Las mediciones directas realizadas por Kotsovinos confirman la validez de esta ecuación, con un valor de C_j igual a 0,29.

En cuanto a las propiedades de turbulencia del chorro, son muchos los estudios que se han llevado a cabo sobre las funciones de correlación, los balances de energía turbulenta, incluyendo la disipación etc., y los resultados obtenidos evidencian, entre otras características, que los remolinos de gran escala crecen linealmente con la distancia al origen. Los términos de disipación también aumentan con la distancia a la tobera de eyección del chorro, como ocurre con la escala de longitud de Kolmogorov $(\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$, cuyo valor pasa de 0,08 mm en $x/d = 20$ a 0,12 en $x/d = 120$.

En resumen, la turbulencia en un chorro plano completamente desarrollado no es muy diferente de la de un chorro circular. No obstante, la distribución axial de magnitudes medias se escala de forma diferente, como $x^{-1/2}$ frente a x^{-1} para el chorro circular. Igual que para el chorro circular, la intensidad de las fluctuaciones turbulentas parece acordarse a escala con el 27 % de la velocidad media máxima local U_m , que a su vez viene fijada por el flujo específico de cantidad de movimiento del chorro y por la distancia desde el orificio. El factor más importante en la determinación de un chorro es la cantidad de movimiento en la descarga, y es precisamente la conservación de esta cantidad de movimiento la que efectivamente controla el desarrollo del chorro.

11.2.4 Distribución de temperatura y de concentración de constituyentes en la región principal de chorros turbulentos

En este apartado, se exponen los conocimientos esenciales de la distribución de temperatura y de concentración de constituyentes en una sección transversal de chorros planos y axisimétricos.

En el libro de Abramovich, se parte de la hipótesis de que los espesores de las capas dinámicas térmica y de difusión son idénticos, y que los contornos de igual concentración y temperatura adimensionales, así como los contornos de igual velocidad, son líneas rectas, conforme a la primera teoría de Prandtl de turbulencia libre.

Sea $\Delta T = T - T_a$ la diferencia entre la temperatura de un punto en el chorro y la del medio ambiente envolvente. Según esta teoría, la diferencia de temperatura a lo largo del eje de la región principal de un chorro plano es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde el polo del chorro $\Delta T_m \sim 1/\sqrt{x}$. Basándose en este concepto, se obtiene una expresión general para la diferencia de temperatura en un punto arbitrario del chorro:

$$\Delta T = \Delta T_m \theta(\eta) = \frac{k}{\sqrt{x}} \theta(\eta) \quad (11.40)$$



A partir de un balance de calor y de la primera teoría de Prandtl de la turbulencia libre, se llega a la conclusión de que los perfiles de distribución de velocidad y de diferencia de temperatura en la parte corriente abajo de un chorro turbulento plano se expresan por la misma relación que estableció Tollmien:

$$(u / u_m) = (\Delta T / \Delta T_m) = \theta(\eta) \quad (11.41)$$

En el caso de un chorro axisimétrico sumergido, se obtiene, sobre la base de la invariancia de la diferencia de contenido de calor, la ley hiperbólica de descenso de la diferencia de temperatura a lo largo del eje del chorro:

$$\Delta T_m = k / x$$

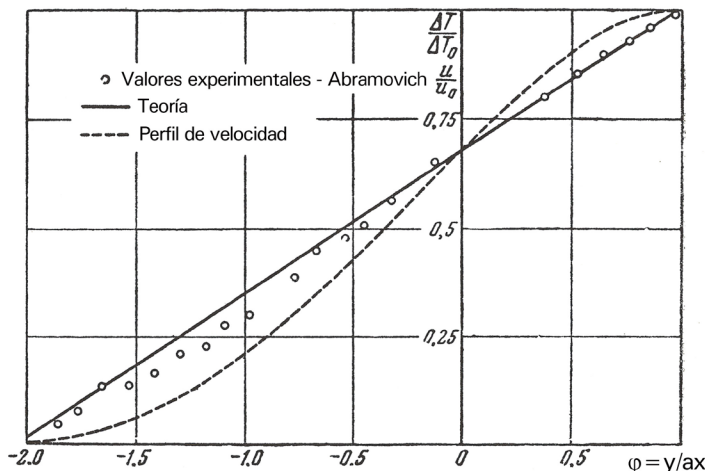
Así, la expresión general de la diferencia de temperatura en un punto arbitrario del chorro se escribe:

$$\Delta T = \Delta T_m \theta(\eta) = \frac{k}{x} \theta(\eta) \quad (11.42)$$

En este caso, sin embargo, los resultados experimentales demuestran que los perfiles de distribución de la diferencia de temperatura y de velocidad no coinciden.

En la figura 11.15, se compara el perfil de temperatura en la capa límite de un chorro axisimétrico con los datos experimentales obtenidos por Abramovich y con el perfil de distribución de velocidad. Se constata el buen acuerdo del perfil de temperatura derivado de la teoría de Taylor con la curva de datos experimentales, pero se desvía mucho del perfil de distribución de la velocidad.

Fig. 11.15.
Perfil de temperatura en
la capa límite de un
chorro axisimétrico¹⁰
[Abr63]



En cuanto a la distribución de constituyentes en el chorro, el modelo de Prandtl de turbulencia libre conduce al mismo resultado que el del problema térmico, esto es, el perfil de diferencia de concentración adimensional y el perfil de velocidad adimensional se expresan por la misma relación.

En la teoría de Taylor sobre la turbulencia libre, los mecanismos de difusión de calor y de mezcla son los mismos que en la teoría de Prandtl.



Así, las ecuaciones iniciales de difusión de calor y de mezcla en un chorro turbulento en el modelo de Prandtl se satisfacen cuando se aplica la teoría de Taylor, si se acepta que la longitud de mezcla en esta teoría es $\sqrt{2}$ la longitud de mezcla definida por Prandtl.

En contraste con la teoría de Prandtl-Tollmien, la teoría de Taylor no conduce a la semejanza de los perfiles de diferencia de temperatura (o de concentración de especies) y de velocidad. En la figura 11.16, se compara el perfil de diferencia de temperatura en el caso de un chorro plano según la teoría de Taylor con los datos experimentales de Reichardt y, en la figura 11.17, se compara el perfil de temperatura en la parte principal de un chorro axisimétrico con los datos experimentales de Stark. El acuerdo entre los resultados aportados por el modelo teórico y los resultados experimentales es excelente en el caso de un chorro plano, pero no tanto en el caso de un chorro axisimétrico.

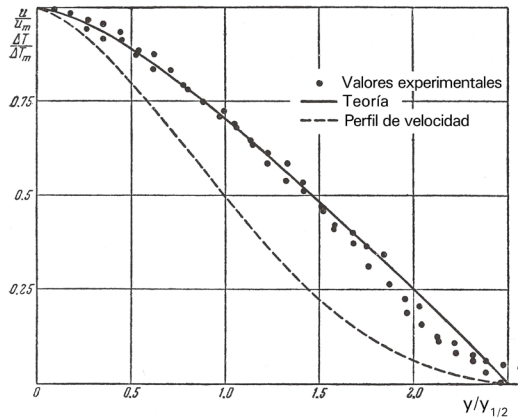


Fig. 11.16. Comparación del perfil de temperatura en la parte corriente abajo de un chorro plano con los datos experimentales de Reichardt [Abr63]

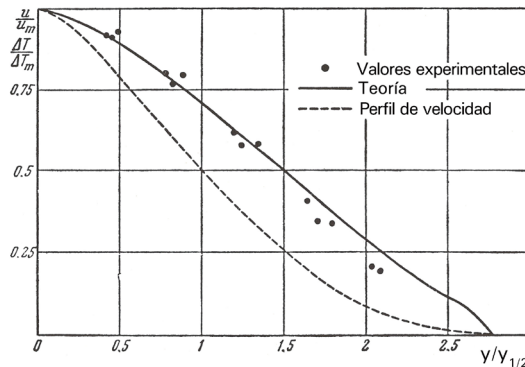


Fig. 11.17. Perfil de temperatura en la parte principal del chorro axisimétrico, comparado con los datos experimentales de Stark [Abr63]

Con respecto a la ley de variación de temperatura a lo largo del eje de un chorro sumergido, la teoría de Taylor aporta las ecuaciones siguientes:

Chorro plano:

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{1,04}{\sqrt{\frac{as}{b_0} + 0,41}} \quad (11.43)$$

Chorro axisimétrico:

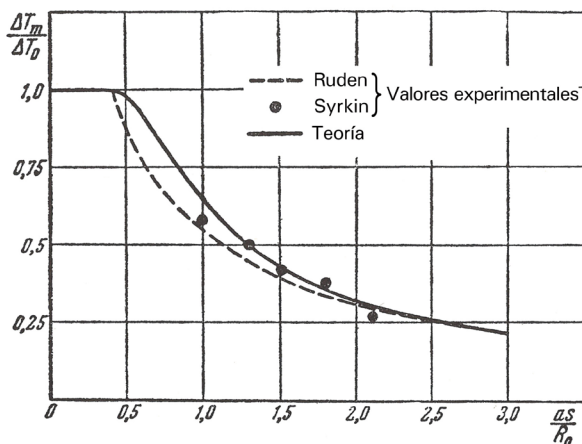
$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{0,7}{\frac{as}{R_0} + 0,29} \quad (11.44)$$



donde $as = a(x - s_0)$, $a = \sqrt[3]{2c^2}$, x es la distancia desde el polo del chorro al punto del eje en que la temperatura es T_m ; s_0 es la distancia desde el polo del chorro hasta la salida de tobera, y c es la constante en la expresión de Prantdl que define la longitud de mezcla. b_0 y R_0 son el ancho mitad inicial del chorro plano y el radio inicial del chorro axisimétrico, respectivamente.

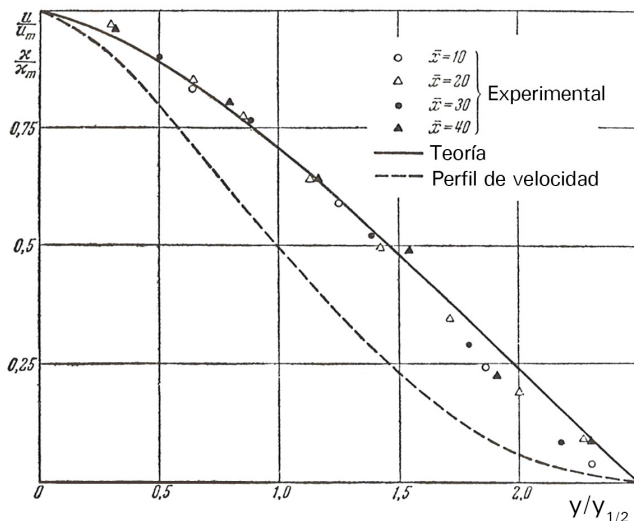
En la figura 11.18, se comparan los resultados teóricos aportados por la ecuación 11.44 con los valores experimentales medidos por Ruden y Syrkin.¹⁰

Fig. 11.18.
Variación de
temperatura a lo
largo del eje de un
chorro circular
[Abr63]



Se demuestra que el perfil de concentración de especie a lo largo del eje de un chorro circular satisface la misma ley que el perfil de temperatura, o sea, la ecuación 11.44. Como confirmación, en la figura 11.19 se comparan los perfiles de concentración de dióxido de carbono en la sección transversal lateral de un chorro plano que se propaga en aire en reposo, con los datos experimentales de Abramovich y Borodachev.

Fig. 11.19.
Comparación del perfil
de concentración de
dióxido de carbono en
la sección transversal
lateral de un chorro
plano con los datos
experimentales de
Abramovich y
Borodachev
[Abr63]





Transferencia de calor en un chorro sumergido

Conocidas las variaciones de temperatura a lo largo del eje y de una sección transversal de un chorro turbulento sumergido, se puede resolver el problema de transferencia de calor entre el fluido del chorro y el fluido del medio ambiente en que descarga y, por consiguiente, entre las capas del chorro.

La diferencia de temperatura entre un punto del chorro y el medio ambiente, o a la inversa, se expresa $\Delta T = \pm(T - T_a)$, donde el signo + se aplica cuando la temperatura del fluido del chorro es mayor que la ambiente, y el signo – en caso contrario.

La ecuación de la capa límite térmica de un chorro turbulento se escribe:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'T'}{\partial y} = 0 \quad (11.45)$$

Comparada esta ecuación con la correspondiente del flujo estacionario $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{c_p g \rho} \frac{\partial W}{\partial y}$, se obtiene la ecuación de transmisión de calor en mezcla turbulenta:

$$W = -c_p g \rho \bar{v}'T' \quad (11.46)$$

En la ecuación 11.46, $\rho v'$ es el flujo másico por unidad de superficie, en la dirección transversal, debido a la fluctuación turbulenta de velocidad en dicha dirección, y $c_p T'$ es el valor instantáneo de la diferencia de contenido de calor por unidad de masa transferido con esa fluctuación de velocidad.

La fluctuación de temperatura ha de ser, conforme a la teoría de la turbulencia libre, producto de la longitud de mezcla y del gradiente de temperatura en la dirección de la fluctuación de velocidad, o sea: $T' \sim l_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ y $v' \sim \mp l_t \frac{\partial u}{\partial y}$, con $l_t = cx$ (Prandtl).

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación 11.46, se obtiene:

$$W \cong \pm c_p \rho g c^2 x^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y} \quad (11.47)$$

donde las derivadas parciales se refieren al valor medio temporal de velocidad y de temperatura en el punto x , W es el flujo de calor por unidad de superficie en $kcal / m^2 \cdot s$, y el signo + corresponde a $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$.

A partir de la ecuación 11.47, se obtiene la ecuación de la capa límite térmica que surge en el borde de un chorro plano-paralelo no isoterma de un fluido incompresible.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \pm c^2 x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (11.48)$$



El mecanismo de difusión de calor en la teoría de la turbulencia de Taylor es el mismo que en la teoría de Prandtl pero, como la longitud de mezcla definida por Taylor es $\sqrt{2}$ veces la definida por Prandtl, la ecuación de transferencia de calor en el modelo de turbulencia de Taylor es:

$$W_T = \pm 2c_p \rho g c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (11.49)$$

En el modelo de turbulencia libre de Reichardt, que introduce la intensidad de turbulencia relacionada con la longitud de mezcla de Prandtl por la ecuación $\epsilon_T = -l \frac{\partial u}{\partial y}$, la ecuación de la intensidad de transferencia de calor se escribe:

$$W_R = c_p \rho g \epsilon_T \frac{\partial T}{\partial y} \quad (11.50)$$

A la vista de estos resultados, cabe concluir que la solución de problemas térmicos en chorros a partir de las teorías de Prandtl y de Reichardt no aporta nada nuevo en comparación con la solución obtenida con la teoría de Taylor.

La teoría de Taylor muestra que la intensidad de transferencia turbulenta de calor es el doble de la cantidad de movimiento, mientras que, en la segunda teoría de Prandtl y en la teoría de Reichardt, queda indeterminada.

Chen y Rodi⁹ hicieron un análisis de semejanza con los datos disponibles de chorros y penachos e introdujeron, en la ecuación de continuidad, en la ecuación de cantidad de movimiento y en la ecuación de temperatura, las siguientes relaciones de semejanza:

$$u = U_m f\left(\frac{y}{y_{1/2}}\right), \quad T - T_a = \Delta T_m \theta\left(\frac{y}{y_{1/2}}\right), \quad v = U_m g\left(\frac{y}{y_{1/2}}\right)$$

$$\overline{u'v'} = U_m^2 \tilde{v}_t \frac{df}{d\eta}, \quad \overline{v'T'} = \Delta T_m U_m \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_t} \frac{d\theta}{d\eta}, \quad \tilde{v}_t = \frac{v_t}{U_m y_{1/2}}$$

donde f, g y θ son funciones solo de la distancia lateral adimensional $\eta = y / y_{1/2}$ y representan el perfil de semejanza de las componentes de velocidad u, v y de la temperatura del fluido a lo largo del eje y , en una sección del chorro en cuyo centro la velocidad axial es U_m .

Para los chorros puros, los citados investigadores obtienen las ecuaciones siguientes, en forma adimensional:

$$\text{Ecuación de cantidad de movimiento} \quad \frac{y_{1/2}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = -\tilde{v}_{tm} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \bigg|_m \quad (11.51)$$

$$\text{Ecuación de temperatura} \quad \frac{y_{1/2}}{\Delta T_m} \frac{d\Delta T_m}{dx} = -\frac{\tilde{v}_t}{\sigma_t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \bigg|_m \quad (11.52)$$

donde σ_t es el número de Prandtl/Schmidt turbulento.



A partir de las ecuaciones 11.51 y 11.52, se encuentran las expresiones que definen la curvatura de los perfiles de velocidad y de temperatura simplemente sustituyendo en ellas la correspondiente forma integral de la cantidad de movimiento.

Para chorros planos, la forma integral de la ecuación de la cantidad de movimiento se escribe:

$$\frac{y_{1/2}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dy_{1/2}}{dx} \quad (11.53)$$

Sustituyendo la ecuación 11.53 en la ecuación 11.51, se obtiene la ecuación que define la curvatura del perfil de velocidad en el eje del chorro:

$$\frac{d^2 f}{d(y / y_{1/2})^2} \Big|_m = \frac{1}{\tilde{\nu}_t} \frac{1}{2} \frac{dy_{1/2}}{dx} \quad (11.54)$$

Aplicando un procedimiento análogo, la ecuación que define la curvatura del perfil de temperatura en el eje del chorro se escribe:

$$\frac{d^2 \theta}{d(y / y_{1/2})^2} = \frac{\sigma_t}{\tilde{\nu}_t} \frac{1}{2} \frac{dy_{1/2}}{dx} \quad (11.55)$$

Para los chorros axisimétricos, sirven las mismas ecuaciones 11.54 y 11.55, simplemente sustituyendo $\frac{1}{2}$ por la unidad.

Como quiera que, en los chorros puros, el número de Prandtl turbulento es inferior a la unidad, la curvatura del perfil de temperatura en el eje del chorro es menor que la del perfil de velocidad, tal como evidencian los resultados experimentales.

11.2.5 Acotaciones sobre el flujo de cortadura en la capa límite de los chorros

Los flujos de cortadura turbulentos que ocurren en ingeniería habitualmente son evolutivos, es decir, en la dirección del flujo, su estructura va cambiando. El cambio se debe, en ocasiones, a influencias externas, tales como gradientes de presión o de temperatura, y otras veces únicamente a influencias evolutivas inherentes a la propia turbulencia. En todos ellos, se cumple $\partial / \partial x \ll \partial / \partial y$ casi por todas partes, lo cual permite simplificar las ecuaciones del movimiento.

Como se ha podido comprobar en los apartados anteriores, el movimiento del fluido en chorros libres sumergidos se caracteriza por dos escalas: la longitudinal L , como distancia desde una sección arbitraria del chorro al origen de su capa límite, y la transversal l , como distancia desde un punto en el chorro, donde la velocidad según la dirección del eje del chorro es la mitad de su valor en este, a dicho eje.

En el análisis de orden de magnitud de los términos de la ecuación del movimiento con dichas escalas, se llega a las relaciones siguientes:

$$\partial u / \partial x = \Delta(U_m / L), \quad \partial u / \partial y = \Delta(U_m / l) \quad \text{y} \quad v = \Delta(U_m l / L)$$

Si se supone que el número de Reynolds $Re_l = ul / \nu$ es suficientemente grande, los términos viscosos de la ecuación del movimiento pueden despreciarse.



Adoptada una escala de velocidad u_t para la turbulencia, todas las tensiones de Reynolds en flujo bidimensional son del orden de magnitud de u_t^2 , lo cual implica¹⁵ que el balance de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección de la corriente necesita otro término del mismo orden que $\overline{\partial u'v'}/\partial y$. Por tanto, se requiere $\frac{\tilde{U}}{u_t} \frac{U_m}{u_t} \frac{l}{L} = \Delta(1)$, donde

\tilde{U} es el valor instantáneo de U_m .

En los chorros y en las capas de mezcla, la condición anterior se satisface poniendo $\tilde{U} = U_m$, de modo que ahora se escribe $u_t/U_m = \Delta(l/L)^{1/2}$. Los valores observados de l/L en los chorros son del orden de $6 \cdot 10^{-2}$.

Esta relación describe chorros y capas de mezcla en que las intensidades de turbulencia son cerca de una mitad de magnitud menor que la velocidad del chorro o del defecto de velocidad en las capas de mezcla.

De cuanto antecede, resulta que la ecuación de cantidad de movimiento en chorros y capas de mezcla bidimensionales se escribe:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = 0 \quad (11.56)$$

La ecuación 11.56 es una aproximación correcta de la cantidad de movimiento si $\left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} Re_t^{-1} \rightarrow 0$.

Como se ha expuesto en un apartado anterior, el tercer término de la ecuación 11.56 es equivalente a $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$, donde $\tau_{xy} = c_1 \rho \nu_t l \frac{\partial u}{\partial y} \cong \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}$, definida ν_t por:

$$\nu_t = c_1 \nu_t l \quad (11.57)$$

O sea, la viscosidad de remolino es del orden de $\nu_t l$ (el valor del coeficiente numérico c_1 es desconocido) y está relacionada con la tensión de Reynolds por unidad de masa

$-\overline{u'v'}$, por la ecuación $-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}$. Por otra parte, la viscosidad de remolino ha sido

definida en términos de la longitud de mezcla de Prandtl por la relación $\nu_t = l_t^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$,

con lo cual el valor de la longitud de mezcla presenta la misma incertidumbre que la viscosidad de remolino.

Los modelos de longitud de mezcla y de viscosidad de remolino deben utilizarse únicamente para generar expresiones analíticas de las tensiones de Reynolds y de los perfiles de velocidad media temporal con los propósitos de ajuste funcional de curvas de propiedades de flujos turbulentos caracterizados por una sola escala de longitud y una simple escala de velocidad.



Algunas aproximaciones a las características de los chorros turbulentos libres sumergidos que pueden utilizarse a efectos prácticos son las siguientes:

(i) Chorros planos

Longitud de mezcla $l_t \cong 0,09l$, $l \equiv$ ancho medio de la capa de cortadura

Variación relativa de la velocidad del fluido a lo largo del eje del chorro $\frac{U_m}{U_0} = 2,7 \left(\frac{x}{h} \right)^{-1/2}$,

donde x es la distancia a lo largo del eje del chorro desde el orificio-ranura cuyo ancho es h . El perfil de velocidad deviene autoconservativo a partir de $\frac{x}{h} > 5$.

Variación de la velocidad a lo largo del ancho del chorro $u = U_m f \left(\frac{y}{l} \right)$.

La función $f \left(\frac{y}{l} \right) = \text{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \left[\frac{y}{l} \right]^2 \right)^{1/2}$ ajusta muy bien los datos experimentales,

excepto cerca de los bordes del chorro, si se toma $l = 0,078x$ y $Re_t = \frac{U_m l}{\nu_t} = 25,7$.

(ii) Chorros axisimétricos

Una buena aproximación de los resultados experimentales se obtiene con las relaciones siguientes:

$$\frac{U_m}{U_0} = 6,4 \frac{D}{x}, \quad l = 0,067x, \quad Re_t = 32$$

El perfil de velocidad deviene autoconservativo a partir de $\frac{x}{D} = 8$.

Las magnitudes características del flujo turbulento evolucionan todavía a una distancia de 40 veces el diámetro del orificio a partir de este.

La consideración de “flujo medio” en los cálculos de ingeniería es un método de aproximación que está lejos de una definición y de una solución global adecuadas al problema de la “turbulencia global”. No obstante, un conocimiento más profundo de la estructura fina del flujo en chorros y penachos requiere la solución aproximada de las ecuaciones de Navier-Stokes por métodos de análisis numérico. Durante décadas, se han presentado y se han desarrollado una gran variedad de modelos sin que se haya llegado a establecer un modelo definitivo.

Los modelos de turbulencia se dividen en tres categorías:

- Modelos de viscosidad de remolino, basados en una relación constitutiva que enlaza el tensor de tensiones de Reynolds, desconocido, con la tasa de deformación del patrón de flujo medio mediante una viscosidad turbulenta. El primer modelo se debe a Bussinesq, cuya mayor limitación es su incapacidad para analizar la estructura anisótropa de la turbulencia. Los modelos más recientes, como el de Launder,¹⁶ que incluyen el análisis completo de las tensiones de Reynolds, se denominan *modelos anisótropos de viscosidad de remolino*.



- Modelos RSM (*Reynolds Stress Models*) y ASM (*Algebraic Stress Models*), que tienen en cuenta la estructura anisótropa de la turbulencia por medio de una expresión completa de las tensiones de Reynolds.
- Modelos basados por completo en las ecuaciones de Reynolds (LES, *Large Eddy Simulation*).
- Modelo DNS (*Direct Numerical Simulation*).

Un tratamiento del tema más extenso queda fuera de los fines de este libro.

11.3 Chorros turbulentos planos de pared

Lauder y Rodi¹⁷ definen los chorros turbulentos planos de pared como un flujo de cortadura dirigido a lo largo de una pared en que, en virtud de la cantidad de movimiento inicial, la velocidad en la dirección de la corriente en cualquier sección interna del flujo de cortadura es mayor que la de la corriente externa.

Son muchas las aplicaciones del chorro de pared en ingeniería. Algunos ejemplos son: el enfriamiento parietal de las paredes de recubrimiento de las cámaras de combustión de las turbinas de gas y de los álabes de las primeras etapas de las turbinas, las salidas de fondo sumergidas de presas con centrales hidráulicas, la ventilación de salas y recintos, etc.

El chorro de pared se considera habitualmente un flujo de cortadura de dos capas en que la capa interna (desde la pared hasta la posición de máxima velocidad y_m) es cualitativamente similar a la capa límite turbulenta convencional, mientras que la capa externa (que se extiende desde y_m hasta el borde exterior de la corriente) se asemeja a la de un chorro libre. Esta configuración del chorro se ilustra en la figura 11.20.

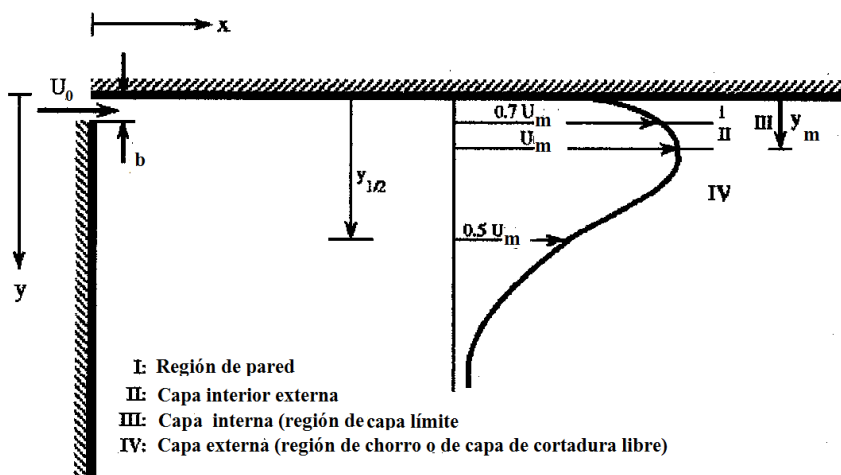


Fig. 11.20.
Esquema de chorro de pared turbulento en sistemas de ventilación^{18, 20}

Barenblatt y otros¹⁸ demuestran, a partir de los resultados experimentales de Karlsson y otros,¹⁹ que las dos capas están separadas por una capa de mezcla en que el fluido alcanza la velocidad máxima. Las leyes de semejanza en ambas capas son sustancialmente



diferentes; ambas exhiben una semejanza incompleta, es decir, una fuerte influencia del ancho de la ranura.

Los chorros de pared turbulentos difieren de los chorros libres debido a los efectos amortiguadores de la pared. Cuando el chorro deja la ranura de descarga, el núcleo potencial acaba en un punto donde la capa límite sobre la superficie encuentra la capa de cortadura que se ha expandido en la frontera libre. El flujo corriente abajo del núcleo queda, entonces, completamente desarrollado.

El conocimiento de la estructura fina del flujo en los chorros turbulentos de pared presenta todavía algunas lagunas, entre las cuales cabe mencionar la medida de la tensión de cortadura en la pared, τ_w , y la falta de datos definitivos sobre $\overline{v^2}$ y $\overline{w^2}$, a pesar de los grandes avances que se han producido en las técnicas de medición.

Desde los años ochenta del siglo XX, cuando Launder y Rodi¹⁷ publican informes que resumen los trabajos publicados sobre el tema, son miles los trabajos que se han publicado al respecto. La recopilación de datos a cargo de dichos investigadores ilustra la magnitud de la dispersión en datos de turbulencia existentes hasta aquella fecha. Además, no se encontraban datos de turbulencia para la región más próxima a la pared.

Como una aproximación al problema, a continuación se expone un breve resumen del nivel de conocimiento teórico y práctico, a principios del siglo XXI:

- La interacción de las dos capas las modifica naturalmente, frente a las de los flujos genéricos.
- La tasa de crecimiento del chorro de pared es considerablemente inferior (-30 %) a la del chorro plano libre.
- La posición de tensión de cortadura cero se desplaza desde la posición de máxima velocidad, donde ocurriría en un chorro libre, hasta la posición cerca de dos tercios de y_m .
- La tensión de cortadura en la región de pared disminuye mucho más rápidamente que en una capa límite.
- Las intensidades de turbulencia son más altas en la capa interna del chorro de la pared, que incluye los valores límite en la pared.

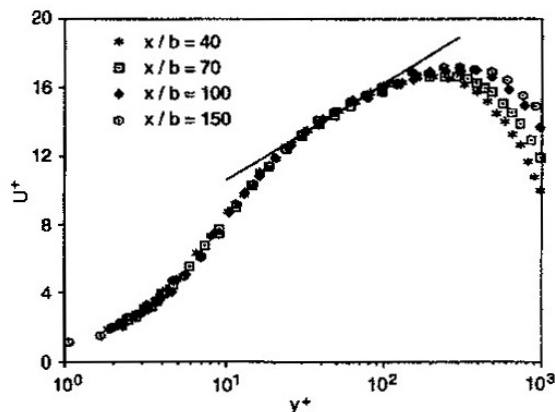
Saber cómo se comporta esta combinación básica de flujo limitado por pared y flujo de cortadura libre, y cómo interactúan las dos capas para determinar el desarrollo del chorro de pared, tiene un indudable interés científico y práctico.

Entre las últimas aportaciones al tema, cabe destacar los trabajos de Erikson,²⁰ George y otros,²¹ y Barenblatt y otros.¹⁸ Entre ellas, cabe resaltar las siguientes.

La figura 11.21 muestra el perfil de velocidades medias, $U^+ = f(y^+)$, en función de $y^+ = yu_* / \nu$ en diferentes posiciones, x/b , a lo largo del chorro desde su origen. El colapso de los perfiles es una evidencia de la fiabilidad de las medidas de tensión de cortadura en la pared.

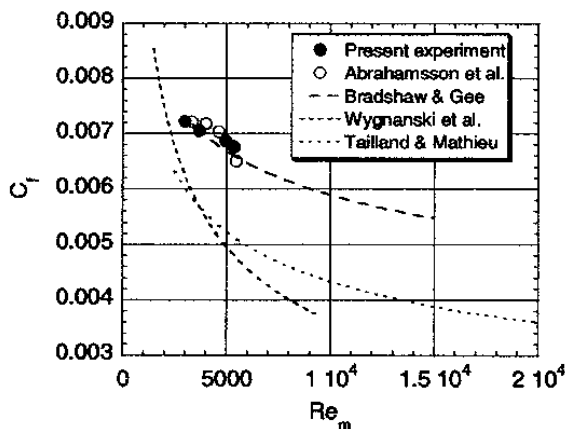


Fig. 11.21.
Perfiles de velocidad
media local
adimensional
 $U^+ = f(y^+)$



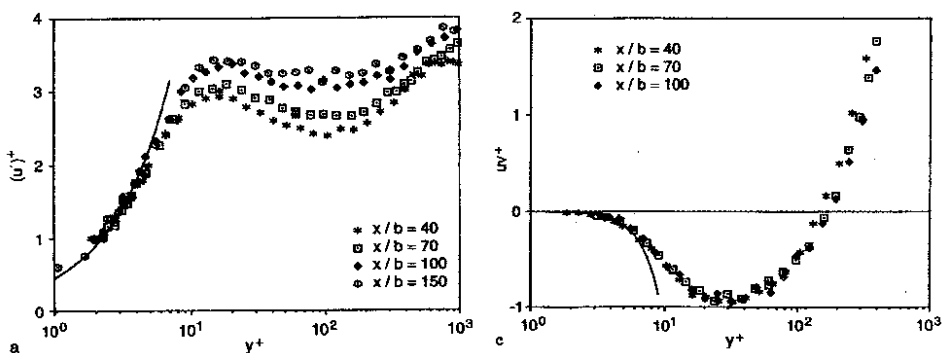
La figura 11.22 muestra el coeficiente de fricción parietal local frente a $Re_m = U_m y_m / \nu$ y su comparación con otras correlaciones propuestas anteriormente por otros investigadores.

Fig. 11.22.
Coeficiente de fricción
parietal¹⁰



En cuanto a las magnitudes de turbulencia, la figura 11.23 muestra que la intensidad adimensional de turbulencia en el sentido de la corriente u^+ depende de la posición con respecto al origen del chorro a partir de $y^+ = 8$, mientras que la tensión de cortadura adimensional uv^+ colapsa hasta $y^+ \approx 100$.

Fig. 11.23.
Intensidad de
turbulencia y
tensión de cortadura
adimensionales en
el sentido de la
corriente¹





Para números de Reynolds finitos, los perfiles de velocidad y tensiones de Reynolds son dependientes de la relación de escalas de la longitud interna y la externa:

$$U / u_* = f_1(y^+, \delta^+), \text{ donde } \delta^+ \equiv y_{1/2}^+ = u_* y_{1/2} / \nu, \text{ o bien } U / U_m = f_0(y, y_{1/2}^+)$$

De hecho, en el límite, hay una región de “solapamiento”, donde ambos perfiles f_1 y f_0 describen el flujo y su forma funcional refleja, a manera de comportamiento de la ley de potencia.

La ley de fricción teórica es también una ley de potencia cuyos coeficientes y exponente dependen del número de Reynolds local $y_{1/2}^+ = y_{1/2} u_* / \nu$. La figura 11.24 ilustra el acuerdo de la ley con los resultados experimentales.

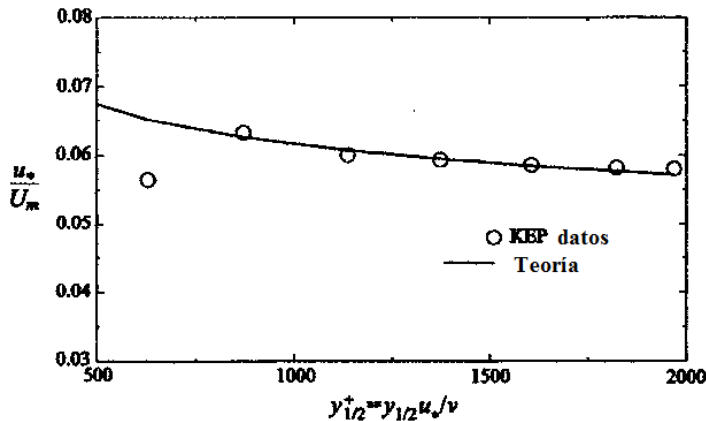
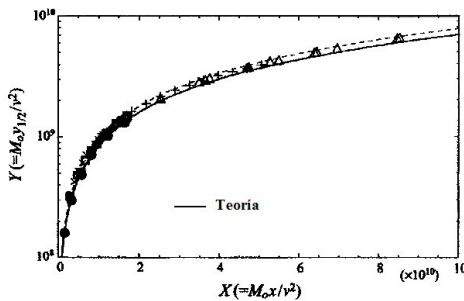
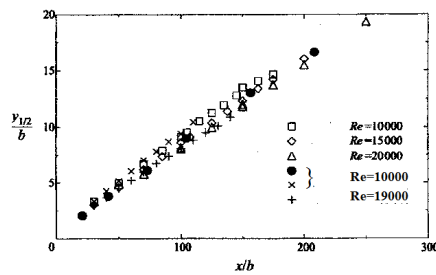


Fig. 11.24. Velocidad de fricción vs. número de Reynolds local. Ley teórica y datos experimentales

La figura 11.25a y 11.25b muestra la variación del ancho mitad adimensional del chorro en función de la distancia adimensional corriente abajo a partir del origen. El acuerdo entre los valores experimentales (Karlsson,¹⁹ Abrahamsson²² y Wygnanski²³) y la teoría es excelente



(a) Normalización tradicional



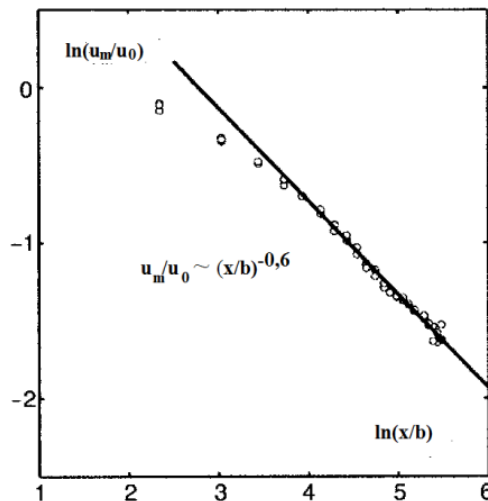
(b) Escalado de la cantidad de movimiento/viscosidad

Fig. 11.25. Variación del ancho mitad en función de la distancia corriente abajo¹



La figura 11.25 muestra la correlación $\ln(u_m/u_0)$ vs. $\ln(x/b)$, realizada por Barenblatt¹⁸ con los datos experimentales de Karlsson,¹⁹ y pone de manifiesto que la semejanza no es completa.

Fig. 11.26.
Los datos
experimentales
 $\ln(u_m/u_0)$ vs.
 $\ln(x/b)$ revelan
semejanza incompleta¹



11.4 Chorro paralelo en una corriente coaxial

Hasta aquí se ha considerado que el chorro, circular o plano, se eyecta en un recinto en que el fluido está en reposo. Como quiera que en no pocas aplicaciones el fluido que ocupa el recinto está en movimiento, es oportuno analizar el flujo resultante. La figura 11.27 ilustra el campo de flujo general. En caso de pequeñas capas límite, a ambos lados de la tobera de inyección del chorro hay una región inicial, antes de que se desarrollen las capas de cortadura a partir de los bordes del chorro emergente sobre el eje, denominada *núcleo potencial*, cuya extensión depende del número de Reynolds del flujo en la salida de la tobera, entre otros factores de menor influencia. Harsha²⁴ propone, para estimar la longitud del núcleo potencial en chorros axisiméricos aire-aire, la siguiente correlación de resultados experimentales, $x_c/d = 2,13Re^{0,097}$, donde Re es el número de Reynolds de la corriente en la sección de salida de tobera.

El análisis del flujo en la región inicial comprende, además de la longitud de esta región, el análisis del flujo en la capa de mezcla en la periferia del núcleo potencial, considerado como una capa de mezcla plana entre dos corrientes infinitas. Ello comporta el análisis del crecimiento del ancho de la zona de mezcla.

Cuando la frontera interna de la zona de mezcla intercepta la línea central del chorro, se supone que la región inicial termina abruptamente.

El análisis se basa en las formas integrales de las ecuaciones del movimiento y en una forma supuesta del perfil de velocidad, que, para un chorro plano, se expresa:

$$\frac{U_\infty - U(x, y)}{U_\infty - U_j} = f\left(\frac{y-h}{b(x)}\right)$$



donde U_∞ , U_j , y , h , $b(x)$ están identificadas en la figura 11.27, y $U(x, y)$ es la velocidad del fluido en un punto de la capa de mezcla de coordenadas x, y . Para los chorros axisimétricos, se utiliza una aproximación similar.

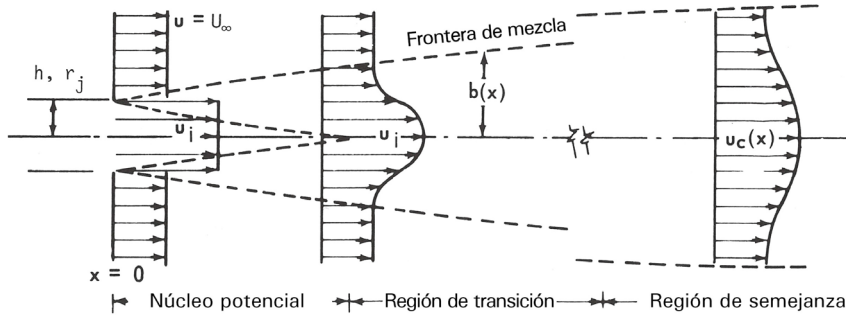


Fig. 11.27.
Esquema de flujo
[Sch80]

La figura 11.28 muestra la predicción analítica de la longitud de la región inicial en función del parámetro $m = U_\infty / U_j$ en el supuesto de que el espesor de la capa límite del flujo en la salida de la tobera sea pequeño, comparado con el ancho mitad de la misma.

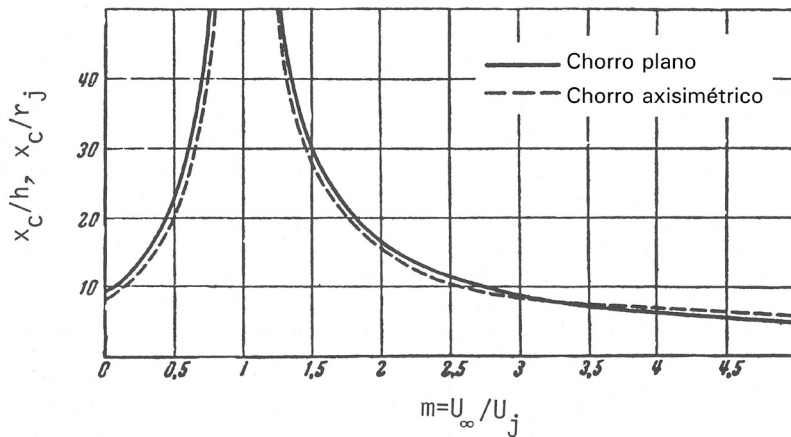


Fig. 11.28.
Predicción analítica de
la longitud de la región
inicial
[Sch80]

En la figura 11.29, se muestra la variación de la velocidad del fluido en la línea central del chorro en términos de $U_\infty / [U_c(x/d) - U_\infty]$ y el ancho característico $r_{1/2}$, o ancho mitad, definido por la relación:

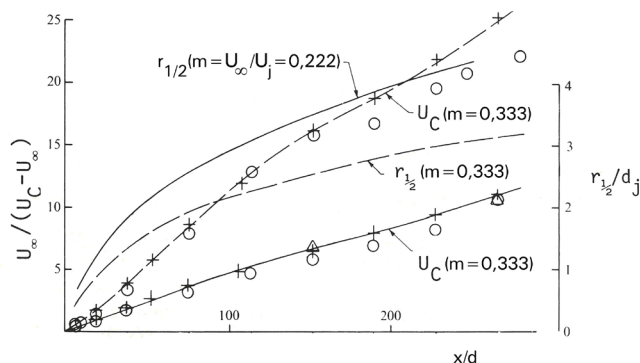
$$U(r_{1/2}, x) = [U_c(x) + U_\infty] / 2$$

en función de la distancia axial adimensional x/d .

La figura también incluye la variación del ancho mitad del chorro en función de dicha distancia.



Fig. 11.29.
Variación de la
velocidad en la línea
central y del radio mitad
en un chorro
axisimétrico²⁵
[Sch80]

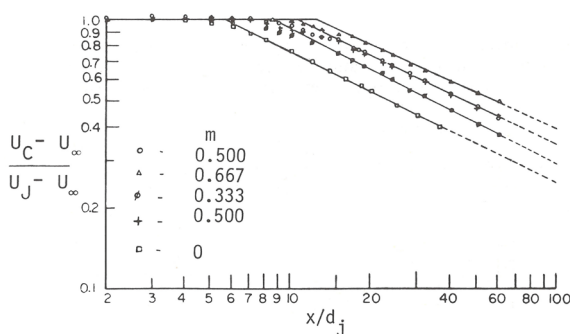


A la vista de los resultados experimentales representados en la figura 11.29, cabe sacar las conclusiones siguientes:

- La influencia del parámetro m sobre el campo de flujo es notable.
- La distancia total en que se alcanza el decaimiento total, $U_c \rightarrow U_\infty$, es muy grande medida en términos de diámetros de chorro.
- En una representación de los perfiles de velocidad adimensional $(U - U_\infty)/(U_c - U_\infty)$ en diferentes posiciones radiales, $r/r_{1/2}$ y varios valores de x/d los datos indican que los perfiles son aparentemente semejantes para $x/d \geq 40$.

En los casos de chorro plano, la figura 11.30 muestra, en representación logarítmica, la variación de la velocidad en la línea central del chorro con la distancia x para varios valores de m . Se observa que, para grandes valores de x/d , el decaimiento de dicha velocidad viene definido por una simple ley de potencia $(x/d)^p$.

Fig. 11.30.
Variación de la
velocidad a lo largo de
la línea central de un
chorro plano²⁶
[Sch80]



Procede ahora recordar que, lejos de la tobera, todos los chorros manifiestan un comportamiento similar, lo cual debe interpretarse en el sentido de que los efectos del inyector no tienen allí importancia. Estos efectos pueden tenerse en cuenta tomando el origen del chorro dentro de la tobera a una distancia x_0 de su salida, que puede ser determinada empíricamente o por escalado de las x , con el espesor de la cantidad de movimiento del flujo en $x = 0$, más bien que con h o r_j .



La figura 11.31a y 11.31b ilustra la unificación de todos los resultados normalizando x y $b_{1/2}$ con dicho espesor θ .

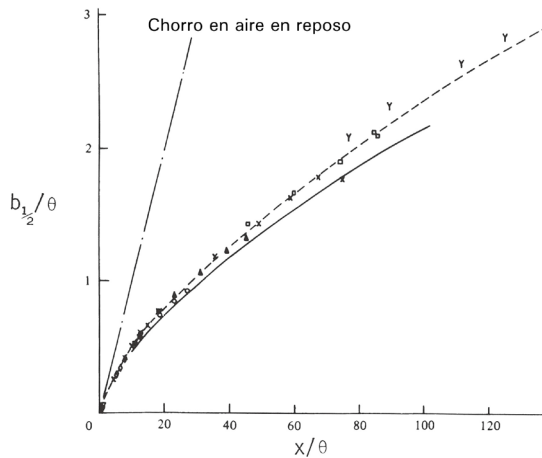


Fig. 11.31a.
Variación del ancho
mitad en la dirección de
la corriente²⁷
[Sch80]

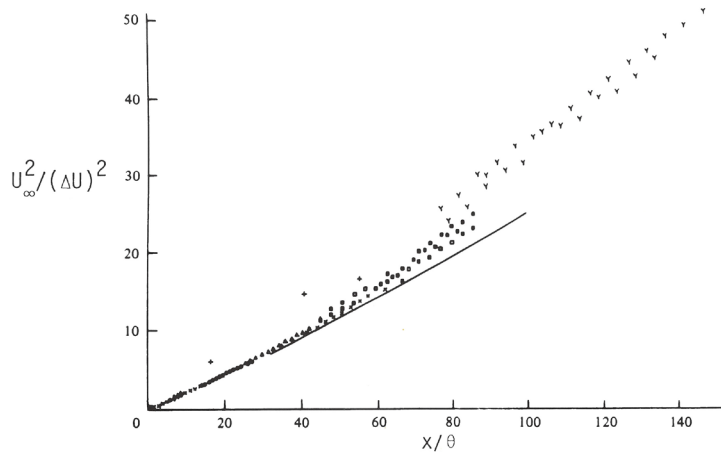
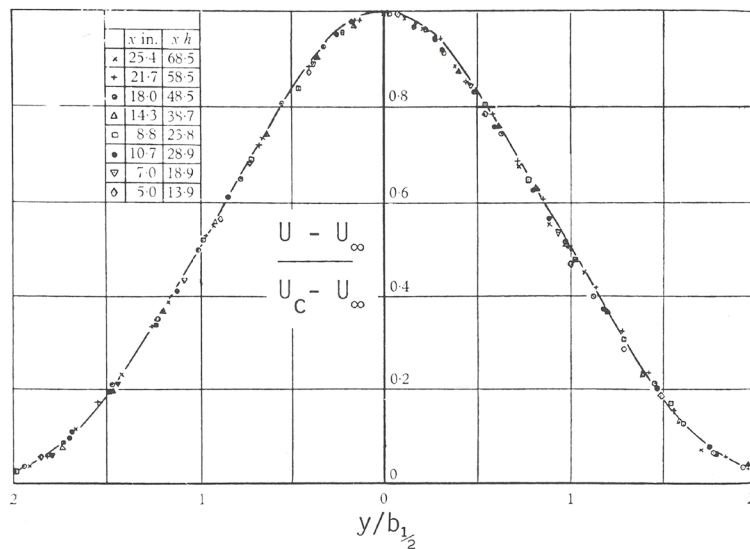


Fig. 11.31b.
Variación de la
velocidad a lo largo de
la línea central de un
chorro plano en la
dirección de la
corriente²⁷
[Sch80]

Los análisis más antiguos y más sencillos del flujo medio se basan en los perfiles de semejanza de la velocidad axial observados, como el que se muestra en la figura 11.32. En los últimos años, se han desarrollado varios métodos aproximados para analizar los problemas de chorro con $U_{\infty} \neq 0$; sin embargo, la disponibilidad de métodos de cálculo y su aplicación por ordenador digital han permitido finalmente obtener soluciones numéricamente “exactas”, si bien su validez está acotada por la del modelo de viscosidad de remolino, de longitud de mezcla, de una, dos o tres ecuaciones, de tensiones de Reynolds o de simulación numérica directa adoptado para el análisis del flujo turbulento.^{28 y 29}



Fig. 11.32.
Representación de
semejanza de perfiles
transversales de
velocidad axial en un
chorro plano³⁰
[Sch80]



(Ver [Sch80])



→ 12



Chorros turbulentos confinados, coaxiales, transversales

12.1 Introducción

En el capítulo anterior, se ha expuesto la teoría de los chorros turbulentos libres, circulares y planos, y la de los parcialmente confinados, de pared. Estos tipos de chorro aseguran la inyección de una corriente de fluido y su mezcla con otro fluido, de naturaleza y estado termodinámico idénticos o diferentes, que ocupa un recinto en estado de reposo. Sus aplicaciones en ingeniería son múltiples y diversas, desde la evacuación de gases contaminantes y su dispersión en la atmósfera (esta función también es desempeñada por los penachos, como se explica en otro capítulo), hasta el enfriamiento o el calentamiento de un sólido por impacto (por ejemplo, la refrigeración de álabes y otros componentes de turbinas de gas), la ventilación por desplazamiento, etc.

En este capítulo, se exponen la teoría básica y las propiedades de chorros turbulentos de distinta configuración, o en condiciones de descarga distintas a las anteriores, como son los chorros anulares, los chorros coaxiales, los chorros transversales inyectados en corrientes de fluido de naturaleza y estado idénticos o distintos, estén o no confinados. En particular, se estudian los tipos de chorros relacionados con técnicas de mezcla de gases reactivos (la combustión) y no reactivos (la dilución y la dispersión de contaminantes, por ejemplo).

Los *chorros confinados* son aquellos cuyo desarrollo-expansión está limitado por contornos impermeables, de modo que su capacidad de arrastre de fluido ambiente-envolvente queda restringida. Este es el caso, por ejemplo, de la combustión en hornos de cemento, donde la corriente de aire ocupa por completo la sección transversal de la cámara de combustión. Con la excepción de los casos ya citados, las corrientes de combustible y de aire, o solo de combustible, introducidas en el dominio (la atmósfera o una cámara) donde se produce la reacción exotérmica que es la combustión, son en forma de chorro no confinado. En estos casos, las cantidades de movimiento del flujo de combustible y de la corriente de aire se utilizan para dirigir la llama y para controlar la mezcla de ambos.



Como resultado de la limitada capacidad de arrastre del chorro confinado, se establece un gradiente de presión adverso a lo largo del mismo, asociado a un flujo de recirculación exterior. La predicción de la velocidad de recirculación y la posición del núcleo del vórtice de recirculación a partir de los parámetros de entrada del sistema de chorro confinado son de suma importancia en la práctica.

Las zonas de recirculación se forman cuando en el flujo el gradiente de presión axial adverso supera la energía cinética del fluido, lo cual da lugar a un punto de remanso. En los chorros anulares no confinados, una manera de conseguirlo consiste en suministrar la corriente de aire con un intenso remolino. Mediante este procedimiento, no solo se logra confinar un núcleo-vórtice de recirculación de gases de combustión con un control efectivo del gas combustible en el interior del cono hueco de combustible líquido atomizado, lo cual contribuye a estabilizar la llama en el quemador, sino que también aumentan la expansión del chorro de aire, y la rapidez y la eficiencia de mezclado, y permite variar la distribución de los tiempos de residencia de los reactantes en la cámara de combustión, lo cual es sumamente importante para optimizar el proceso.

Los otros tipos de chorro enumerados en el encabezamiento de este apartado se distinguen básicamente por las características que se describen a continuación de forma sucinta. Más adelante se ampliarán los conocimientos de sus fundamentos y propiedades.

Los *chorros anulares* sirven frecuentemente para introducir aire secundario alrededor del chorro primario de combustible o que rodea un cañón de fuelóleo situado en el eje del quemador.

Los *chorros concéntricos* son chorros compuestos que consisten en un chorro central y un chorro anular coaxial, que puede activarse por un remolino o no. A una distancia de varios diámetros de tobera corriente abajo del quemador, los dos chorros se combinan, y el comportamiento del chorro compuesto en esta región se puede predecir con una muy buena aproximación a partir de los flujos másicos y de los momentos de chorro combinados. Cerca del quemador, sin embargo, el tamaño y la geometría del interfaz que separa las toberas central y anular tienen una gran influencia sobre el mezclado. Debido a su efecto sobre la estabilidad de la llama, esta región tiene especial interés para los proyectistas de quemadores.

Los *chorros transversales* son aquellos que se inyectan a una corriente principal en dirección distinta de la de esta, o sea, inclinados un cierto ángulo, que puede ser recto. Se aplican con frecuencia como adición de aire secundario o de dilución a la llama.

Puesto que la propiedad fundamental de los chorros turbulentos es su capacidad de mezcla de especies con el fluido en que son inyectados, y de transferencia de energía a dicho fluido o al sólido sobre el cual impactan, independientemente de que el chorro sea libre o confinado como situaciones límite, conviene recordar sus características cinemáticas y dinámicas esenciales:

1. Las regiones totalmente desarrolladas de chorros turbulentos son semejantes y, por consiguiente, las distribuciones de velocidad y de concentración de especies axial y radial son semejantes y pueden describirse mediante las relaciones simples y generales siguientes:

$$\frac{\overline{u_0}}{u_m} = 0,16 \frac{x}{d_0} - 1,5 \quad ; \quad \frac{C_0}{C_m} = 0,22 \frac{x}{d_0} - 1,5 \quad (12.1)$$



La diferencia entre las pendientes de las líneas de velocidad y de concentración se debe a la diferencia de valor de los coeficientes de transferencia turbulenta de cantidad de movimiento y de masa, respectivamente.

- Debido a la semejanza de los perfiles de velocidad, la relación de la velocidad axial en cualquier punto a la que tiene en el eje a la misma distancia axial a partir de la tobera u/u_m es la misma cuando se expresa en función de la distancia adimensional al eje r/x , donde r es la coordenada radial y x es la distancia a partir de la salida de la tobera. También es así para las distribuciones de concentración. Suponiendo una distribución gaussiana, las ecuaciones correspondientes se escriben:

$$\frac{\bar{u}}{u_m} = \exp \left[-k_u \left(\frac{r}{x} \right)^2 \right] ; \quad \frac{C}{C_m} = \exp \left[-k_c \left(\frac{r}{x} \right)^2 \right] \frac{C}{C_m} = \exp \left[-k_c \left(\frac{r}{x} \right)^2 \right] \quad (12.2)$$

- Como consecuencia del intercambio de cantidad de movimiento entre el chorro y el medio ambiente, se arrastra fluido de este a través de las fronteras del chorro. Para un sistema de densidad constante, la masa arrastrada viene dada por:

$$\frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_0} = 0,32 \frac{x}{d_0} \quad \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_0} = 0,32 \frac{x}{d_0} \quad (12.3)$$

y para los sistemas en que la densidad no es constante:

$$\frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_0} = 0,32 \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right) \frac{x}{d_0} - 1 \quad \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_0} = 0,32 \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right) \frac{x}{d_0} - 1 \quad (12.4)$$

- El flujo de cantidad de movimiento por unidad de superficie de un chorro libre se conserva y, si no hay fuerzas externas que actúen sobre él (por ejemplo, cualquier variación de presión en el flujo), la cantidad de movimiento total se conserva en cualquier dirección. Para un chorro libre no afectado por fuerzas externas, el flujo total de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo en la dirección axial se expresa:

$$\dot{G}_x = 2\pi \int_0^\infty \rho \bar{u}^2 r dr \quad (12.5)$$

Las relaciones anteriores se pueden extender a sistemas más complejos utilizando el concepto de diámetro de tobera equivalente. En su forma más simple, este concepto se basa en la conservación del flujo de cantidad de movimiento por unidad de superficie y en que la densidad del fluido dentro del chorro se aproxima a la densidad del fluido ambiente a corta distancia de la salida de la tobera como resultado de la elevada tasa de arrastre.

Por consiguiente, se puede escribir $G_0 = \frac{\pi d_e^2}{4} \rho_a u_0^2$ como expresión del flujo de cantidad de movimiento que emerge de una tobera de diámetro d_e con la misma velocidad inicial pero con la densidad del fluido arrastrado ρ_a , en vez del fluido eyectado

por la tobera ρ_0 . La relación de diámetros es $d_e = d_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_e} \right)$.

Conocidos el flujo másico y el flujo de cantidad de movimiento, se puede calcular el diámetro equivalente de la tobera mediante la expresión:

$$d_e = \frac{2\dot{m}_0}{(G_0\pi\rho_0)} \quad (12.6)$$

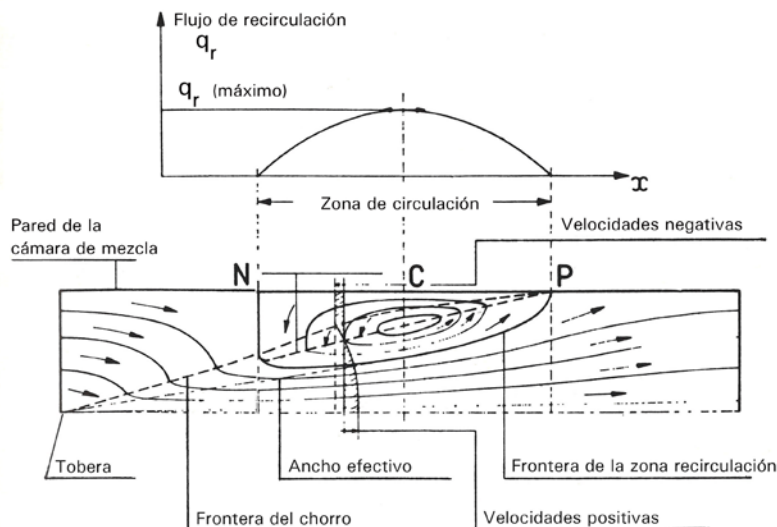
12.2 Chorros confinados

Para un chorro confinado, como es el chorro inyectado en un conducto, cabe considerar dos casos extremos:

1. El flujo secundario que rodea el chorro principal es suficiente para que su arrastre por él no se inhiba hasta que el chorro se haya expandido, alcanzando la pared, y
2. El flujo secundario envolvente es menor que el flujo que el chorro puede arrastrar.

En este segundo caso, se establece un flujo de recirculación, es decir, una parte de las líneas de la corriente principal adquiere la forma de un bucle cerrado, como se muestra en la figura 12.1. Los detalles de este flujo de recirculación son de sumo interés para quienes estudian la combustión, ya que la intensidad y el tamaño del “remolino de recirculación” afectan la estabilidad y la longitud de combustión de las llamas de difusión turbulentas.

Fig. 12.1.
Mapa de la zona de
recirculación de un
chorro axisimétrico
confinado¹ [BCh74]



En la representación esquemática del flujo de recirculación de la figura 12.1, el fluido secundario es arrastrado corriente arriba del punto N, y el remolino de recirculación se extiende desde la frontera corriente abajo, en el punto P, hasta su límite corriente arriba N. La tasa de reflujo, definida como la integral de las velocidades negativas a través de la sección transversal, varía entre estos dos puntos, como se observa en la parte superior de la figura 12.1. Su valor q_r alcanza un máximo en la sección transversal C, entre dos valores cero en los puntos N y C.



12.2.1 Teorías de Thring-Newby y de Craya-Curtet

Teoría de Thring-Newby

Thring y Newby¹ propusieron un tratamiento teórico simple del problema, basándose en los supuestos de que la tasa de arrastre del chorro no es afectada por el recinto y que el desarrollo del chorro viene determinado por su flujo de cantidad de movimiento. Craya y Curtet² y Barchillon y Curtet³ ampliaron el modelo teórico, con el propósito de generalizar su validez; no obstante, las simples generalizaciones formuladas por Thring y Newby todavía son aplicables a un amplio campo de casos prácticos, pues suponen una buena aproximación a los resultados experimentales cuando el diámetro de la tobera es menor que 1/10 del diámetro del conducto.

Algunos investigadores han utilizado la ecuación 12.4 de Ricou y Spalding⁴ para calcular la distancia desde el origen del chorro hasta el punto P, donde el chorro alcanza la pared.

Suponiendo un ángulo de chorro α de $9,7^\circ$, se obtiene $X_p = 5,85R$, donde R es el radio del conducto.

Para el caso $\dot{m}_e = \dot{m}_r$, el fluido arrastrado entre la tobera y el punto C viene dado por:

$$\frac{\dot{m}_e}{\dot{m}_0} = \frac{0,47}{\theta} - 0,5 \quad (12.7)$$

$$\text{donde } \theta = \frac{d_0}{2R} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right).$$

En caso de que el chorro arrastre todo el flujo secundario antes de que se inicie la recirculación, entonces $\dot{m}_e = \dot{m}_a + \dot{m}_r$ y la proporción del flujo másico recirculado se expresa como:

$$\frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_0 + \dot{m}_a} \quad (12.8)$$

y el parámetro modificado de Thring y Newby se escribe:

$$\theta' = \frac{\dot{m}_a + \dot{m}_0}{\dot{m}_0} \frac{d_0}{2R} \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} \right) \quad (12.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones 12.6 y 12.7 en la ecuación 12.8, resulta:

$$\frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_0 + \dot{m}_a} = \frac{0,47}{\theta'} - 0,5 \quad (12.10)$$

Las ecuaciones 12.7, 12.8 y 12.9 dan la posición de los puntos N y C en la figura 12.1, cuyas expresiones son $X_N = 6,25.\theta'R$ y $X_C = 3,12(\theta' + 0,94)R$, respectivamente.

Field y otros⁵ ilustran, en las figuras 12.2 y 12.3 [BCh74], el flujo másico máximo de recirculación $\dot{m}_r / (\dot{m}_0 + \dot{m}_a)$ y la posición del remolino de recirculación en un chorro confinado, en función del criterio de semejanza θ , de Thring-Newby, y el de Craya-Curtet m , respectivamente.



Teoría aproximada de Craya-Curtet del chorro confinado

Craya y Curtet² desarrollaron una teoría aproximada del chorro confinado, basándose en las ecuaciones de Reynolds y de continuidad, y en las siguientes hipótesis:

Para la segunda ecuación de Reynolds, es válida la aproximación de la capa límite que da un término constante $p + \overline{\rho v'^2}$ a través del chorro. Los términos de aceleración y de variación de la tensión de cortadura longitudinal son despreciables.

Los términos de fluctuación en la primera ecuación de Reynolds son despreciables.

3. Semejanza del perfil de exceso de velocidad normalizado: $\Delta u = u - u_s$
4. En el flujo ambiente, no se produce pérdida de energía, lo cual equivale a admitir un nivel de turbulencia bajo en la corriente secundaria.

La semejanza del perfil de exceso de velocidad se expresa:

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = f\left(\frac{y}{l}\right) \quad (12.11)$$

donde $\Delta u_m = u_m - u_s$, o sea, la diferencia entre la velocidad en el eje del chorro y la velocidad de la corriente secundaria en la misma sección de flujo, y l es un ancho de referencia que depende de la distancia axial x y su variación expresa el desarrollo del chorro, definido por la expresión:

$$\pi l^2 \Delta u_m = \dot{q} = \int_0^b 2\pi y \Delta u dy \quad (12.12)$$

donde \dot{q} es el caudal exceso de chorro-corriente secundaria y b es el radio en la frontera del chorro, donde $\Delta u = 0$.

La ecuación de continuidad para el flujo total en el conducto se escribe:

$$\dot{Q} = \pi \Delta u_m l^2 + \pi u_s R^2 \quad (12.13)$$

donde R es el radio del conducto.

La teoría de Craya-Curtet conduce a tres relaciones adimensionales, que sirven para caracterizar los chorros confinados: la ecuación de continuidad; la ecuación de cantidad de movimiento, que define el parámetro constante m a lo largo del conducto (conocido como parámetro de Craya-Curtet), y la ecuación del momento de la cantidad de movimiento.

De las tres, la más importante para los fines de este libro es la segunda, que se escribe:

$$m = \lambda^2 \left[\Delta U_m + \Delta U_m^2 \left(k - \frac{3}{2} \lambda^2 \right) \right] \quad (12.14)$$

donde k es un factor de forma para el perfil de exceso de velocidad y λ es la inversa del radio del conducto.

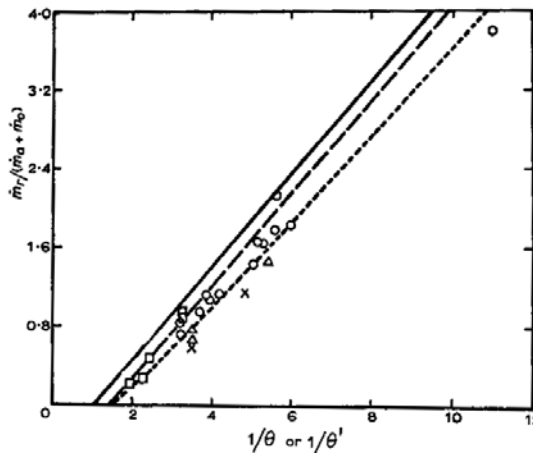


Fig. 12.2.
Chorro confinado
máxima recirculación
[BCh74]

- Teoría de Curtet (1958)
- Ecuación $\frac{m_r}{m_o + m_a} = \frac{0,47'}{\theta'} - 0,5$
- Línea que representa los valores experimentales de Blecker, Hottel y Williams (1963)
- Experimentos en Sogreah
- △ Hogar caliente, Ijmunden
- × Modelo frío, Ijmunden
- Modelo frío, BCUA – Winfield and Martin, 1966
- } Barchilon and Curtet, 1964

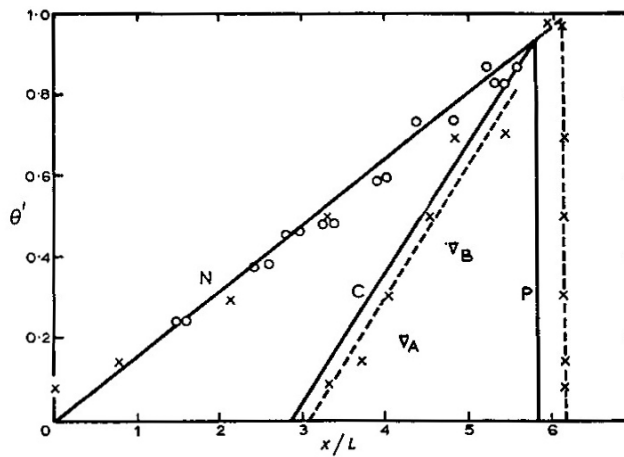


Fig. 12.3.
Posición del remolino
de recirculación en
chorro confinado

- × Puntos derivados de medidas de velocidad
- Media de 20 fotografías
- ▽_A Hogar IFRF, Ijmuiden, quemador tipo caldera
- ▽_B Hogar IFRF, Ijmuiden, quemador tipo horno de cemento
- N Inicio de arrastre de reticulación
- C Núcleo y remolino de reticulación
- P Situación del impacto del chorro en la pared
- } Barchilon and Curtet, 1964



El parámetro de semejanza m puede expresarse también de otra manera, como resultado de aplicar el teorema de Euler a una superficie que incluye el conducto y dos secciones transversales S . Despreciando los términos de fluctuación, se obtiene la expresión siguiente:

$$m = \frac{1}{U^2 S} \iint_s \left(\frac{p}{\rho} + U^2 \right) dS - \frac{1}{2} \quad (12.15)$$

Para el caso simple de una pequeña relación diámetro de tobera-diámetro de conducto, las condiciones de mezcla se pueden dar como una función solo de m .

Fig. 12.4.
Ancho efectivo teórico
adimensional relativo y
parámetro m

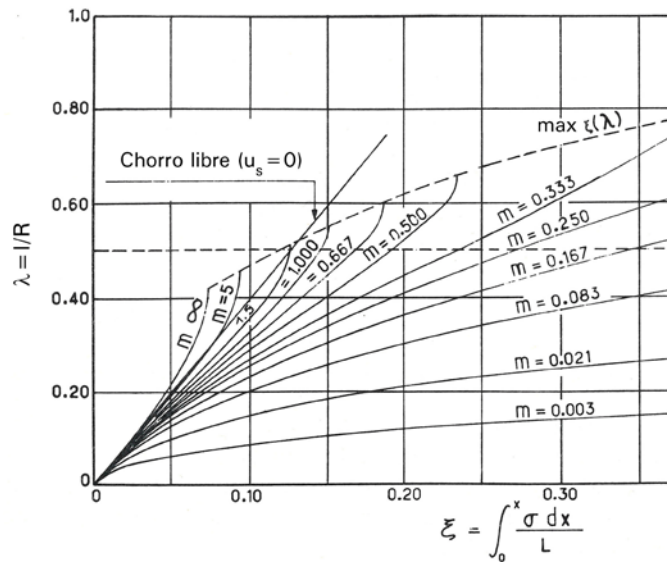
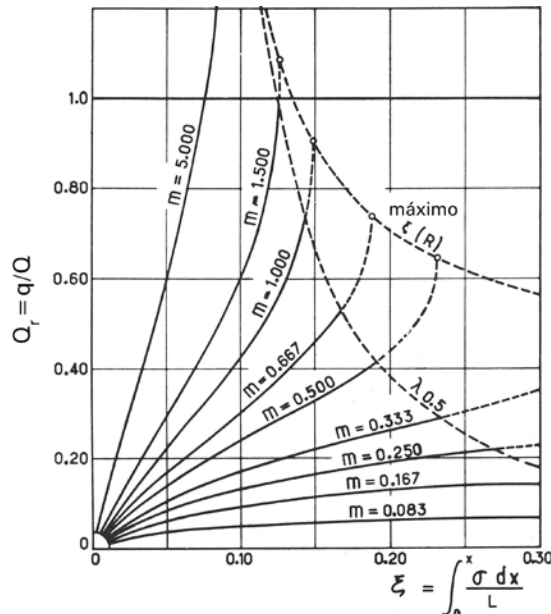


Fig. 12.5.
Caudal teórico
adimensional vs
abscisa relativa y
parámetro m .





Las figuras 12.4 y 12.5 [Bch74] muestran las soluciones del sistema de ecuaciones adimensionales en la forma de curvas $\lambda(\xi, m)$ y $R(\xi, m)$. Las figuras 12.6 y 12.7 muestran la comparación de los caudales de recirculación medidos y calculados en función de la distancia a lo largo del conducto y del parámetro de semejanza m .

Comparación de las teorías de Thring-Newby y Craya-Curtet

La teoría de Thring-Newby se basa en simples relaciones de comportamiento físico de chorros libres y confinados en conductos, y supone que todos los chorros de turbulencia libre son dinámicamente semejantes y que las funciones de desarrollo radial del chorro, $C/C_m = f_1(\eta)$ y $u/u_m = f_2(\eta)$, $\eta = y/L$, dependen solo del número de Reynolds en un punto característico. La cantidad de movimiento se conserva y el flujo másico de tobera también.

La teoría de Craya-Curtet es más rigurosa y de validez más general, pues permite predicciones más detalladas de las condiciones de flujo que la teoría de Thring-Newby; sin embargo, tiene la desventaja de que es matemáticamente más compleja, aunque requiere mucho menos tiempo de computación que los nuevos métodos de zona o de integración de las ecuaciones por diferencias finitas.

Desde el punto de vista del diseño de los sistemas de combustión, el criterio de Thring-Newby aventaja el de Craya-Curtet.

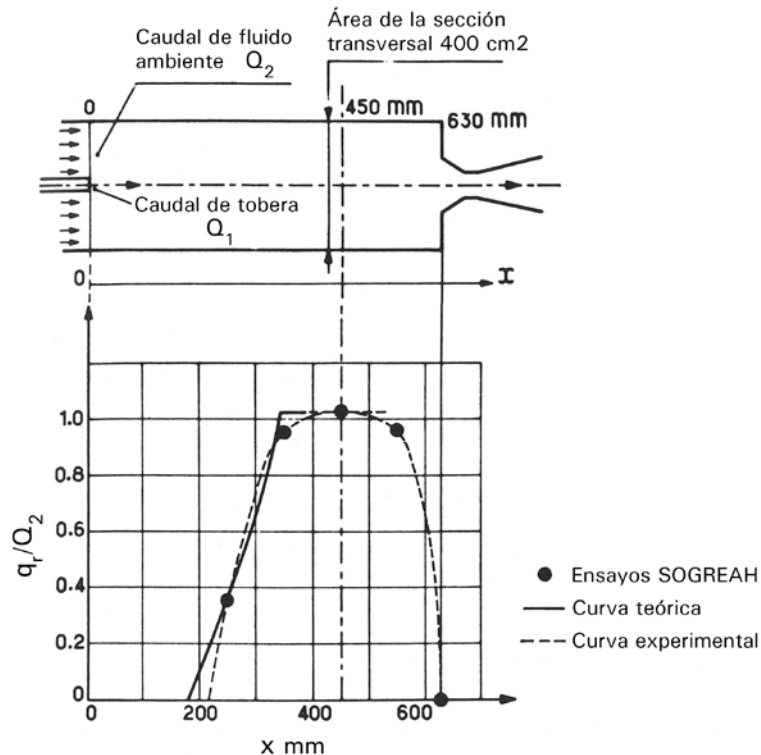


Fig. 12.6. Variación del caudal de conducto recirculación a lo largo del conducto



12.2.2 Caso general de chorros de la misma dirección de corriente confinados

Muchos problemas prácticos de mezcla de fluidos comportan la inyección de un chorro en una corriente de otro fluido, o del mismo en diferente estado termodinámico, confinada en un tubo. El resultado de esta inyección no solo es la mezcla de ambos fluidos, sino también la generación de un gradiente de presión axial que está íntimamente acoplado al proceso de mezcla. El gradiente de presión adverso producido, $dP/dx > 0$, puede dar lugar a una reordenación del flujo, si es lo suficientemente intenso.

En este subapartado, se exponen los conocimientos básicos del fenómeno de inyección de un chorro axisimétrico, de velocidad media en la descarga U_j , en la dirección axial de un tubo cilíndrico por el cual circula una corriente coaxial cuya velocidad media en la estación de inyección es U_a .

Si hay un gradiente de presión estática axial, la velocidad del fluido que rodea el chorro variará a lo largo del tubo, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli (se supone que, en dicha corriente, los efectos de viscosidad son despreciables).

Si $U_a(x)$ es la velocidad de la corriente envolvente del chorro, entonces se ha de cumplir:

$$U_a(x) \frac{dU_a(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (12.16)$$

Si $dP/dx > 0$, entonces $dU_a/dx < 0$, por lo cual es posible reducir $U_a(x) \rightarrow 0$ mediante un gradiente de presión que, si es muy intenso, puede dar lugar a un flujo “estancado” y a la consiguiente zona amplia de recirculación en el tubo, como ya se ha expuesto en el subapartado anterior.

La tendencia a la recirculación puede ser descrita por el valor de simples parámetros que implican el flujo másico total en el conducto, \dot{m} , y la integral de presión-cantidad de

movimiento, M , definidas como $\dot{m} = \iint \rho U dA$, $M = \iint (P + \rho U^2) dA$. De entre ellos, cabe destacar H , M y Ct . Una expresión que los relaciona para el caso de un chorro confinado axisimétrico en un conducto de radio R_0 es:

$$H \equiv \frac{\dot{m}}{\sqrt{2\pi(M/\rho)R_0}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(M/\rho)}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+2/Ct^2}} \quad (12.17)$$

El parámetro Ct es conocido como el número de Craya-Curtet,² reconocido como parámetro universal para los sistemas de chorro confinado. En caso de chorro axisimétrico, se expresa:

$$Ct = \frac{U_m}{\left[(U_j^2 - U_a^2) \left(\frac{r_j}{R_0} \right)^2 + 0,5 (U_a^2 - U_m^2) \right]} \quad (12.18)$$

donde:

$$U_m = (U_j - U_a) \left(\frac{r_j}{R_0} \right)^2 + U_a \quad (12.19)$$



es la velocidad media en el tubo de mezcla; U_a es la velocidad de la corriente circundante en la entrada; r_j es el radio de tobera, y R_0 es el radio del tubo.

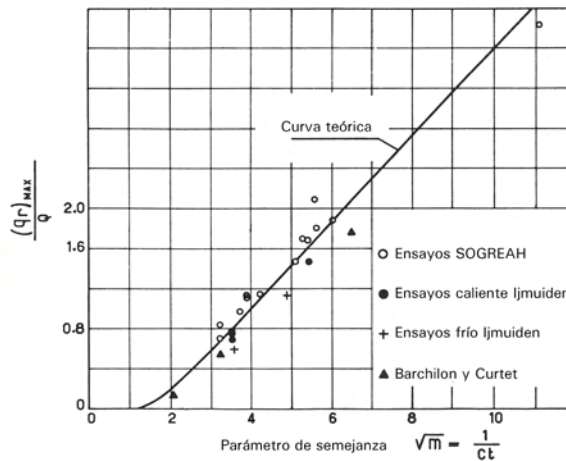


Fig. 12.7.
Máximo caudal de
recirculación vs $m^{1/2}$

Desde un punto de vista físico, los valores grandes o pequeños de Ct corresponden a excesos pequeños o grandes de cantidad de movimiento en la entrada, respectivamente. Becker, Hottel y Williams⁶ sugieren que la aparición de la recirculación está limitada a $Ct < 0,85$. Barchilon y Curtet³ midieron las velocidades medias, la variación de la presión estática en la pared y el tamaño de la zona de recirculación para flujo de agua, y los valores “rms” de las fluctuaciones de velocidad axial en flujo de aire. En la figura 12.8, se muestran varias configuraciones de flujo en el tubo de mezcla, en función del valor del parámetro C_t de Craya-Curtet.²

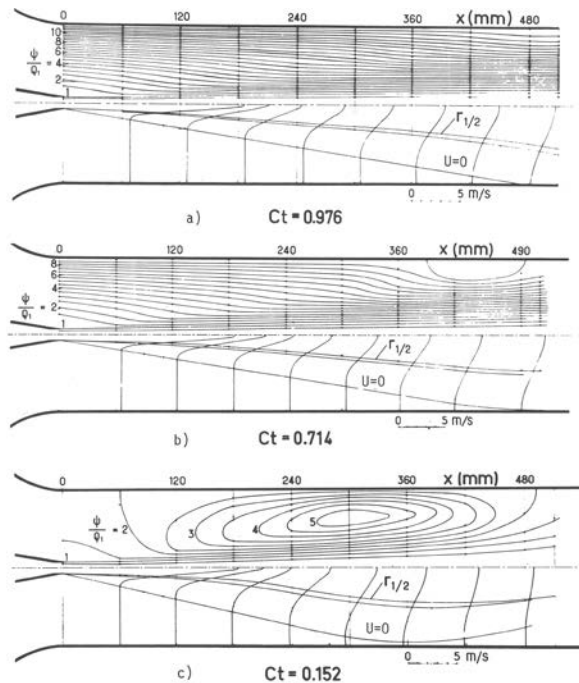


Fig. 12.8.
Patrones de líneas de
corriente en un
conducto cilíndrico con
un chorro central
confinado³ [Sch80]



En la práctica, se han de evitar las zonas de recirculación, pues únicamente los datos de mezcla por chorro confinado sin recirculación tienen interés, particularmente en aquellas condiciones donde el flujo permanece “semejante”, incluso en presencia de un gradiente de presión axial. La condición es que $U_a(x)/[U_c(x)-U_a(x)]$ se mantenga constante a lo largo del conducto.

Becker, Hottel y Williams utilizan la velocidad media del chorro:

$$u_k = -(1/A_0) \int_0^{r_{w/2}} \hat{n} \bar{u} dA_0 \quad (12.20)$$

denominada *velocidad media cinemática*, y la velocidad media dinámica:

$$u_d^2 = -(1/A_0) \left| \int_{A_0} \left(\hat{n} \bar{u} \bar{u} - \frac{1}{2} \overline{u_{f0} u_{f0}} \hat{n} \right) dA_0 \right|, \quad (12.21)$$

ambas definidas en la salida de tobera, entendiendo por *velocidad media dinámica* la velocidad uniforme de entrada que produce una fuerza igual al exceso del verdadero empuje de la corriente en A_0 sobre la fuerza del área-presión de remanso de la corriente inducida, denotada por el subíndice f_0 , para concluir que la semejanza depende únicamente de la relación característica de velocidades u_k/u_d .

El parámetro de semejanza de chorro confinado m , derivado por Craya-Curtet, es una función única de u_k/u_d :

$$m = \left(u_d^2 - \frac{1}{2} u_k^2 \right) / u_k^2 \quad (12.22)$$

La diferencia $u_d^2 - \frac{1}{2} u_k^2$ es una medida de la irregularidad de la distribución de flujo de cantidad de movimiento en la entrada del sistema, y es cero para una distribución uniforme.

Sea $u_0^* = \sqrt{\left(u_d^2 - \frac{1}{2} u_k^2 \right)}$ la velocidad característica del sistema que, según el estudio de

Becker, Hottel y Williams,⁶ es la velocidad de normalización que minimiza la dependencia del campo de velocidad normalizada con respecto al criterio de semejanza; entonces, la forma más eficaz del criterio de semejanza en sí mismo es $u_k/u_0^* = 1/\sqrt{m}$, que se denomina *número de Craya-Curtet* y se denota Ct en reconocimiento a dichos investigadores.

El significado físico de Ct se aprecia fácilmente como criterio de régimen de flujo de chorro axisimétrico confinado en conducto cilíndrico. Para chorros de “fuente puntual”, se tiene:

$$u_d^2 = (i_s / \pi \rho r_w^2) + \frac{1}{2} u_{f0}^2 \quad (12.23)$$



donde i_s es el flujo fuente de cantidad de movimiento axial y r_w es el radio interior del tubo.

Sustituyendo la expresión (12.23) en la que define el número de Craya-Curtet, se obtiene:

$$Ct = \frac{u_k}{\sqrt{\left(i_s / \pi \rho r_w^2\right) + \frac{1}{2} u_{f0}^2 - \frac{1}{2} u_k^2}} \quad (12.24)$$

Para un recinto cilíndrico, u_k es la velocidad media en el espacio. Por otra parte, con fuentes finitas, se han de tener en cuenta las características de la fuente. Para una tobera circular ideal, la distribución de velocidad inicial es:

$$u = u_{f0}, \text{ en } r_s < r < r_w; \quad u = u_s \text{ en } 0 \leq r < r_w, \quad 0 \leq r < r_w$$

donde u_s es la velocidad uniforme en la tobera.

Por tanto:

$$Ct = \frac{u_k}{\sqrt{\left(u_s^2 - u_{f0}^2\right)\left(r_s^2 / r_w^2\right) + \frac{1}{2} u_{f0}^2 - \frac{1}{2} u_k^2}} \quad (12.25)$$

y:

$$u_k = \left(u_s - u_{f0}\right)\left(r_s^2 / r_w^2\right) + u_{f0} \quad (12.26)$$

Para flujos de tipo chorro, $0 \leq u_{f0} < u_s$ y Ct se encuentra en el intervalo:

$$\left(r_s / r_w\right)\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{r_w^2}\right) \leq Ct < \infty \quad (12.27)$$

12.2.3 Resultados experimentales de Becker, Hottel y Williams

Campos de velocidad. Perfiles de distribución de velocidad

El campo de velocidad en la zona de mezcla por chorro tiene ciertas características bien definidas. El flujo en el conducto considerarse la superposición de una “corriente de chorro” con un perfil de velocidad radial de tipo campana de Gauss a una “corriente de base” lateralmente uniforme. La parte de la corriente de base entre el borde del chorro y la pared del conducto se denomina *corriente libre*. La corriente uniforme suministrada al conducto en la entrada se denomina *corriente de base libre* (v. figura 12.9).

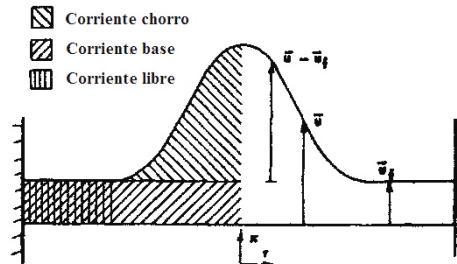
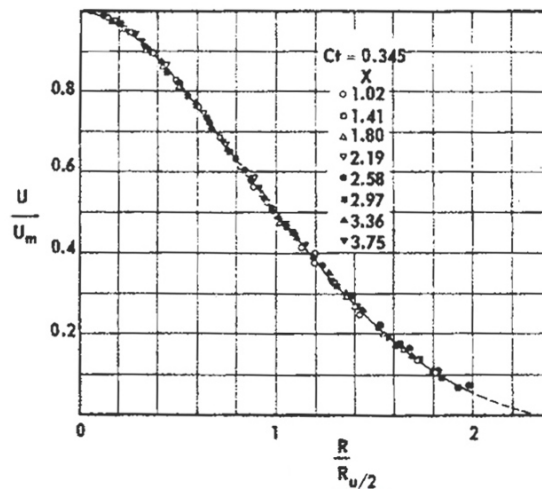


Fig. 12.9.

La corriente de chorro crece hasta que alcanza la pared del conducto allí donde la corriente libre se desvanece y cesa el arrastre; por consiguiente, un chorro confinado tiene una capacidad de arrastre finita.

La denominada *velocidad de acción del chorro* $\bar{u} - \bar{u}_f$ es el exceso de la componente axial media de velocidad dentro del chorro con respecto al valor \bar{u}_f en la corriente libre fuera de él. En una posición axial dada, la velocidad de acción de chorro se caracteriza por su máximo radial $\bar{u}_m - \bar{u}_f$, que ocurre en el eje de simetría del chorro. El confin radial del chorro se caracteriza por el radio $r_{u/2}$, donde $\bar{u} - \bar{u}_f = \frac{1}{2}(\bar{u}_m - \bar{u}_f)$. Por consiguiente, el perfil radial de velocidad de acción del chorro puede representarse mediante la forma normalizada $U/U_m = f(R/R_{u/2})$, donde $U/U_m = (\bar{u} - \bar{u}_f)/(\bar{u}_m - \bar{u}_f)$, y $R/R_{u/2} = r/r_{u/2}$

Fig. 12.10.
Perfil radial de la
velocidad de acción de
chorro en $Ct=0,345$



El desarrollo total del chorro se alcanza a la distancia de ocho diámetros de la tobera corriente abajo de su salida. Más allá, y dentro de la zona de mezcla del chorro, el perfil normalizado de la velocidad media de acción del chorro es esencialmente autosemejante (v. figura 12.10).

Radialmente, el chorro completamente desarrollado se divide en dos zonas: el núcleo completamente turbulento y el anillo envolvente.

La primera zona se extiende hasta, aproximadamente, $R = R_{u/2}$.

En su interior, el perfil de distribución de velocidad tiene una forma universal, invariante con el número de Craya-Curtet en el intervalo experimental $0 < Ct < 1,2$ idéntico para chorros confinados y chorros libres.



La segunda zona, que se extiende desde $R = R_{u/2}$ hasta $R = 2,3R_{u/2}$, es un anillo turbulento cuyas características varían con el número de Craya-Curtet, y la distribución de velocidad en él difiere de la de los chorros libres. En las zonas sin recirculación, este anillo es una región de turbulencia intermitente.

Las distribuciones de velocidad del flujo confinado en el conducto, determinadas experimentalmente, se ajustan mediante las expresiones siguientes:

1. Hasta aproximadamente $R = 1,2R_{u/2}$, se tiene:

$$U / U_m = \exp \left\{ -(\ln 2) \left(R / R_{u/2} \right)^a \right\} \quad (12.28)$$

donde el valor del exponente a varía entre 1,79 y 1,86 (el valor medio 1,82 es óptimo para representar todos los valores experimentales mediante una aproximación excelente).

2. En el anillo variablemente turbulento, la distribución de velocidad en el chorro confinado depende de Ct . En $R > R_{u/2}$ y en regímenes con poca o nula recirculación ($Ct >$), los resultados experimentales están bien representados por la relación:

$$U / U_m = \left\{ 1 - \left(1 - 2^{-} \right) \left(R / R_{u/2} \right)^b \right\}^2 \quad (12.29)$$

3. Los valores de b se encuentran entre 1,45 y 1,55.
4. En la región de inflexión del perfil de velocidad, la relación entre U y R es esencialmente lineal en un intervalo $0,6 < R / R_{u/2} < 1,1$ o superior.

En la figura 12.11, se muestran los valores del factor de forma del perfil de velocidad η_1 , de cantidad de movimiento η_2 y de energía η_3 , en función del número de Craya-Curtet. Así, por ejemplo, el perfil de velocidad se define: $U / U_m = f(\eta_1)$, con $\eta_1 = (R_1 / R_{u/2})^2$.

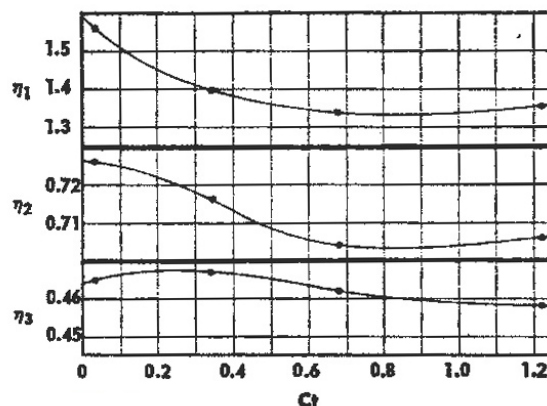


Fig. 12.11.



Para $Ct = 2,77$, Curtet y Ricou proponen los valores siguientes: $\eta_1 = 1,25$ $\eta_2 = 0,68$; $\eta_3 = 0,455$

Crecimiento radial del chorro

Al analizar el comportamiento del chorro, es conveniente seleccionar un radio de chorro característico como primario y sustituir todos los demás (radio de flujo-volumen, radio de flujo-cantidad de movimiento, radio de flujo-energía cinética, etc.) por él, multiplicado por un factor de proporcionalidad adecuado. Para el estudio del fenómeno que nos ocupa, el radio de chorro característico primario seleccionado es el radio de velocidad mitad $r_{u/2}$. Su valor, en función de la distancia corriente abajo normalizada $X = x / r_w$, y con Ct como parámetro, se muestra en la figura 12.12. El crecimiento radial para $Ct = 0,673$ se expresa:

$$R_{u/2} = 0,084X \quad (12.30)$$

Cerca de la fuente del chorro, allí donde $U_m \gg U_f$, el crecimiento radial de un chorro confinado se aproxima asintóticamente al del chorro libre sumergido (fluido externo en reposo). En la región de flujos con recirculación ($0 < Ct < 0,7$), se ha encontrado que los valores del radio de velocidad mitad se ajustan bien mediante la ecuación:

$$R_{u/2} = 0,084X \left\{ 1 + (X / X_r)^{5/3} \right\} \quad (12.31)$$

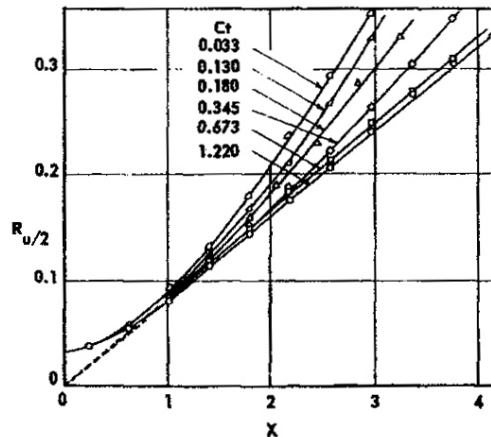
donde:

$$X_r = 4,07 \exp(3,54Ct) \quad (12.32)$$

Decaimiento axial de la velocidad de acción de chorro

El único valor característico lógico de la velocidad de acción del chorro es $\overline{u_m} - \overline{u_f}$. La figura 12.13 muestra la inversa del valor normalizado de $\overline{u_m} - \overline{u_f}$ ($U_m = (\overline{u_m} - \overline{u_f}) / u_0^*$), en función de la distancia corriente abajo normalizada X , con Ct como parámetro.

Fig. 12.12.
Crecimiento axial del
radio velocidad mitad



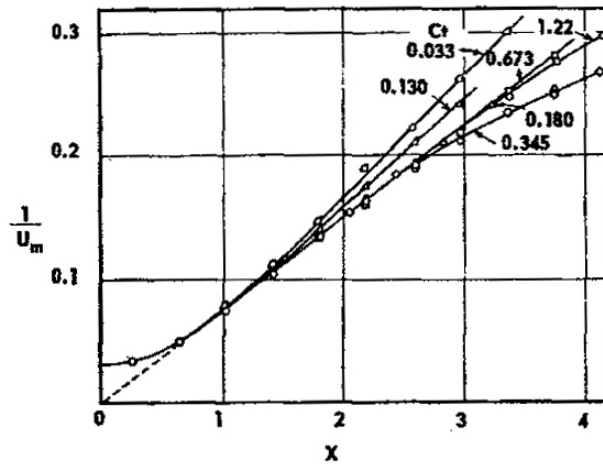


Fig. 12.13.
Decaimiento axial del
máximo radial de la
velocidad de acción de
chorro

$$\frac{\overline{u_m} - \overline{u_f}}{U_m} \left(U_m = (\overline{u_m} - \overline{u_f}) / u_0^* \right) X Ct$$

Una buena correlación de los resultados experimentales es la siguiente:

$$1/U_m = 0,0725 X \left\{ 1 + (X/X_u)^{5/3} \right\} \quad (12.33)$$

donde:

$$X_u = 5,95 \exp(3,54 Ct) \quad (12.34)$$

El intervalo total de validez de la ecuación 12.25 es $0 < Ct < 5$, incluidos los resultados experimentales de Craya-Curtet.

Efecto del número de Reynolds del chorro

Spalding y Ricou⁴ estudiaron la ley de arrastre del chorro libre emergente en una corriente libre estancada. A números de Reynolds suficientemente altos, la tasa de arrastre era constante. La figura 12.14 muestra que el efecto del número de Reynolds decae a un valor insignificante para $Re_s = 30.000$.

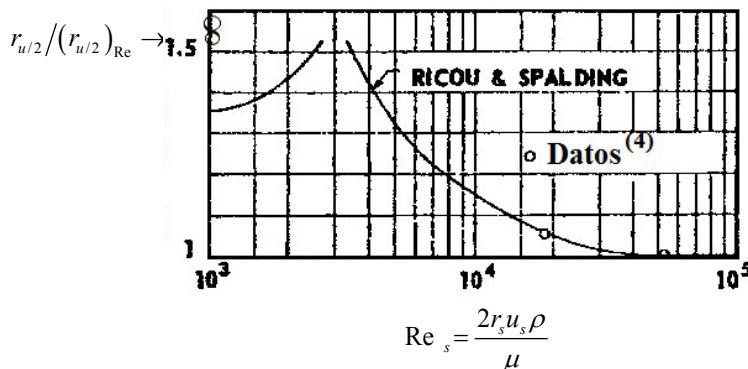


Fig. 12.14.
Dependencia de Re del
radio velocidad media

**Variación axial de la velocidad de la corriente libre**

Dado el campo de la velocidad de acción de chorro de un chorro axisimétrico confinado, la variación axial de la velocidad de la corriente libre se sigue de la ecuación de continuidad, la cual, despreciada la capa límite de pared, se expresa:

$$\eta_1 U_m R_{u/2}^2 + U_f = Ct \quad (12.35)$$

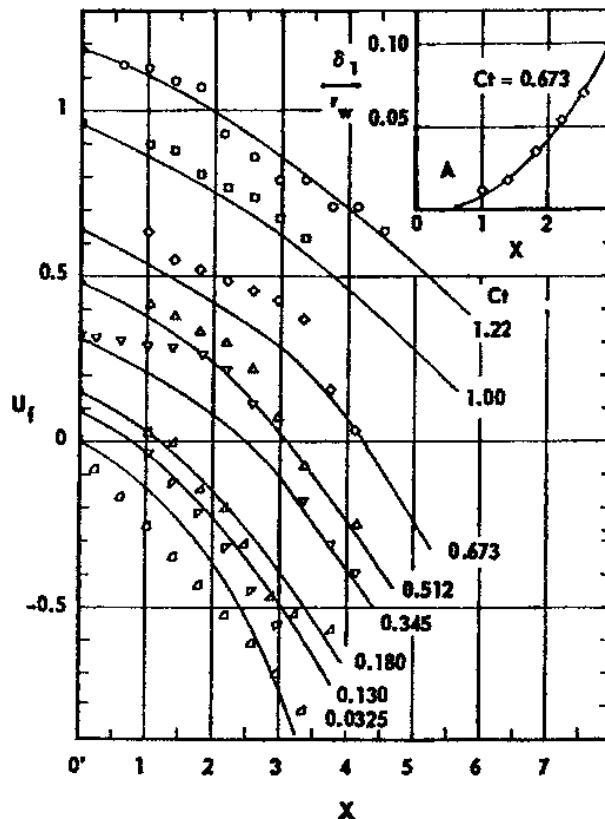
En la figura 12.15, se muestran, en función de X , los valores experimentales de U_f en el anillo entre la capa límite de la pared y el borde del chorro, y se les compara con los valores calculados con las ecuaciones 12.353, 12.33 y 12.31 y los aportados por la curva $\eta_1 = f(Ct)$, representada en la figura 12.11. El efecto de la capa límite de pared sobre el flujo medio se tiene en cuenta escribiendo la ecuación 12.35 de la forma:

$$\eta_1 U_m R_{u/2}^2 + (1 - \Delta_1)^2 U_f = Ct \quad (12.36)$$

donde Δ_1 es el espesor de desplazamiento normalizado de la capa límite.

La aparición de recirculación, reflejada por velocidades negativas de la corriente libre, es evidente en la figura 12.15. El remolino de recirculación tiene las características bien definidas siguientes:

Fig. 12.15.
Evolución axial de la
velocidad de la
corriente libre





1. Su borde corriente arriba se sitúa estadísticamente allí donde $U_f = 0$
2. En general, el borde del flujo de recirculación se define por la superficie $\bar{u} = 0$

$$Q_r = - \int_{r_w=0}^{r_w} \bar{u} dr^2 / u_0^* r_w^2 \quad Q_r \quad Q_{rem} = 0,33 - 0,43 Ct \quad \bar{u} = 0$$

$$Q_r = Q_{rem}$$

3. La componente axial normalizada del flujo de recirculación es:

$$Q_r = - \int_{r_w=0}^{r_w} \bar{u} dr^2 / u_0^* r_w^2 \quad (12.37)$$

El valor máximo de Q_r representa el flujo volumétrico de fluido alrededor del remolino de recirculación:

$$Q_{rem} = 0,33 - 0,43 Ct \quad (12.38)$$

El ojo del remolino, a cuyo alrededor se invierte el flujo, está localizado en:

$$\bar{u} = 0 \quad \text{y} \quad Q_r = Q_{rem}$$

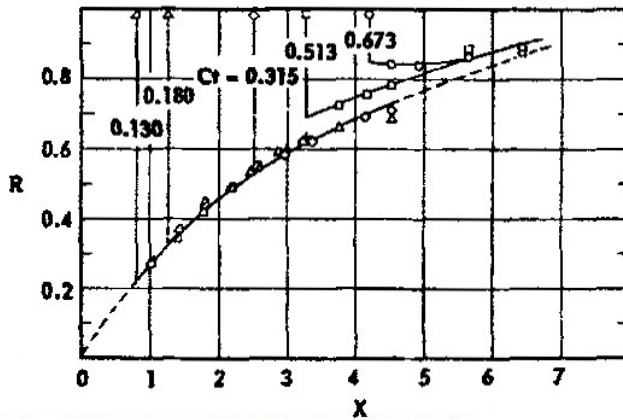


Fig. 12.16.
Fronteras del flujo de
recirculación, $\bar{u} = 0$

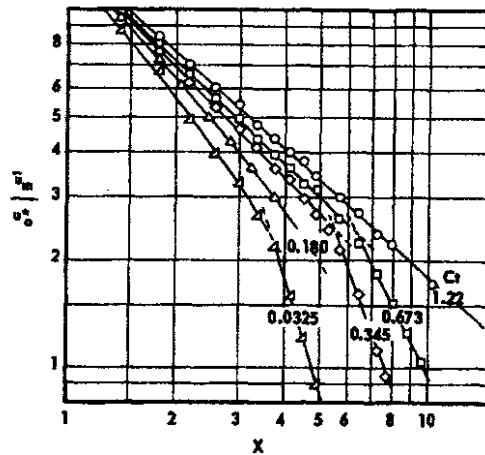
La figura 12.16 muestra las coordenadas R, X de las fronteras del flujo de recirculación, allí donde $\bar{u} = 0$.

Zona de mezcla post-chorro

La figura 12.17 muestra el decaimiento axial del máximo radial de la velocidad media. En un flujo con recirculación, hay un marcado cambio en la tasa de decaimiento de la velocidad en torno a $\bar{u}_m / u_0^* = 0,24$; este cambio señala el principio de la zona de mezcla post-chorro.



Fig. 12.17.
Decaimiento axial del
máximo radial de
velocidad media



La extrapolación de los datos de la figura 12.17 a $\bar{u}_m / u_k = 1$ da el valor de X para que los gradientes de velocidad media desaparezcan efectivamente:

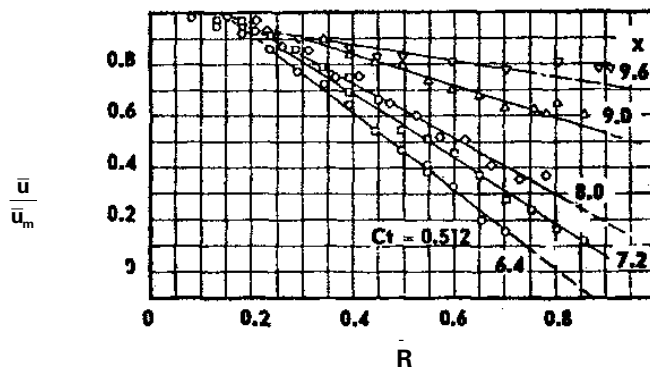
$$\left(\bar{u}_m / u_k = 1\right) = 6 + X \left(\bar{u}_m / u_0^* = 0,24\right) \quad (12.39)$$

La figura 12.18 muestra perfiles típicos de distribución radial de velocidad en la zona de mezcla post-chorro.

Una función de distribución simple y satisfactoria es:

- para $R < 0,14 \rightarrow \bar{u} / \bar{u}_m = 1$ y
- para $R > 0,1 \rightarrow \bar{u} / \bar{u}_m = 1 - (R - 0,14) \left\{ (\partial \bar{u} / \partial R) / \bar{u}_m \right\}$ (12.40)

Fig. 12.18.
Perfiles radiales de
velocidad en la zona de
mezcla post-chorro en
 $Ct = 0,512$



Mezcla de especies. Distribuciones de concentración

El campo de las diferencias de concentración media en chorro y corriente libre, $\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_f$, de una especie $\bar{\gamma}$ que deslinda el fluido del chorro fuente es similar a la de sus



velocidades. La figura 12.19 muestra un típico perfil radial normalizado de dicha diferencia de concentración normalizada, $\Gamma = (\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_f) / \gamma_0^*$.

Para el núcleo totalmente turbulento, la función que representa dicho perfil se escribe:

$$\Gamma / \Gamma_m = \exp \left\{ -(\ln 2) \left(R / R_{\gamma/2} \right)^a \right\} \quad (12.41)$$

El exponente a varía ligeramente con $R / R_{\gamma/2}$; algunos de sus valores son los siguientes:

$R / R_{\gamma/2}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6-1,0
a	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90

$$0,5 < R / R_{\gamma/2} < 1,2 \pm 0,01 \quad ; \quad Ct = 1,2$$

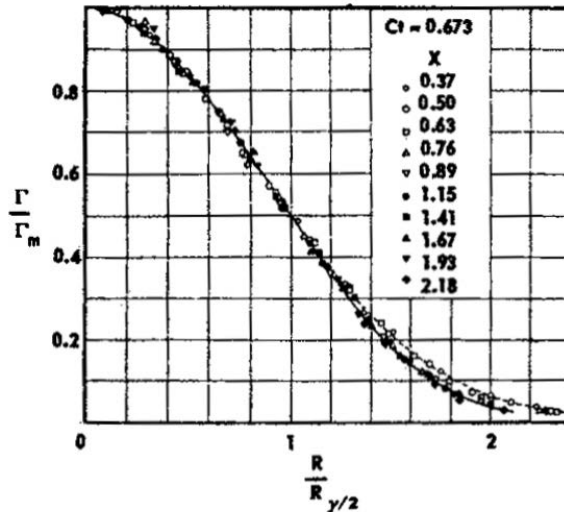


Fig. 12.19.
Perfil radial de
concentración en la
zona de acción de
chorro a $Ct=0,673$

La región intermedia lineal del perfil de concentración se extiende sobre el intervalo $0,5 < R / R_{\gamma/2} < 1,2$; el valor obtenido de la pendiente es $0,66 \pm 0,01$.

En el anillo variablemente turbulento, el perfil de concentración no se autoconserva pero, excepto a $Ct = 1,2$, la desviación es pequeña.

El borde de la distribución de concentración en el chorro es considerablemente más difuso que el borde de la distribución de velocidad, y no se ha encontrado una función simple de distribución que ajuste suficientemente bien todos los valores en el anillo turbulento. No obstante, para valores de Ct mayores que 0,345, una distribución que ajusta, por término medio, bastante bien los resultados es la siguiente:

$$\Gamma / \Gamma_m = \left\{ 1 - \left(1 - 2^{-1/3} \right) \left(R / R_{\gamma/2} \right)^b \right\}^2 \quad (12.42)$$



En la región $1 < R/R_{\gamma/2} < 1,8$, un buen ajuste medio se consigue tomando, para el exponente b , el valor $\frac{2}{3}$.

La teoría del campo de diferencias de concentración chorro-corriente libre recurre a dos radios característicos importantes, r_γ y $r_{\gamma,1}$, definidos por las expresiones siguientes:

$$r_\gamma^2 = \int_0^{r_{u/2}} (\Gamma / \Gamma_m) dr^2$$

y:

$$r_{\gamma,1}^2 = \int_0^{r_{u/2}} (\Gamma U / \Gamma U_m) dr^2$$

Los valores medios de los factores de forma $\eta_\gamma = r_\gamma^2 / r_{u/2}^2$ y $\eta_{\gamma,1} = r_{\gamma,1}^2 / r_{u/2}^2$ son 2,1 y 0,845, respectivamente.

Cuando el campo de velocidad media y los factores de forma η son conocidos, el máximo radial de la concentración en la región de acción del chorro viene dado por la ecuación de conservación de la especie del chorro:

$$\eta_{\gamma,1} \Gamma_m U_m + \eta_\gamma \Gamma_m U_f + Ct \Gamma_f = 1 \quad (12.43)$$

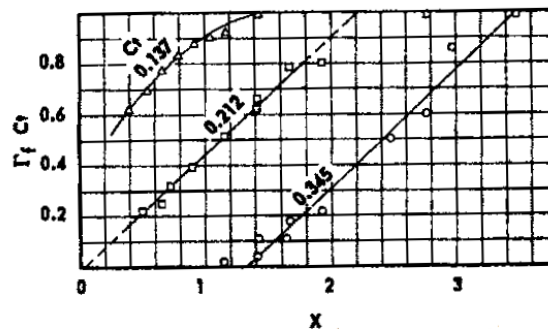
Para el chorro libre, la expresión correspondiente es:

$$\overline{\gamma_m} x = 0,16 j_s \sqrt{\rho_s / i_s} \quad (12.44)$$

La concentración en la corriente libre se considera uniforme a lo largo del radio, excepto en las zonas de recirculación, donde la concentración es la misma que la del chorro, pues se supone que el fluido en ella procede exclusivamente de él, mayoritariamente de la región donde el chorro se acerca a la pared del conducto y la turbulencia de la corriente es muy alta.

La figura 12.20 muestra la concentración normalizada de la corriente libre $\Gamma_f Ct_f$ en función de X y del parámetro Ct . La extrapolación lineal de los datos para $Ct = 0,212$ y $0,345$ a $\Gamma_f = 0$ y $\Gamma_f Ct = 1$ da una longitud efectiva de la zona de recirculación de dos radios de conducto en cuanto a las variaciones de concentración media.

Fig. 12.20.
Evolución axial de la
concentración en la
corriente libre [BCh74]



(Ver [Sch80] [Bch74], ref 6)



12.3 Chorros coaxiales y chorros transversales

En este apartado, se exponen los conocimientos esenciales del flujo que resulta de la interacción de un chorro inyectado en la dirección paralela y en la dirección normal a una corriente.

(Ver [BCh74])

12.4 Chorros inyectados en una corriente paralela. Chorros coaxiales

Se trata de un sistema caracterizado por un chorro que es inyectado en una corriente principal, de modo que la dirección de la corriente principal y la del chorro es la misma. Suponiendo despreciable la influencia del espesor de la pared de la tobera, Squire y Trouncer⁷ estudian teóricamente el flujo que resulta de la inyección de un chorro circular en una corriente general cuya dirección es la misma que la del chorro inyectado. Fostall y Shapiro⁸ realizan un estudio experimental del caso del flujo axisimétrico, y Alpinieri⁹ investiga la mezcla turbulenta de chorros coaxiales.

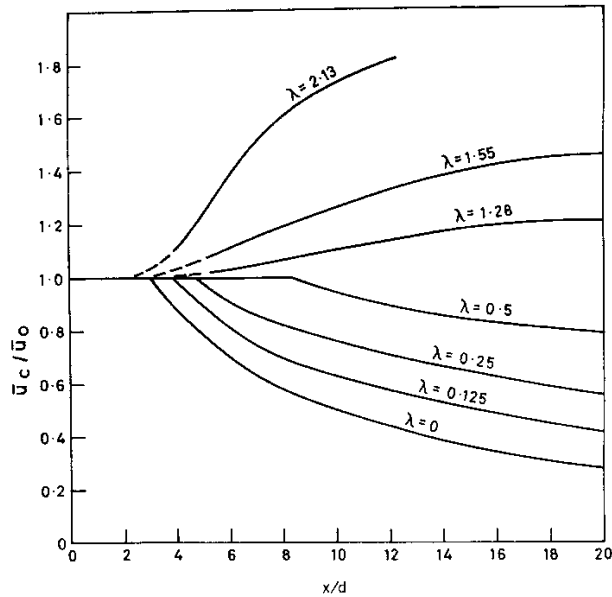
Puesto que la mezcla turbulenta depende de los gradientes de velocidad, cabe esperar que, a medida que la velocidad del fluido de la corriente externa aumenta, manteniéndose siempre por debajo de la velocidad del chorro, los gradientes de velocidad y mezcla entre el chorro y la corriente externa se reduzcan hasta que se alcance un mínimo mezclado, o sea, cuando la velocidad de chorro es la misma que la velocidad de la corriente externa. Cuando la velocidad de la corriente externa se incrementa con respecto a la velocidad del chorro, se restablecen los gradientes y la mezcla aumenta. También aumenta el tamaño del núcleo potencial hasta que se extiende a través de todo el campo de flujo, cuando la velocidad del chorro y la velocidad de la corriente externa son idénticas. Squire y Trouncer deducen, por integración de la cantidad de movimiento utilizando una longitud de mezcla, la siguiente ecuación de la distribución de velocidad axial en la región de mezcla próxima a la salida de la tobera:

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_0 - \bar{u}_s}{2} \left[1 - \cos \left(\pi \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) \right] \quad (12.45)$$

donde r_2 y r_1 son los radios externo e interno de la región de mezcla, respectivamente; \bar{u}_s es la velocidad de la corriente externa, y \bar{u}_0 es la velocidad inicial del chorro.



Fig. 12.21.
Decaimiento de la
velocidad a lo largo del
eje de un chorro circular
inyectado en una co-
corriente [BCh74]



La figura 12.21 muestra el decaimiento, predicho por Squire y Trouncer, de la velocidad a lo largo del eje de un chorro circular en una corriente de la misma dirección para valores de λ (relación entre la velocidad de la corriente y la velocidad de salida del chorro) inferiores a 1.

En la gráfica, se muestran también los resultados experimentales de Alpinieri para valores de λ mayores que 1.

Las predicciones de Squire y Trouncer son, a efectos prácticos, adecuadas para predecir las fronteras mitad de la mezcla, como Landis y Shapiro¹⁰ han verificado experimentalmente. Sus resultados muestran claramente que los valores de las propiedades en la región de mezcla son una función de la relación de velocidad para cualquiera de las velocidades absolutas de las dos corrientes. Estos autores presentan sus resultados en términos de la longitud del núcleo potencial, cuyo valor para $\lambda < 1$, obtenido experimentalmente, viene dado por:

$$\frac{x_p}{d_0} = 4 + 12\lambda \quad (12.46)$$

En la región totalmente desarrollada, el decaimiento de velocidad a lo largo del eje viene dado por:

$$\frac{u_c - u_s}{u_j - u_s} = \frac{x_p}{x} \quad (12.47)$$

La tasa de propagación del chorro viene dada por:

$$\frac{y_{0.5}}{r_0} = \left(\frac{x/d_0}{x_p/d_0} \right)^{(1-\lambda)} \quad (12.48)$$

donde $y_{0.5}$ es la posición radial en que la velocidad es igual a $0,5(u_{min} + u_{max})$.



El perfil de velocidad viene dado en términos de una distribución coseno por la expresión:

$$\frac{u - u_s}{u_c - u_s} = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi r}{2 y_{0,5}} \right) \right] \quad (12.49)$$

Alpinieri centró sus estudios al caso $\lambda > 1$ (interesado en la aplicación de los resultados a estudios de estelas de cohetes y cámaras de combustión de estatorreactores (*ramjet*), donde la velocidad central del chorro con frecuencia es menor que la de la corriente externa).

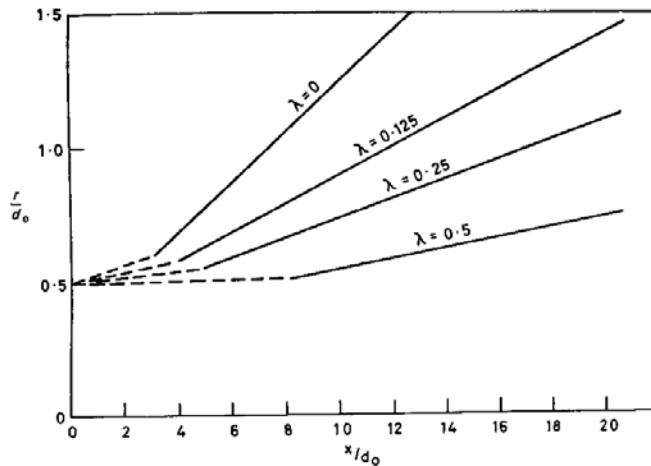


Fig. 12.22.
Líneas de velocidad
mitad de chorros
circulares en una co-
corriente. [BCh74]

Los resultados se muestran en la figura 12.22, que representa el decaimiento de concentración a lo largo de la línea central de un chorro circular en una corriente de la misma dirección, dependiente de la relación de velocidades corriente-chorro y de la relación de densidades. El decaimiento de velocidad a lo largo del eje de un chorro de CO_2 en aire para valores de λ 1,28, 1,55 y 2,13 se muestra en la figura 12.23.

Los experimentos realizados con grandes diferencias de densidad corriente-chorro caliente muestran que la disminución de la densidad del fluido del chorro con respecto a la del medio ambiente donde descarga causa un incremento de la tasa de decaimiento del chorro.

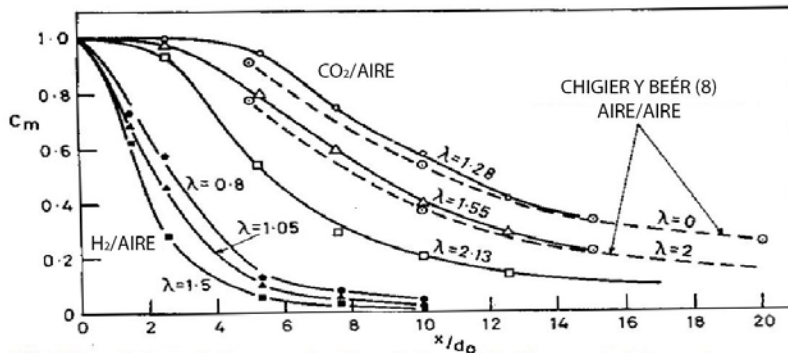
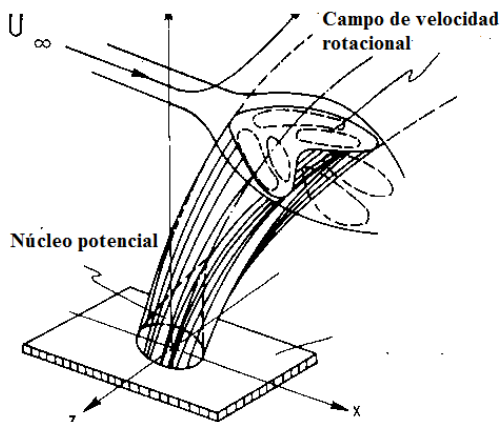


Fig. 12.23.
Líneas de velocidad
mitad de chorros
circulares en una co-
corriente.

Chorros inyectados en una corriente transversal

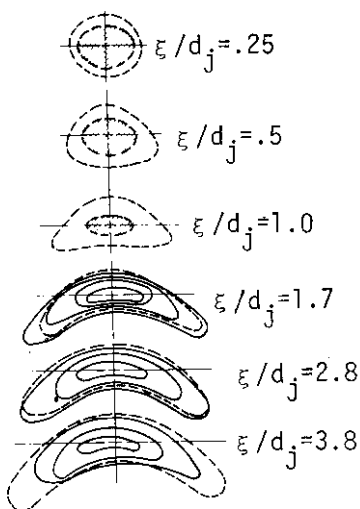
En este apartado, se exponen algunos conocimientos sobre el fenómeno de interacción de un chorro con una corriente transversal, que, por supuesto, da lugar a campos de flujo tridimensional de un tipo generalmente diferente de los que ocurren en los fenómenos de interacción coaxial. Esta clase de flujos se encuentran habitualmente, por ejemplo, en la descarga de humos de las chimeneas y en las descargas de combustible de algunos sistemas energéticos.

Fig. 12.24.
Esquema del campo de
flujo resultante de la
interacción chorro-
corriente principal
[Sch80]



Los chorros que se inyectan a una corriente principal en una dirección que forma un ángulo con ella experimentan una distorsión, de manera que dejan de ser axisimétricos.

Fig. 12.25.
Contornos de presión
total y estática (línea de
trazos) correspondientes
a varias secciones del
chorro transversal
[Sch80]



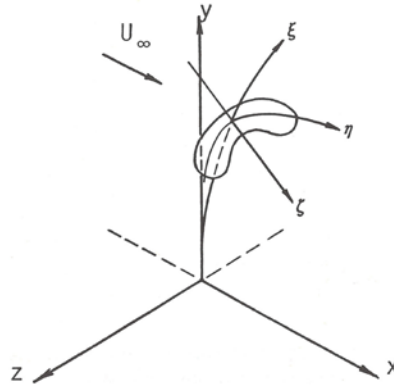


Fig. 12.26.
 ξ , longitud a lo largo del
 arco; d_j , diámetro del
 chorro

El flujo que rodea al chorro se desacelera corriente arriba del chorro y crea una región de presión de remanso, mientras que se desarrolla una región de baja presión en la estela del chorro. Corriente abajo del chorro, en la corriente principal, se forman un par de vórtices contrarrotantes, similar al que se forma en la estela de un cuerpo cilíndrico normal a la corriente. La mezcla del chorro y la corriente principal se activa por la acción de las tensiones de cortadura laterales adicionales.

Esto tiene el efecto de acortar el núcleo potencial, a la vez que la velocidad y la concentración decaen mucho más que en los chorros sumergidos, a medida que la distancia desde la tobera aumenta.

La diferencia de presión entre la región de remanso corriente arriba y la de estela a través del chorro causa su desviación, a la vez que la sección transversal del chorro cambia de configuración y pasa de su forma circular a una arriñonada (v. figuras 12.24 y 12.25).

La figura 12.27 representa las trayectorias, determinadas por Patrick,¹¹ del chorro que penetra en ángulo recto en una corriente principal cuya velocidad es de 8 m/s. A partir de las medidas de velocidad y de concentración, se determina la posición del eje del chorro y se obtiene la expresión:

$$\frac{y}{d_0} = \lambda^{-0.85} \left(\frac{x}{d_0} \right)^n; \quad \lambda^2 = (\rho_s / \rho_j) (V_0^2 / U_0^2) \quad (12.50)$$

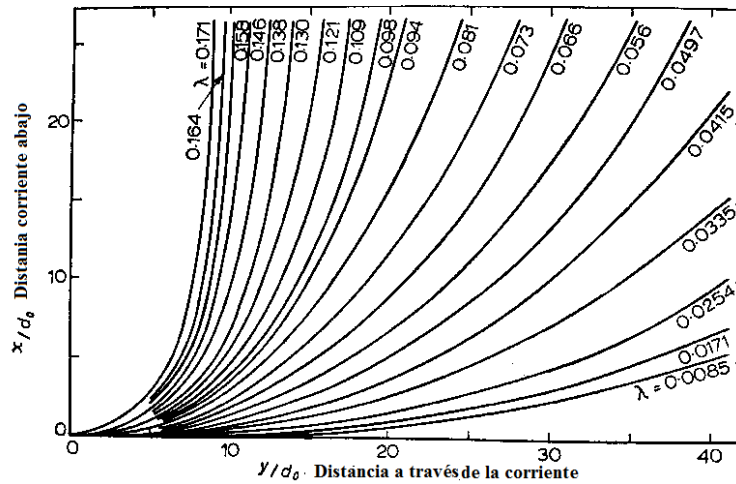
en el intervalo $0 \leq \lambda \leq 0,152$ para sistemas en que la densidad no es constante. El valor de n es 0,34 para los datos de concentración, y 0,38 para los datos de velocidad. Tanto el decaimiento de velocidad como el de concentración a lo largo del eje son funciones de la distancia adimensional a lo largo del arco. Patrick dedujo las expresiones siguientes:

$$\text{Decaimiento de velocidad:} \quad \frac{U_0}{U_m} = k_1 + k_2 \left(\frac{\bar{S}}{d_0} \right) \quad (12.51)$$

donde k_1 y k_2 son constantes para un valor dado de λ .

$$\text{Decaimiento de la concentración:} \quad \frac{C_0}{C_m} = \left[\left(\frac{\bar{S}}{d_0} \right) \exp(7,8\lambda - 1,85) \right]^{1,18} \quad (12.52)$$

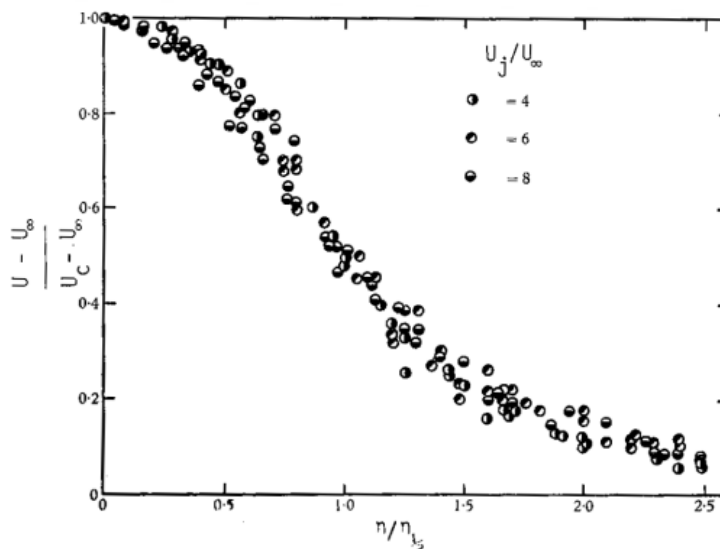
Fig.12.27.
[BCh74]



La caracterización de un chorro transversal inyectado en una corriente externa de velocidad uniforme U_∞ requiere conocer la variación de velocidad a lo largo de la línea central del chorro; la distribución de velocidad a través del chorro en la dirección η identificada en la figura 12.26; la penetración del chorro, definida por su valor mitad h ; su diseminación en las direcciones z, ζ , y el coeficiente de arrastre.

Las figuras 12.28, 12.29, 12.30, 12.31 y 12.32 muestran, a partir de los resultados experimentales de Keffer y Baines¹³ y de Pratte y Baines,¹⁴ la evolución de las magnitudes mencionadas en un chorro transversal.

Fig. 12.28.
Variación de la velocidad
a lo largo de la línea
central en la dirección de
la trayectoria del chorro,
medida a partir de su
origen virtual,¹³ en
chorro libre [Sch80]



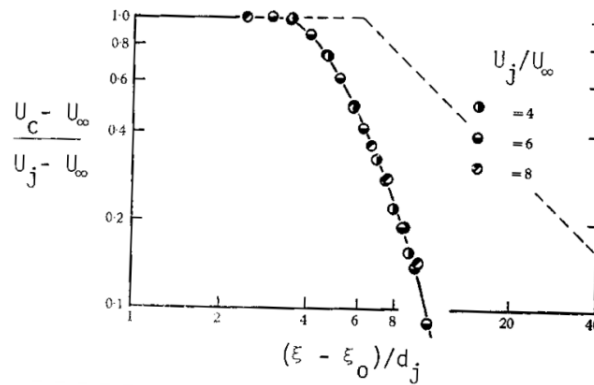


Fig. 12.29.
Perfiles de distribución
de velocidad a través del
chorro¹³ [Sch80]

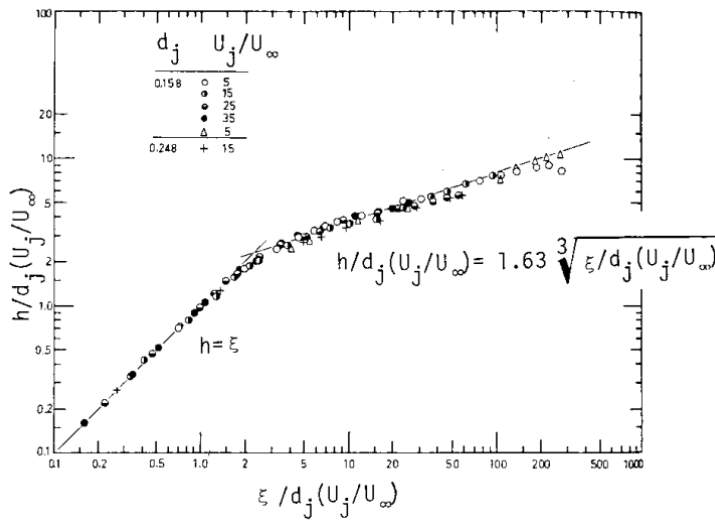


Fig. 12.30.
Correlación de la
trayectoria de la línea
central a lo largo del
arco para un chorro
transversal inyectado
a 90°¹⁴

En la figura 12.31, se muestra la extensión en la dirección ζ de un chorro transversal y, en la figura 12.32, la extensión en la dirección Z de un chorro transversal.

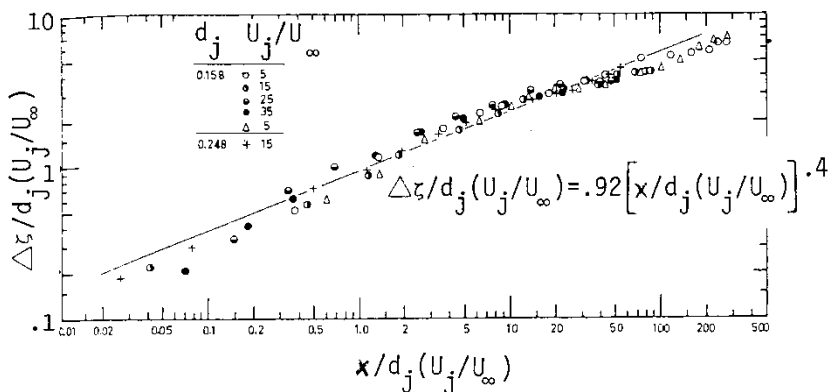
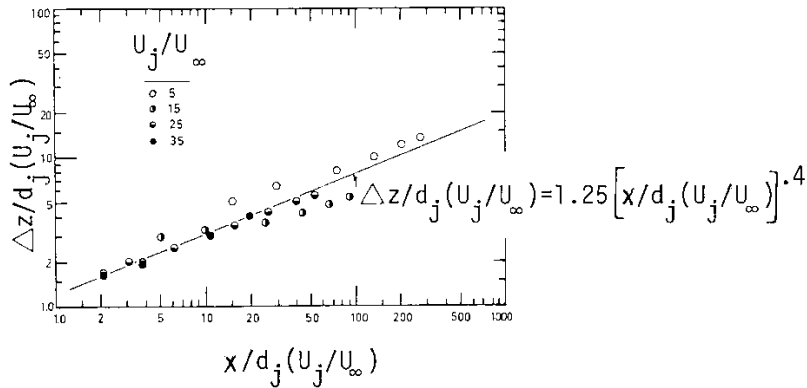


Fig. 12.31.
Extensión en la
dirección ζ de un chorro
transversal¹⁴ [BCh80]

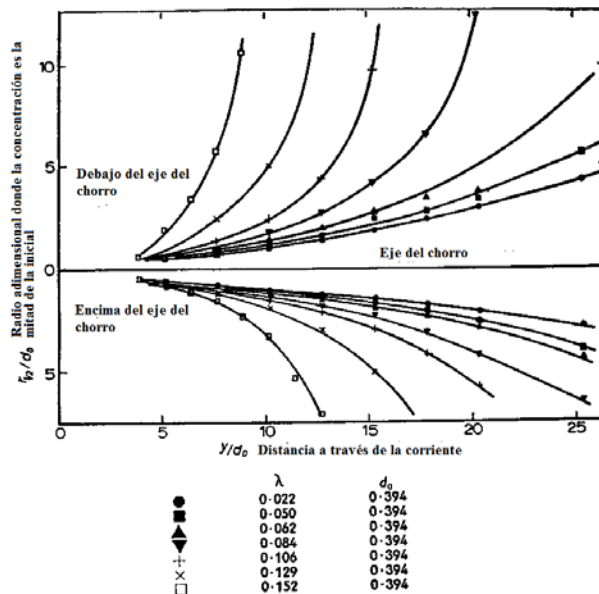


Fig. 12.32.
Extensión en la
dirección z de un chorro
transversal¹⁴ [BCh80]



Si interesa conocer la capacidad de mezclado del chorro inyectado, es necesario determinar el decaimiento de la concentración de fluido de chorro en la dirección axial. A tal efecto, cabe utilizar la relación empírica (12.52). Esta relación se aplica en el rango $0 \leq \lambda \leq 0,152$ y para valores de \bar{S}/d_0 y λ con un valor de C inferior a su valor inicial unidad. Los valores de \bar{S}/d_0 que dan $C \geq 1$ corresponden a puntos que se encuentran dentro de un “núcleo potencial de concentración”. En la figura 12.33, se muestra la mezcla acelerada entre chorro y fluido envolvente debida al flujo transversal, en que el alcance de la extensión de los chorros transversales viene dado en función de la distancia y/d_0 . La frontera del chorro está definida por el radio, en que la concentración es la mitad de la del chorro $r_{0,5}$ y representa la distancia, en la dirección de la corriente principal, entre el eje y los puntos donde la concentración ha descendido a la mitad del valor máximo del perfil de concentración. Para cada distancia a través de la corriente y/d_0 , se dan dos valores de $r_{0,5}$: uno corriente arriba y otro corriente abajo del chorro.

Fig. 12.33.
Extensión de chorros
transversales¹¹ [BCh74]]





En la figura 12.34, se muestra el coeficiente de arrastre de fluido ambiente en función de la longitud del arco a lo largo del eje del chorro-penacho.

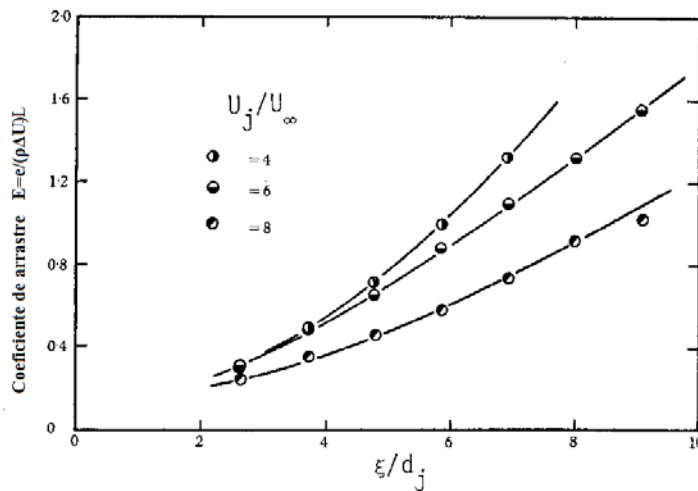


Fig. 12.34.
Coeficiente de arrastre
en función de la longitud
de arco a lo largo de la
trayectoria del chorro¹³
[BCh74]]

(Ver [BCh74] y [Sch80])

12.5 Chorros anulares

En primer lugar, hay que tener presente que las configuraciones de chorros anulares básicamente son dos: los chorros anulares no ventilados y los chorros anulares ventilados.

Los chorros anulares no ventilados son originados en una tobera anular cuya parte circular interior está cerrada, ya sea porque forma parte del cuerpo sólido de la tobera, o bien porque se prolonga en un cuerpo cilíndrico o en una ojiva. Los chorros circulares ventilados son originados en una tobera anular cuyo círculo interior es prácticamente un orificio por el cual puede comunicarse con el medio ambiente o introducir otro fluido con alguna característica diferente de la del fluido de la tobera. Las toberas no ventiladas se aplican en los quemadores industriales, en las turbinas de gas y en turbomáquinas similares; las ventiladas encuentran su principal aplicación en los sistemas de control ambiental.

En los chorros anulares cuyo origen es una tobera ventilada, el arrastre y el patrón de flujo inducido son modificados por la influencia del orificio interno, de modo que las condiciones fluidodinámicas en él ofrecen un medio potencialmente efectivo de control del flujo.

Mientras son muchos los estudios realizados sobre los chorros anulares “no ventilados”, son relativamente pocos los que se han llevado a cabo sobre los chorros anulares “ventilados”.

El chorro anular es un ejemplo de flujo de cortadura complejo. Chan y Ko¹⁵ resumen los conocimientos acumulados sobre este tipo de chorros. Estos investigadores proponen un modelo simplificado de este tipo de estructuras de flujo, que consiste básicamente en suponer constituido el chorro por tres regiones: emergente, intermedia y completamente



desarrollada, en que se observa semejanza de los perfiles de la velocidad media y la intensidad de turbulencia.

Los chorros anulares han sido estudiados como caso límite de los chorros coaxiales por Chigier y Beér,¹⁶ y Williams, Ali y Anderson,¹⁷ entre otros. Puesto que la configuración del chorro anular adoptada por estos autores es del tipo “no ventilado”, se constituye una región de recirculación interna que ocupa un espacio limitado por el plano de descarga de la tobera, la interfaz interna del chorro anular y el punto donde esta converge. Los aspectos más interesantes de este tipo de flujo son, precisamente, la zona de recirculación cerca de la tobera y el punto de remanso, cuya distancia a la salida de la tobera representa la longitud del vórtice interno.

En sus regiones totalmente desarrolladas (de 8 a 10 diámetros de tobera corriente abajo), los chorros anular y coaxial muestran unos patrones de flujo similares a los de los chorros circulares. Sin embargo, hay un desplazamiento del origen; es decir, la distancia axial x ha de ser sustituida por $(x+a)$ en las ecuaciones que expresan la velocidad, la concentración y el arrastre a lo largo del eje. Próximo a la tobera, el chorro anular establece, como ya se ha mencionado, una zona de baja presión, con un vórtice anular cerrado asociado en la región central del chorro. Tales vórtices se encuentran también en la estela de la interfaz anular entre los chorros coaxiales. Por consiguiente, la región próxima a la tobera está afectada considerablemente por la geometría de tobera de ambos tipos de chorro, anular y coaxial.

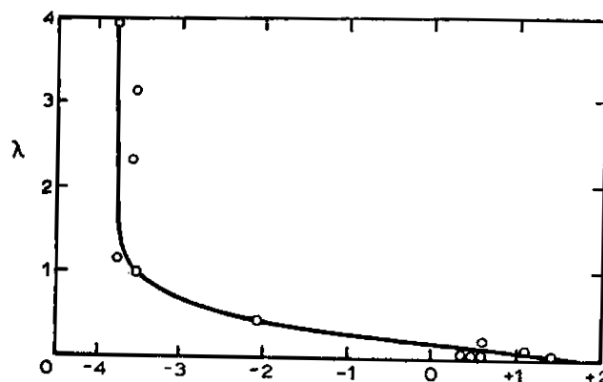
Chigier y Beér¹⁶ han determinado experimentalmente los valores del desplazamiento del origen del chorro para un amplio rango de valores de la relación λ de velocidad del chorro anular a la del chorro central de chorros coaxiales (v. figura 12.35).

El valor del diámetro de tobera equivalente d'_0 para un sistema de doble chorro coaxial se calcula mediante la expresión:

$$d'_0 = \frac{2(\dot{m}_c + \dot{m}_a)}{\pi\rho(\dot{G}_c + \dot{G}_a)} \quad (12.53)$$

donde \dot{m}_c y \dot{m}_a son los flujos másicos del chorro central y del chorro anular, respectivamente, y \dot{G}_c y \dot{G}_a son los respectivos flujos de cantidad de movimiento.

Fig. 12.35.
Desplazamiento del
origen a/d' efectivo del
chorro en función de la
relación de velocidad λ
[BCh74]]





Para el chorro central solo, la velocidad característica es la velocidad media de salida u_{c0} a través de la tobera central de diámetro d . La longitud del núcleo central depende de la forma de la tobera y de la intensidad de turbulencia generada antes de la salida de tobera.

La figura 12.36 muestra la variación de la velocidad relativa del fluido a lo largo del eje del chorro central en función de la distancia a la tobera y de la velocidad del fluido en el chorro anular, como parámetro. Se constata que, para $\lambda = 0,08$, la velocidad del fluido a lo largo de la línea central permanece constante hasta una distancia a partir de la tobera de cuatro veces su diámetro, y que, para $\lambda = 2,35$, el chorro anular absorbe completamente el chorro central. La velocidad a lo largo de la línea central tiende a decaer hiperbólicamente conforme a la expresión empírica:

$$\frac{u_m}{u_{c0}} = 6,4 \frac{d_0'}{x+a} \quad (12.54)$$

A medida que la velocidad de salida del chorro anular aumenta, la longitud del núcleo potencial del chorro central disminuye, y el decaimiento de la velocidad del fluido a lo largo de la línea central es más rápido.

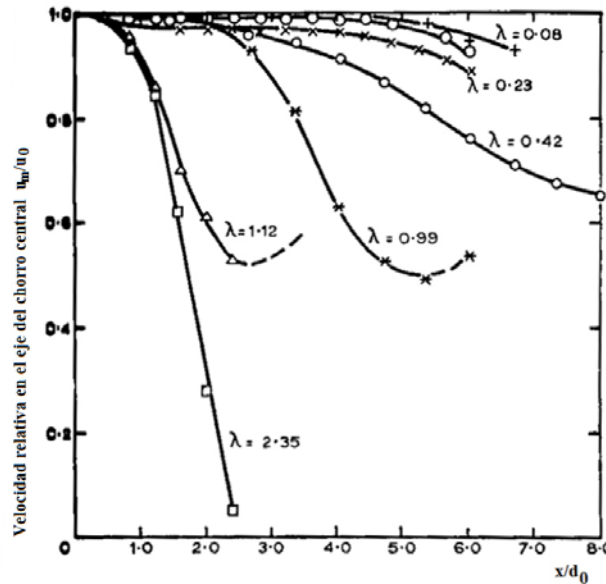
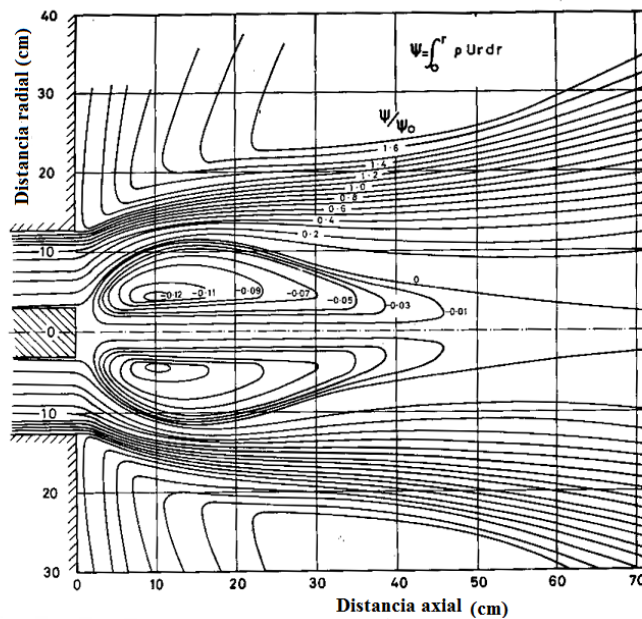


Fig. 12.36. Influencia del chorro anular sobre el núcleo potencial y el decaimiento de velocidad del chorro central^{18,20} [BCh74]]

La figura 12.37 muestra la influencia del chorro central sobre la longitud del núcleo potencial y sobre el decaimiento de la velocidad máxima del fluido del chorro anular. Se observa que la longitud del núcleo potencial del chorro anular, más difícil de distinguir que la del chorro central, disminuye a medida que la velocidad del fluido del chorro central aumenta, y que el decaimiento de la velocidad máxima del fluido en el chorro anular aumenta hasta que es absorbido por el chorro central.

Fig. 12.37.
Líneas de corriente del
torbellino de
recirculación de un
chorro con remolino,
 $S=1,57^{18,20}$ [BCh74]



(Ver [BCh74])

12.6 Chorros turbulentos anulares con remolino

Los estudios experimentales muestran que el remolino da lugar a efectos de gran escala sobre los campos de flujo: el crecimiento del chorro, el arrastre y el decaimiento (para los chorros inertes) y el tamaño de la llama, la forma, la estabilidad y la intensidad de la combustión (para los flujos reactivos) se ven afectados por el grado de remolino imprimido al flujo.

Los chorros turbulentos anulares con remolino tienen aplicaciones muy diversas; entre ellas, acaso la más importante sea en los quemadores de combustibles líquidos atomizados, como medio de control de las llamas en las cámaras de combustión; también, por ejemplo, en algunos tipos de atomizadores, en los amplificadores de vórtice, en los separadores de ciclón y en las toberas de inyección de N_2 , para controlar el espesor de la capa de zinc en el proceso de galvanizado del alambre.

La aerodinámica del chorro turbulento con remolino combina las características del movimiento de rotación con los fenómenos de turbulencia libre propios de los chorros y estelas. Cuando se imprime un movimiento de rotación a un fluido corriente arriba de un orificio, el flujo que emerge de él tiene una componente tangencial de velocidad, además de las componentes radial y axial del chorro convencional. La presencia de remolino provoca el establecimiento de gradientes de presión radial y axial, los cuales, a su vez, influyen en el campo de flujo. En caso de remolino fuerte, el gradiente de presión axial adverso es lo suficientemente grande para dar lugar a un reflujo a lo largo del eje, estableciendo una zona de recirculación interna. La figura 12.37 muestra las líneas de corriente del torbellino de recirculación en un chorro con remolino de intensidad $S = 1.57$.



Conocida la distribución de velocidad tangencial, w , en el chorro, la distribución de presión en él satisface la ecuación:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{w^2}{r} \quad (12.55)$$

La baja presión en el núcleo central del flujo rotante promueve un gradiente de presión axial adverso que, en caso de torbellino intenso, se transforma en un reflujo que establece un vórtice toroidal central.

La presencia del vórtice toroidal provoca la expansión rápida de las fronteras externas del chorro en cuanto el chorro emerge del orificio anular. Esta expansión inicial no tiene nada que ver con el arrastre de fluido ambiente en torno a la frontera exterior del chorro. La longitud del núcleo del vórtice toroidal, definida como la distancia desde el centro del orificio anular hasta el punto de inicio del reflujo, aumenta a medida que lo hace el grado de remolino.

Los métodos para inducir rotación en una corriente se pueden dividir en tres categorías principales:

- Entrada tangencial de una corriente de fluido en un conducto cilíndrico.
- Utilización de una corona de álabes guía en un tubo con flujo axial.
- Rotación de dispositivos mecánicos que imprimen un movimiento de remolino al fluido que pasa a través de ellos.

En este apartado, se exponen las características de los chorros turbulentos anulares en que se ha inducido un remolino por corona de álabes guía, o sea, del tipo (2). Muchos de los generadores de remolino en quemadores industriales están equipados con una cascada de álabes guía, montada en un tubo con flujo axial. La variación de la intensidad de remolino en estos quemadores se logra ajustando la orientación de los álabes con respecto a la dirección axial de la corriente que llega a ellos. Las principales características fluidodinámicas de los chorros libres con remolino son el flujo axial de la cantidad de movimiento angular, G_φ , y el empuje axial, G_x . Ambas se conservan y sus expresiones respectivas son:

$$G_\varphi = \int_0^R (wr) \rho u 2\pi r dr = Cte \quad (12.56)$$

$$G_x = \int_0^R \rho u^2 2\pi r dr + \int_0^R p 2\pi r dr = Cte \quad (12.57)$$

En ambas ecuaciones, w, u y p son las componentes tangencial y axial de la velocidad y la presión estática del fluido, respectivamente, en cualquier sección del chorro.

Dado que ambas magnitudes sirven para caracterizar el comportamiento aerodinámico del chorro, Chigier y Beér¹⁸ recomiendan utilizar un criterio adimensional de intensidad de remolino basado en dichas magnitudes: el número de remolino S , cuya expresión es:

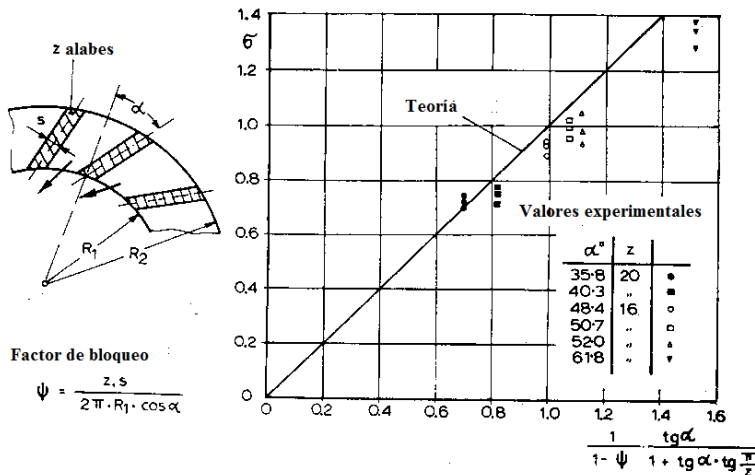
$$S = G_\varphi / G_x R \quad (12.58)$$

El cálculo del número de remolino a partir de las ecuaciones 12.56, 12.57 y 12.58 requiere mediciones precisas de las distribuciones de velocidad y de presión estática en una sección transversal del chorro con remolino. Si bien la medición de las velocidades no presenta obstáculos importantes, la de la distribución de la presión estática no tiene sentido, pues varía de sección en sección y depende de cómo se produce la expansión del chorro; por ello, es habitual definir el número de remolino sin tener en cuenta el término integral de la ecuación 12.57. Así, una buena aproximación al número de remolino se define por la expresión:

$$S' = \frac{G_\varphi}{G_x R}, \text{ con } G_x = 2\pi \int_0^R \rho u^2 r dr \quad (12.59)$$

A título informativo del alcance práctico, a continuación se indican las magnitudes características del generador de remolino de cascada de álabes guía (v. figura 12.38).

Fig. 12.38.
Cascada de álabes guía
en flujo radial¹⁸
[BCh74]]



Sean \dot{m} , $\overline{w_1}$, $\overline{v_1}$ el flujo másico, la velocidad tangencial media y la velocidad radial media, respectivamente, del fluido en la salida de la cascada, cuyo radio es R_1 .

Para un ancho axial del canal B, se tiene $\overline{v_1} = \frac{\dot{m}}{2\pi \rho R_1 B}$, $\overline{w_1} = \frac{G_\varphi}{m R_1}$, que sirven para definir

un parámetro, $\sigma = \overline{w_1} / \overline{v_1}$, característico de este tipo de generador de remolino, que depende solo de las dimensiones geométricas de la cascada de álabes guía del generador. Leuckel¹⁹ propone para el valor de σ la expresión siguiente:

$$\sigma = \frac{1}{1-\psi} \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan(\pi/2)} \quad (12.60)$$

donde $\psi = zs / 2\pi R_1 \cos \alpha$ es un factor de bloqueo que tiene en cuenta el número finito de álabes en la cascada y su espesor. La gráfica de la figura muestra la desviación de la teoría con respecto a los valores experimentales en los generadores cuyo ángulo de inclinación de los álabes es elevado.



En el libro de Beér y Chigier, se describen otros tipos de generadores de remolino y se explica cómo se calculan las magnitudes que caracterizan el flujo de remolino.

12.6.1 Grados de remolino y sus características

En general, los grados de remolino son dos: el remolino débil, que se caracteriza por un número de remolino $S < 0,6$, y el remolino fuerte, siempre que S es mayor que 0,6.

El efecto principal del remolino es el incremento de la tasa de arrastre de fluido externo, que da lugar a un descenso progresivo de la velocidad. Los perfiles de velocidad axial se mantienen gaussianos hasta un número de remolino de 0,5 y, ulteriormente, las velocidades axiales máximas se encuentran en una posición desplazada del eje del chorro, lo cual promueve un perfil de velocidad del tipo de doble joroba, que acabará iniciando un reflujo para valores de S mayores que 0,6.

En los casos de remolino débil, los gradientes de presión axial no son lo suficientemente grandes para causar la recirculación interna.

Remolino débil, $S < 0,6$

A partir de los resultados experimentales recopilados por Beér y Lee,²⁴ se han trazado curvas de las distribuciones espaciales de los valores medios temporales de las velocidades del fluido de flujos de chorro libre con remolino débil, que se han ajustado del modo siguiente:

Desarrollo corriente abajo a partir de la estación donde las componentes de velocidad u o w son máximas

$$\begin{aligned} u_m / u_{m0} &= k_1 f_1 d / (x + a) \\ w_m / w_{m0} &= k_2 f_2 d / (x + a) \\ p_\infty - p_{min} &= \rho w_{m0}^2 k_1 f_2^{-1} [d / (x + a)]^4 \end{aligned} \quad (12.61)$$

Ecuaciones de los perfiles de distribución a través de la corriente de u, v, w y p

$$\begin{aligned} u / u_m &= \exp(-k_u \xi^2) \\ w / w_m &= C\xi + D\xi^2 + E\xi^3 \\ v / u_m &= F\xi + G\xi^2 \\ (p_\infty - p) / (p_\infty - p_{min}) &= \exp(-k_p \xi^2) \end{aligned} \quad (12.62)$$

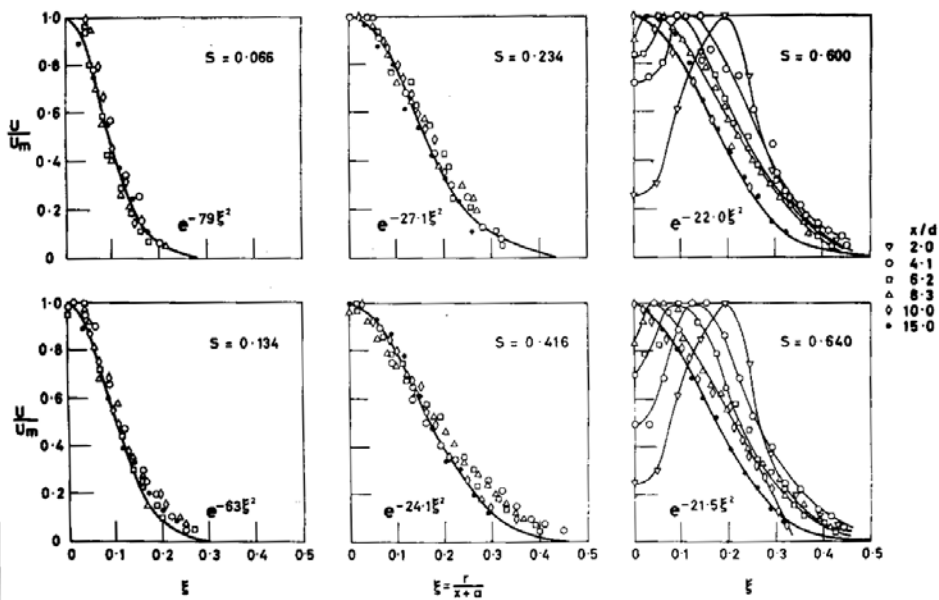
donde:

$$\xi = r / (x + a), \quad a = 2,3d, \quad k_u = 92(1 + 6S), \quad k_1 = 6,8(1 + 6,8S^2), \quad k_2 = 5,3$$

$$k_p = 150(1 + 8S), \quad F = 2s / r \quad \text{y} \quad G = -s / r^2$$



Fig. 12.39.
Distribución radial de
velocidad axial²¹



La tabla 12.1²⁵ incluye los parámetros de ajuste de curva utilizados en las anteriores ecuaciones y, además, el valor medio de velocidad axial y el valor máximo de la velocidad axial y de la velocidad de remolino.

Tabla 12.1.
Parámetros de ajuste de
curva para las
ecuaciones 12.60 y
12.61 [ChCh66]

S	0.066	0.134	0.234	0.416	0.600	0.640
u_{dv} (m/s)	39.220	35.520	36.030	38.200	36.030	34.380
u_{mo} (m/s)	41.000	41.500	44.100	49.400	52.400	58.000
w_{mo} (m/s)	4.800	11.000	17.600	26.000	35.600	42.000
C	7.700	10.700	18.100	15.100	15.100	15.100
D	71.500	20.000	-98.800	-67.200	-67.200	-67.200
E	-542.000	-326.000	138.000	75.400	75.400	75.400
K_3^a	59.000	35.200	53.500	108.000	54.000	65.000
f_1	1.000 ^b	0.770	0.560	0.810	0.790	0.690
f_2^c	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
r	0.075	0.090	0.125	0.120	0.150	0.150
s	0.0085	0.009	0.011	0.011	0.013	0.013

a, Reducido a la mitad para $x/d < 5$; b, Reducido a 0,86 para $x/d < 5$; c, Reducido a 0,75 para $x/d < 5$

Entre otras características de los remolinos débiles, cabe destacar las siguientes:

- La semejanza de los perfiles de distribución radial de la velocidad axial se mantiene hasta una distancia desde la tobera $x/d = 2$ para valores del número de remolino del orden de 0,4, como máximo.
- Los perfiles de velocidad axial satisfacen la ecuación:

$$u/u_m = \exp\left[-k_u r^2 / (x+a)^2\right] \quad u/u_m = \exp\left[-k_u r^2 / (x+a)^2\right] \quad (12.63)$$



- donde a es la distancia al origen aparente del chorro y k_u , constante de la distribución, viene dada por la expresión empírica:

$$k_u = 92 / (1 + 6S) \quad (12.64)$$

- La región interna del perfil de velocidad de remolino es casi lineal, correspondiente a la rotación de un cuerpo sólido, con un tamaño que aumenta gradualmente de $r/(x+a) = 0,1$ a $0,2$, a medida que aumenta el remolino, y después pasa a ser de $0,1$, hasta que el valor del número de remolino es tal que aparece una zona de recirculación (v. figura 12.40).

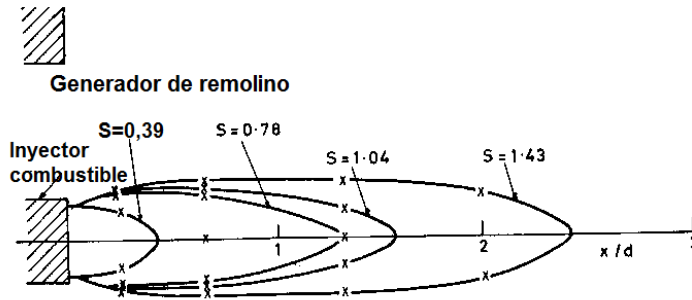


Fig. 12.40.
Tamaño de la zona de
recirculación
[Bh74]

Por el contrario, la región exterior muestra un movimiento del tipo vórtice libre.

- El núcleo potencial se extiende hasta una distancia de dos diámetros desde el orificio y, a partir de una distancia de cuatro diámetros a lo largo del eje, prevalece un decaimiento hiperbólico del valor máximo de la velocidad axial, definido por la ecuación:

$$u_m / u_{mo} = \left[6,8(1 + 6,8S^2) \right] d / (x + a) \quad (12.65)$$

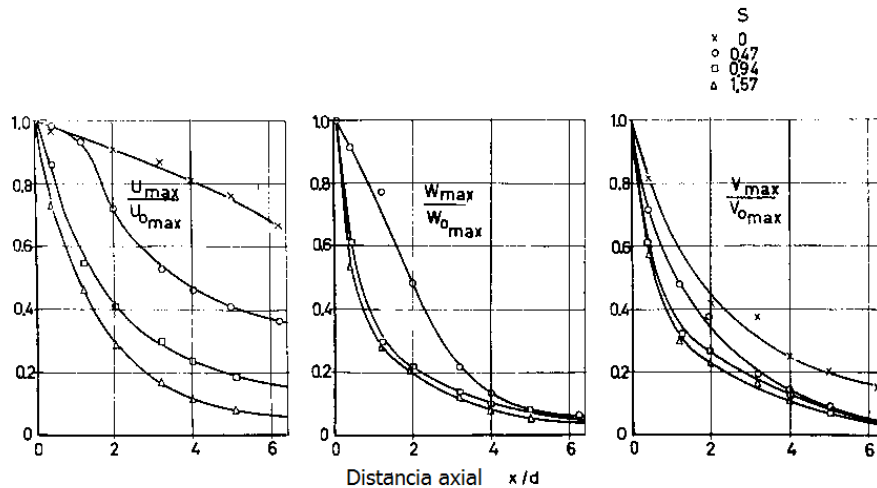
- El decaimiento de la máxima velocidad de remolino es independiente del número de remolino. La constante de decaimiento de la velocidad de remolino es igual a $(a/d)^2 \cdot (a/d)^2$
- El ángulo de ensanchamiento del chorro, α , medido entre el eje del chorro y la línea $u = 0,5 u_m$, aumenta, con S tendiendo a alcanzar un valor asintótico; no obstante, hay que tener presente que este comportamiento depende de si existe o no una pared normal al eje del chorro en el plano del orificio de salida. Para remolinos débiles, los resultados experimentales satisfacen la relación:

$$\alpha = 4,8 + 14S \quad (12.66)$$

Como consecuencia del ensanchamiento del chorro, el arrastre de fluido entorno aumenta y causa un decaimiento de velocidad (y de la concentración de fluido del chorro, si este es distinto del fluido arrastrado) tanto mayor cuanto mayor es la distancia al orificio (v. figura 12.41).



Fig. 12.41.
Decaimiento de los
valores máximos de las
componentes axial,
radial y tangencial de la
velocidad a lo largo de
los chorros [BCh74]



Una vez el chorro ha alcanzado su desarrollo pleno, las componentes axial y radial de la velocidad decaen como x^{-1} y la componente tangencial como x^{-2} , tal como predice la teoría.

- El flujo másico de fluido arrastrado del medio entorno varía linealmente con x , conforme a la ecuación:

$$\dot{m}_e / \dot{m}_0 = (0,32 + 0,8S)x / d \quad (12.67)$$

Remolino fuerte, $S > 0,6$

Alcanzado un valor del número de remolino superior a 0,6, el gradiente de presión adversa a lo largo del eje del chorro se impone al valor de la energía cinética del fluido en tal dirección. Como consecuencia, se establece un flujo de recirculación en la parte central del chorro entre dos puntos de estancamiento. Esta zona de recirculación, que tiene la forma de un vórtice toroidal, desempeña un papel importante en la estabilización de las llamas de difusión, ya que constituye una zona de muy buena mezcla de los productos de combustión y actúa como un almacén de calor y de especies químicamente activas, localizado en el centro del chorro, cerca de la salida de combustible. Más adelante, trataremos de ello con más detalle.

En el interior del generador de remolino, la distribución de velocidad tangencial adopta la forma del vórtice libre-forzado de Rankine, que decae a una distribución de vórtice forzado en el plano de salida.

El comportamiento de los flujos con alto valor del número de remolino es complejo y su descripción resulta complicada, por las diversas inestabilidades y cambios en los patrones de flujo que resultan de variaciones en el número de Reynolds y en el número de remolino. Sarpkaya²⁶ ha demostrado que, a un número de Reynolds inferior a 10^3 y con un número de remolino mayor que 0,6, ocurre habitualmente una distribución de velocidad tangencial del tipo de vórtice forzado y un perfil de distribución de velocidad axial casi uniforme en la garganta de salida del generador de remolino. A medida que el número de Reynolds aumenta, se desarrolla una inestabilidad, fenómeno denominado “derrumbre del vórtice”, que se manifiesta inicialmente como una pequeña burbuja



cerrada de fluido circulante en el eje de simetría. Después, a corta distancia, el flujo retorna a una forma estable, y entonces se derrumba de nuevo. Faler y Leibovich²⁷ han demostrado que existen en total seis modos de ruptura del núcleo vórtice, a medida que varían el número de Reynolds y la circulación del flujo.

Cuándo y dónde ocurre el derrumbe del vórtice es una función de Re y de S , cuyo conocimiento es de sumo interés. Sin embargo, por la información disponible, al parecer el fenómeno de “derrumbe del vórtice” todavía no ha sido comprendido totalmente.

Una vez ha ocurrido este fenómeno, aparecen dos posibles estados de flujo principales, cuyas características respectivas son:

- Flujos que contienen una gran inestabilidad tridimensional dependiente del tiempo, que se denomina *núcleo del vórtice predecesor* (en inglés, PVC).
- Flujos en que la amplitud del núcleo del vórtice predecesor está amortiguada, al menos, una orden de magnitud.

Que ocurra uno u otro de estos dos estados de flujo depende de las diversas restricciones geométricas y físicas impuestas.

A medida que el PVC deja el generador de remolino, su divergencia respecto del eje de simetría continua de tal manera que, en $x/D_e > 0,8$, una gran parte del movimiento tridimensional dependiente del tiempo parece que se ha disipado. En la salida, se forma un gran remolino en la dirección radial-axial, justo dentro del sendero del PVC. Si los valores del número de Reynolds son bajos, este remolino es estable, pero a medida que Re aumenta es aparentemente sembrado desde cada uno de los lados del generador del remolino, después de que pase el PVC.

El fenómeno del PVC y las inestabilidades que conlleva explican el muy alto nivel de turbulencia que se mide en el generador de remolino con entradas axial y tangencial, cuya configuración se muestra en la figura 12.42.

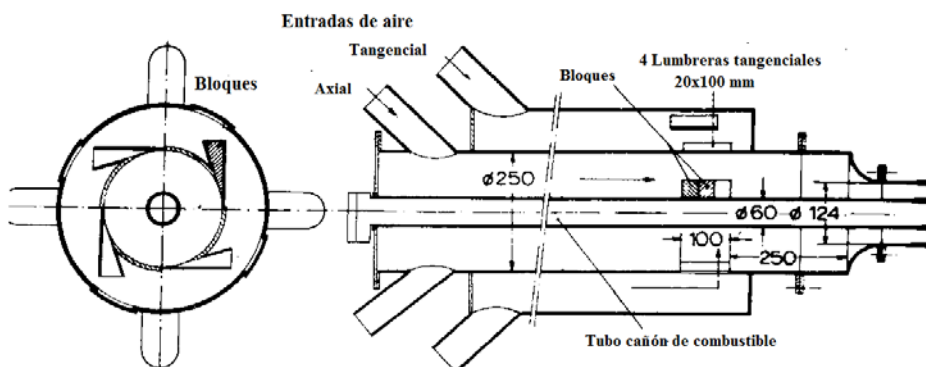


Fig. 12.42.
Esquema de quemador
con remolino de
entradas axial y
tangencial²⁰ [BCh74]

(Ver [BCh74] [Sch80])



12.7 Interacción, en cámaras de combustión, de chorros turbulentos de aire con remolino y atomizados de combustible

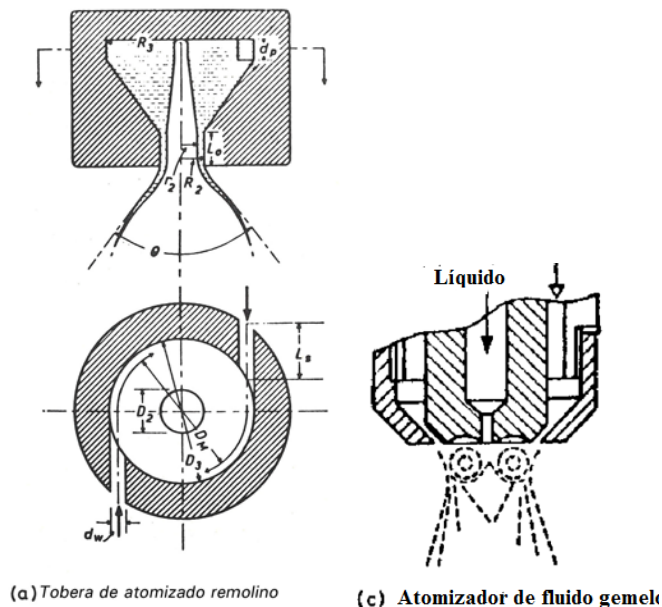
La interacción de flujos de torbellino con la termocinética de combustión es un fenómeno complejo e importante, pues la combustión tiene un efecto decisivo sobre el PVC y, por consiguiente, sobre la aerodinámica del flujo generado en los quemadores con remolino. El PVC puede ser excitado o bien amortiguado meramente alterando el modo de entrada del combustible.

En el libro *Swirl Flow*,²⁵ se encuentra una tabla donde se resumen las características de la llama que resulta de diferentes modos de entrada del combustible. En este apartado, exponemos únicamente los efectos de interacción de los chorros turbulentos con remolino, con los atomizados de combustible líquidos y la termocinética de combustión de gota, puesto que consideramos que esta técnica de combustión es la de mayor complejidad.

Los combustibles líquidos se inyectan en cámaras de combustión por medio de atomizadores, cuya misión es desintegrar una lámina fina de combustible en gotas con una distribución de tamaños especificada y controlar, en parte, la distribución espacial de las mismas.

La mayoría de combustibles líquidos utilizados en la práctica, fuelóleos ligeros y pesados, se atomizan en gotas con una distribución de tamaños cuyo valor medio se sitúa entre los 75 y los 130 μm y un tamaño máximo inferior a 250 μm .

Fig. 12.43.
Tipos de atomizador²⁰
[BCh74[



La figura 12.43 muestra dos configuraciones de atomizador. Uno de los atomizadores más utilizados es el de chorro a presión (v. figura 12.43a). En este tipo de atomizador, el líquido entra tangencialmente en una cámara de remolino, de la cual emerge por un orificio en forma de una lámina cónica.



En el atomizador de fluido gemelo (v. figura 12.43c), una corriente de gas a alta velocidad impacta sobre una corriente de líquido a velocidad relativamente baja, ya sea en el interior del propio atomizador o en el exterior.

En caso de atomizado en una cámara de combustión, dado su tamaño limitado, es necesario reducir la longitud de penetración del atomizado, lo cual solo se puede conseguir cuando existe una diferencia de velocidad significativa entre la lámina líquida que ha de ser atomizada y la corriente de aire ambiente confluyente. Así ocurre en los atomizadores por soplado de aire: la película líquida es expuesta a una corriente de aire de alta velocidad.

El proceso complejo de formación de una gota a partir de una lámina delgada de líquido sujeta a ondas sinuosas aerodinámicas fue idealizado por Dombrowski²² (v. figura 12.44).

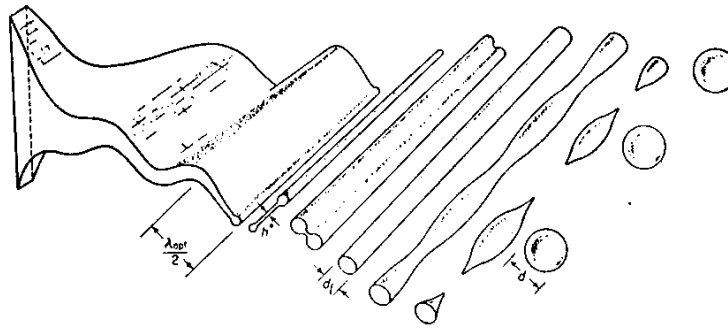


Fig. 12.44.
Esquema del proceso idealizado de formación de una gota a partir de una lámina líquida²²

El principio fundamental de la desintegración de un líquido consiste en incrementar su superficie hasta que deviene inestable. Las inestabilidades hidrodinámicas que intervienen en el proceso de rotura conducen a una atomización primaria de la vena líquida para formar filamentos que ulteriormente, siguiendo el mecanismo clásico postulado por Lord Rayleigh, rompen corriente abajo en hilera de gotas como resultado de la interacción con el flujo de gas turbulento envolvente en la región de atomización secundaria.

Weber demostró que, para líquidos viscosos, la longitud de onda óptima para rotura de chorro es:

$$\sqrt{2} \pi d_j \left[1 + 3\eta (\rho_l \gamma d_j)^{-1} \right] \quad (12.68)$$

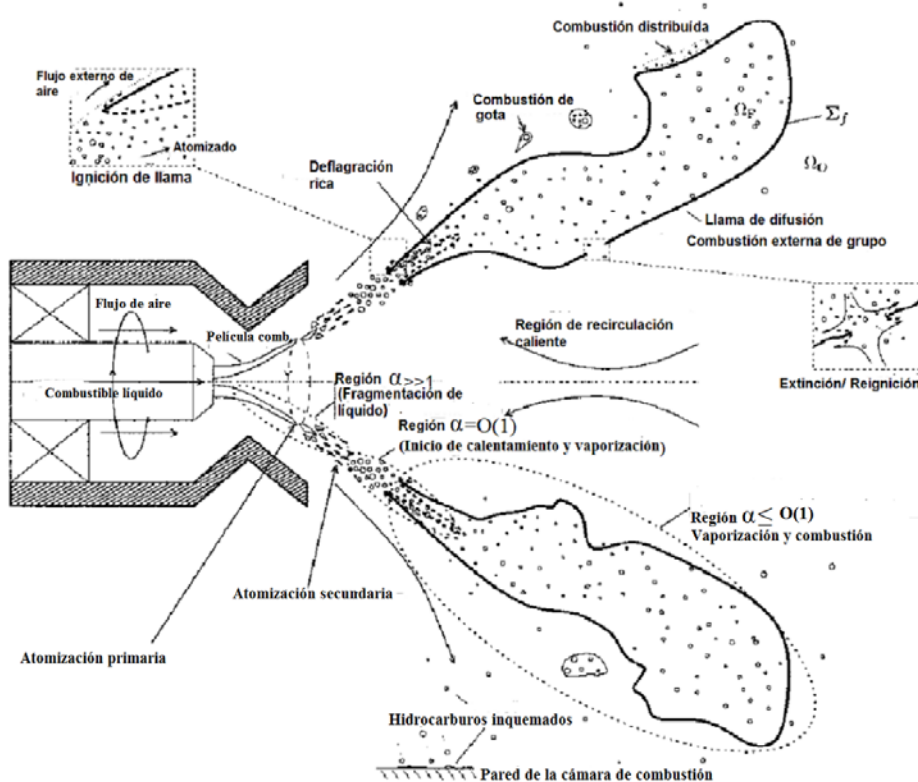
Procede ahora exponer la influencia de la interacción, en cámaras de combustión, de los chorros turbulentos anulares con torbellino de aire y el atomizado de combustible líquido.

Un enfoque primario pretende examinar el efecto del acoplamiento entre turbulencia, evaporación, mezcla y combustión. En relación con estos aspectos del proceso de combustión, procede introducir alguna precisión.

El chorro turbulento con remolino de aire afecta la longitud y la trayectoria de la lámina de combustible líquido, el grado de atomización y la distribución inicial de los tamaños de gota, el grado de mezclado de combustible/aire, la velocidad de combustión, la

estabilidad de llama y, lo que es más importante, las trayectorias de las gotas en el atomizado que se ven afectadas por las corrientes de aire.

Fig. 12.45.
Esquema del proceso
fundamental de
combustión de
atomizado en típicos
sistemas de combustión
continua de
combustibles líquidos²³



En la figura 12.45, se muestra las diferentes regiones de atomización y combustión en que influye el chorro anular con remolino.

De los resultados experimentales sobre atomización, se desprende que casi todas las gotas formadas tienen velocidades inferiores a la de la lámina de procedencia. Los límites de distribución de velocidad son muy amplios, particularmente para tamaños de gota inferiores a 100 μm , cuyas velocidades van desde aproximadamente 35 m/s (velocidad de la lámina al desintegrarse) hasta la velocidad de la corriente de aire, aproximadamente 15 m/s.

Las trayectorias de gota también varían. Inicialmente, sus ángulos se encuentran en el intervalo de 10° a 70° en caso de gotas de 100 μm , procedentes de una lámina cónica de 42°, aproximadamente. Las gotas de mayor tamaño tienden a adquirir un ángulo de trayectoria y una velocidad inicial próximas a las de la lámina líquida origen.

Los patrones de flujo de aire a través de los cuales pasa el atomizado líquido generalmente son complejos e implican torbellinos de recirculación con flujo hacia adelante y hacia atrás y reflujo asociado, con regiones de elevada cortadura y alta intensidad de turbulencia. Estas características del flujo de aire afectan las fuerzas de arrastre de la gota, que desempeñan un papel destacado en sus valores de velocidad y ángulo de trayectoria.



En particular, la turbulencia en la corriente de aire afecta el coeficiente de arrastre aerodinámico de la gota en los atomizados, además de los efectos de interacción con otras gotas. Para valores bajos del número de Reynolds, la expresión del coeficiente de arrastre, C_D , utilizada por Mellor para la predicción de trayectorias de gota, es:

$$C_D = \frac{1}{Re} \left(23 + \sqrt{1 + 16Re^{1/3}} \right) \quad (12.69)$$

La figura 12.46 muestra la comparación de los resultados predichos y experimentales para ángulos de trayectoria de gotas de 80 μm en diferentes posiciones, radial y axial. La influencia de la corriente de aire en el ángulo de trayectoria de gotas en ambas direcciones es muy significativa.

12.7.1 Efectos del chorro turbulento anular de aire con remolino sobre el proceso de combustión de combustibles líquidos atomizados

Para la formulación completa de los problemas de combustión de atomizados, se deben desarrollar expresiones para las magnitudes m , q_d y \vec{f} , que representan los resultados de la interacción entre el gas y las gotas: flujo másico de vapor generado por la gota, flujo de calor recibido y fuerza de arrastre fluidodinámica sobre la gota por la corriente de gas envolvente, respectivamente, todas ellas por unidad de superficie de gota. Ello comporta la necesidad de describir el campo de flujo en el entorno de la gota, donde el problema admite una solución cuasiestacionaria, dado que el tiempo de transporte difusivo y el tiempo de residencia local, que pueden considerarse del mismo orden de magnitud, son siempre mucho menores que el tiempo de vida característico de la gota, $t_v \sim (a^2 / D_T)(\rho_l / \rho)$ $t_v \sim (a^2 / D_T)(\rho_l / \rho)$, dado que ρ_l / ρ es muy grande.

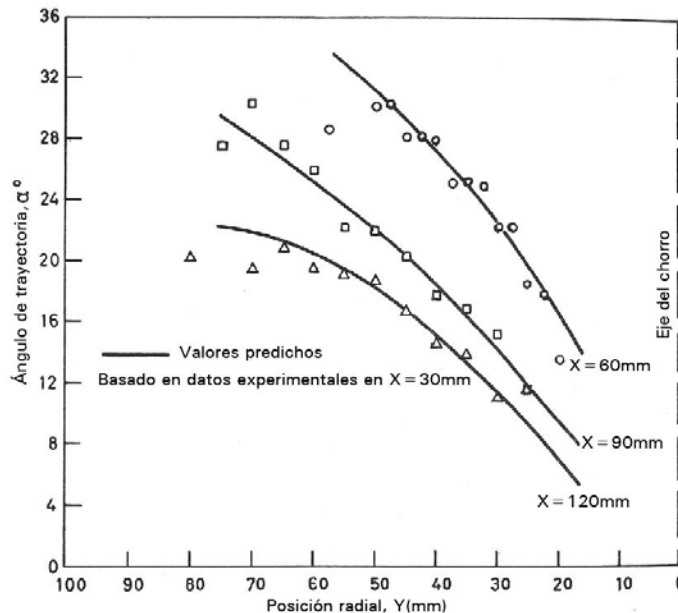


Fig. 12.46.
[BCh74]



El efecto de remolino sobre la prestación y la eficiencia de una cámara de combustión ha sido objeto de muchas investigaciones. Ya desde los primeros experimentos, se sospechó que la variación del número de remolino influía notablemente en la distribución del tiempo de residencia en la cámara de combustión. Los estudios realizados a tal fin demuestran que la distribución de tiempos de residencia puede controlarse por remolino y que la proporción de tiempo de residencia en la sección agitada t_s / \bar{t} como función del número de remolino S pasa por un mínimo a medida que el grado del mismo va aumentando.

Entre las muchas influencias del chorro de aire con remolino, con un valor del número de remolino $S > 0,6$, sobre el proceso de combustión de combustibles líquidos atomizados, cabe distinguir las siguientes:

- Longitud de la llama

En las llamas de difusión, la longitud de la llama depende esencialmente de la tasa y la rapidez de mezcla entre el combustible y el aire. El arrastre de aire dentro del núcleo es reducido y, puesto que el combustible se introduce y permanece casi por completo dentro del núcleo-vórtice, el consiguiente retardo en el proceso de mezcla da como resultado una mayor longitud de la llama.

Por otra parte, la recirculación hacia el núcleo-vórtice de gases de combustión calientes y el incremento de temperatura que los gases contenidos en él experimentan como resultado de la combustión, aunque limitada, del combustible no quemado arrastrado hacia él provocan un incremento del volumen de la zona (v. figura 12.40) y, por consiguiente, de la longitud de la llama.

- Los tamaños de la gota, la dispersión y el mezclado en la corriente de aire

El diseño del sistema de combustión debe asegurar que el tiempo de residencia que lleva asociado, como cociente entre la longitud de penetración del atomizado y la velocidad de inyección, sea comparable al tiempo de vida característico de la gota y también al tiempo característico de ignición. En estas condiciones, la dispersión de gotas que resulta del arrastre de gas turbulento contribuye eficazmente a la eficiencia del proceso de combustión.

Las escalas integrales del flujo turbulento, asociadas a los remolinos de máximo tamaño, son comparables a las escalas macroscópicas del chorro, aunque algo menores que ellas.

En la región del chorro cuyo radio característico es R_s , donde la relación de carga de masa media disminuye a valores del orden de la unidad y la distancia entre partículas contiguas de radio a es l_d , se cumple evidentemente la condición $R_s \gg l_d \gg a$, que garantiza la validez de la aproximación multicontinuo para la descripción de las interacciones interfaz que ocurren en estas escalas integrales, incluyendo en particular la dispersión de gotas, que en los flujos de cortadura está dominada a menudo por los grandes remolinos energéticos. Estos grandes remolinos coexisten e interaccionan con vórtices más pequeños, de tamaño decreciente, tendente a la escala de longitud de Kolmogorov. Sin embargo, los efectos de la interacción de las gotas con los remolinos de tamaño inferior a l' se suponen débiles.



El diseño de sistemas de combustión de combustibles líquidos atomizados está sujeto a un número de restricciones derivadas de la necesidad de vaporizar las gotas, de mezclar el vapor combustible con el aire envolvente y de encender y quemar completamente la mezcla resultante en el tiempo limitado de residencia disponible, a lo cual se añaden las escalas y los parámetros de los diferentes procesos fisicoquímicos que intervienen en la determinación de las prestaciones del sistema de combustión. Al respecto, los factores determinantes son fundamentalmente tres: la distribución del tamaño de la gota con un valor medio pequeño; la dispersión rápida y extensa de las gotas en la cámara, y la velocidad de calentamiento, que depende de la temperatura del aire envolvente y de la relación entre la masa de líquido y la masa de gas envolvente definida por el parámetro:

$$\alpha = (4\pi/3)a^3\rho_l n / [\rho(1-\phi)] \quad (12.70)$$

donde n es el número de gotas por unidad de volumen, a es el radio de gota, ρ_l y ρ representan la densidad del líquido y del gas, respectivamente, y ϕ es la fracción del volumen ocupado por las gotas.

La distribución de α en el chorro atomizado no es uniforme. Su valor decrece a causa de la dispersión de gotas desde valores muy grandes cerca del atomizador hasta valores pequeños bastante lejos corriente abajo (v. figura 12.45).

Un problema interesante en relación con los flujos de alto número de Reynolds que se dan en las cámaras de combustión industriales es el de la capa de mezcla a contracorriente. En estas cámaras, las configuraciones a contracorriente local emergen en torno al punto de remanso que se forma cerca de la salida del inyector.

La dinámica de gotas en las capas de mezcla a contracorriente depende, fundamentalmente, del número de Stokes dado por la relación del tiempo de acomodación característico de la gota, $t_a t_a$ con el tiempo característico del flujo, y sus trayectorias están muy próximas a las de las partículas de gas, mientras que, para valores mucho más grandes que la unidad, las gotas se mueven siguiendo unas trayectorias aproximadamente balísticas, muy poco influidas por las fuerzas aerodinámicas.

Para el caso a contracorriente, existe un valor crítico del número de Stokes, del orden de la unidad, en que las gotas no pueden atravesar la superficie de estancamiento sino que, en su lugar, tienden a acumularse allí. Por el contrario, las gotas cuyo número de Stokes es superior al crítico atraviesan la superficie de estancamiento y, a continuación, se evaporan.

La dinámica de ignición resultante depende de la dispersión de las gotas en presencia de movimiento turbulento.²⁸ La dispersión óptima de la gota se alcanza para valores del tiempo de gota de Stokes del orden de la escala de tiempo integral de los grandes vórtices en la capa de mezcla. Por el contrario, las gotas con un tiempo de Stokes suficientemente pequeño se comportan como trazadoras de flujo y son arrastradas por los remolinos turbulentos de gran escala, donde entran en contacto con el aire a alta temperatura.

– El calentamiento y la vaporización de gota

El flujo de calor en la superficie de la gota se expresa:

$$\vec{q} = -k\nabla T + \rho \sum_{i=1}^N h_i Y_i \vec{V}_i + \vec{q}_r \quad (12.71)$$



Aparte del término de Fourier y del flujo específico de calor por radiación, el término sumatorio, que representa la energía transferida por transporte difusivo de especies químicas, depende de la velocidad de difusión de las especies, \bar{V}_i , que se expresa por la ley de Fick.

La dinámica de vaporización global y de combustión del atomizado viene determinada por efectos de grupo con el medio entorno de gas generado colectivamente por las gotas. Chyu y colaboradores²⁹ han propuesto un simple parámetro adimensional, denominado *número de combustión del grupo*, GG , bajo determinadas hipótesis simplificadoras, para definir el control de las transferencias de energía y de masa entre la nube de gotas y la atmósfera envolvente. El producto $\alpha t_c / t_v$, que mide la extensión de la vaporización del atomizado, es esencialmente el grupo de combustión.

En general, el líquido está frío inicialmente, y el calentamiento y la vaporización de las gotas se debe al calor sensible del gas caliente que las rodea, que puede incluir los productos de combustión que recirculan en la cámara de combustión y del chorro de aire, si ha sido precalentado. La extensión del intercambio de calor entre las fases líquida y gaseosa depende del valor local de α . Solo se producen un calentamiento y una vaporización significativos cuando el valor de α es del orden de la unidad, valor que se alcanza cuando el radio de la superficie frontera del atomizado es igual al producto del ángulo de expansión por la longitud de penetración del atomizado.

Los principales efectos sobre la vaporización de la gota provocan la interacción con la fase gaseosa en el entorno, particularmente cuando el número de Reynolds de gota, definido por el diámetro de gota $2a$ y la velocidad de deslizamiento $|\vec{v} - \vec{v}_d|$ entre la velocidad del gas en torno a la gota y la velocidad de gota, es del orden de la unidad. La velocidad de deslizamiento instantánea del gas con respecto a la gota es modificada por las fluctuaciones de velocidad, rápidas y pequeñas, de los vórtices de Kolmogorov que interaccionan con los grandes remolinos que coexisten en el chorro de aire inyectado.

En la región principal de vaporización $\alpha = \tilde{O}(1)$ el tamaño de los grandes remolinos l' es una fracción del radio del atomizado R_s y las fluctuaciones de velocidad que llevan asociadas v' son una fracción de la velocidad del chorro U_j , con tiempos de vuelco de remolino del orden de $l' / v' \sim R_s / U_j$.

Las medidas de las distribuciones de temperatura han confirmado el significado del flujo de remolino tanto en la estabilización de la llama como en el control de la combustión. Particularmente, la tasa de incremento de temperatura aumenta considerablemente al aumentar el número de remolino.

La manera en que la combustión se estabiliza corriente abajo desde la región de vaporización inicial depende, fundamentalmente, de las condiciones de inyección. Cuando la velocidad de flujo existente es suficientemente baja, la combustión se establece a través de frentes parcialmente mezclados, que se propagan a lo largo de capas de mezcla en la mezcla no uniforme creada corriente arriba por el atomizado que se evapora. Si las velocidades de inyección son mucho más altas que la velocidad de deflagración característica, la estabilidad de la combustión debe confiar en la auto-ignición de la mezcla combustible-aire, que es facilitada por la temperatura elevada del gas envolvente, de modo que la ignición ocurre cerca del borde del chorro de atomizado, donde las temperaturas son más altas.



Para las gotas que se mueven con respecto al medio ambiente con un número de Reynolds Re_d del orden de la unidad, la llama de difusión envolvente alrededor de la gota se extingue cuando el radio de la gota es menor que un valor crítico del orden del espesor δ_l de la deflagración plana gaseosa estequiométrica. Para valores inferiores del radio de la gota, el vapor del combustible generado por la gota solo quemará en su estela.

La turbulencia de la corriente de aire incrementa las velocidades de combustión de las gotas, pues mejora la mezcla entre las bolsas de gas ricas y las deficientes de combustible, y también la transferencia de calor entre zonas de temperatura distinta.

– La estabilidad de la llama

Para flujos de elevado número de Reynolds, típicos de las cámaras de combustión de combustibles líquidos atomizados, la llama de difusión está anclada en capas de mezcla delgadas, que limitan la corriente portadora del atomizado. Estas capas de mezcla son distorsionadas y sometidas a tensión de cortadura por el flujo turbulento que, caso de tener un valor suficientemente grande, puede conducir a la extinción de llama, problema que se ha considerado recientemente en la combustión de los atomizados.

Por contra, si la velocidad media axial es baja (del orden de los 10 m/s), el grado de remolino favorable para la estabilización de la llama puede ser excesivo, desde el punto de vista de la eficiencia de la combustión. Se ha observado que una velocidad del orden de los 30 m/s y un valor del número de remolino de $S = 0,78$ son suficientes para estabilizar la llama, al tiempo que mejoran la mezcla e incrementan la intensidad de combustión, mientras que a 50 m/s la llama no puede estabilizarse, salvo que el quemador esté provisto de una tobera divergente corta refrigerada.

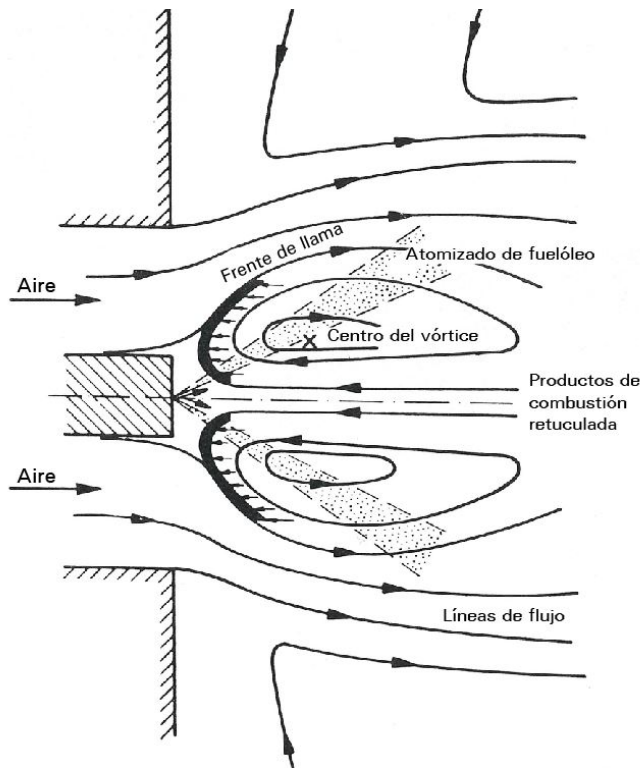
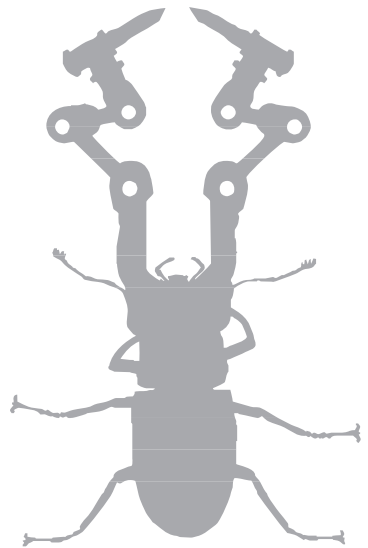


Fig. 12.47.
Zona de recirculación en
chorros anulares con
remolino [BCh74]



La estabilidad de la capa límite en la interfaz del núcleo-vórtice y la región de vórtice libre se ve afectada por el hecho de que esta interfaz es también la frontera de la llama. Acoplada con el campo de fuerza centrífuga, el gradiente radial de densidad en el flujo causa estratificación y la frontera resulta incluso más estable.

La figura 12.47 ilustra la estabilización de una llama de fuelóleo atomizado por una zona de recirculación interna en chorros anulares con remolino.





Penachos turbulentos. Chorros boyantes y penachos forzados

13.1 Penachos turbulentos

Por *penacho turbulento*, se entiende el flujo generado por gradientes de presión que resultan de la falta de homogeneidad en el campo de las fuerzas másicas. El parámetro fundamental controlador del penacho es el flujo específico de fuerzas de empuje ascensional.

El penacho más simple que cabe imaginar es el generado por una pequeña fuente de calor en un medio ambiente de gas en reposo. El calor que emite la fuente calienta el fluido que la rodea y produce una disminución local de la densidad con respecto a la del ambiente del entorno. A su vez, la diferencia de densidad que se manifiesta como gradiente da como resultado un gradiente de presión que acelera verticalmente el fluido calentado, en un proceso que se conoce como *convección*. Si la fuente de calor es estacionaria, el penacho que se genera también lo es, de modo que se mantiene un equilibrio entre el calor emitido por la fuente y el transportado por el penacho a partir de ella.

Otra causa que genera penachos es la inyección de un caudal \dot{V} de fluido de densidad ρ_a en un medio ambiente de densidad ρ_0 .

Cualquiera que sea la causa generadora del penacho, cabe definir un parámetro que lo caracteriza: el flujo específico de empuje ascensional B . Si el flujo de calor de la fuente es H y se transfiere a un medio ambiente de propiedades c_p , ρ , σ (calor específico a presión constante, densidad y coeficiente de expansión térmica volumétrica, respectivamente), dicho parámetro se expresa:

$$B = g\sigma H / \rho c_p \quad (13.1)$$

Para la otra causa mencionada, el parámetro se expresa:



$$B = g(\rho_a - \rho_0)V' / \rho_0 \quad (13.2)$$

En los gases ideales, σ y ρ son funciones de la inversa de T , de suerte que la conservación de calor implica también el mantenimiento del flujo de fuerza de empuje ascensional. En el caso al cual corresponde la ecuación 13.2, el principio de conservación de masa implica la conservación del flujo de fuerza de empuje ascensional solo si la densidad del medio ambiente ρ_a permanece constante.

Hay que tener presente que, si bien las principales propiedades de los penachos turbulentos se pueden derivar fácilmente suponiendo B constante, en muchos casos prácticos ello no es posible, por lo cual hay que recurrir a métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que definen el flujo.

Conviene distinguir entre dos fenómenos: el flujo generado por una liberación instantánea de una cantidad finita de causa una sola vez, y el flujo generado por una causa sostenida. El primer fenómeno es conocido como *thermal* y fue estudiado por primera vez por Morton, Taylor y Turner.¹ El segundo fue estudiado por Turner² y, posteriormente, por Delichatsios,³ que incluyó fuentes de calor de intensidad variable tales como las asociadas a un fuego que se extiende rápidamente.

Además del parámetro B , existen otros que traducen la influencia de las fuerzas de empuje ascensional, resultantes de las diferencias de densidad en el chorro, y que son significativos en comparación con las demás fuerzas. Son los siguientes:

- El número de Grashof, que relaciona las fuerzas de empuje ascensional con las fuerzas viscosas:

$$Gr \equiv \frac{g(\rho_\infty - \rho_{ch})d_{ch}^3}{\rho_{ch}\nu^2} \quad (13.3)$$

- El número de Froude, que relaciona las fuerzas de inercia con las de empuje ascensional:

$$Fr \equiv \frac{U_{ch}^2}{g[(\rho_\infty - \rho_{ch}) / \rho_{ch}]d_{ch}} \quad (13.4)$$

que también se expresa $Fr \equiv Re^2 / Gr$, donde $Re \equiv U_{ch}d_{ch} / \nu$ es el número de Reynolds del chorro en su salida:

$$S^* \equiv -\frac{g}{\rho_a(0)} \frac{d\rho_a(x)}{dx} \quad (13.5)$$

parámetro que representa la existencia de un gradiente de densidad en el medio ambiente en torno al chorro.

Para los penachos, no es posible definir inequívocamente la velocidad U_{ch} , de modo que se toma la relación (ν / d_{ch}) como velocidad característica en los números definidos.



13.1.1 Penachos estacionarios

En este apartado, se considera el movimiento inducido por una fuente estacionaria de flujo ascensional, ignorando los detalles del flujo en la proximidad a la fuente.

En general, se supone que las propiedades medias del movimiento pueden ser definidas por un funcional del flujo ascensional específico, B ; la distancia vertical desde la fuente, x ; la viscosidad cinemática del gas, ν , y su difusividad térmica, κ . Así, por ejemplo, la velocidad media del fluido en el eje del penacho a una distancia x de la fuente se expresa:

$$U_m = f(B, x, \nu, \kappa) \quad (13.6)$$

La aplicación al funcional (13.6) de un simple análisis dimensional da como resultado la expresión:

$$U_m = (B/x)^{1/3} f\left(\frac{B^{1/3} x^{2/3}}{\nu}, \frac{\nu}{\kappa}\right) \quad (13.7)$$

En la expresión (13.7), se reconoce que la velocidad media del gas en el eje del penacho ha de ser una función de un número de Reynolds local, $B^{1/3} x^{2/3} / \nu$, y del número de Prandtl, ν / κ , sin que aparezca un factor representativo de la posible influencia del tamaño de la fuente, lo cual parece justificado si la distancia x desde la fuente es grande. No obstante, existe evidencia suficiente para sugerir que la forma de la fuente puede causar efectos de intensos flujos secundarios a ciertas distancias corriente abajo.

Para movimientos totalmente turbulentos, cabe suponer autosemejanza en el número de Reynolds local e influencia despreciable de las propiedades de transporte molecular del gas. Por todo ello, la función f en la expresión (13.7) debería tender a un límite no nulo k .

Así pues, se puede definir la velocidad media del fluido en el eje del penacho mediante las ecuaciones siguientes:

Penachos circulares
$$U_m = k_R (B/x)^{1/3} \quad (13.8)$$

Penachos planos
$$U_m = k_p B_e^{1/3} \quad (13.9)$$

En la ecuación 13.9, B_e representa el flujo ascensional específico por unidad de longitud de penacho; sus dimensiones son $L^3 T^{-3}$.

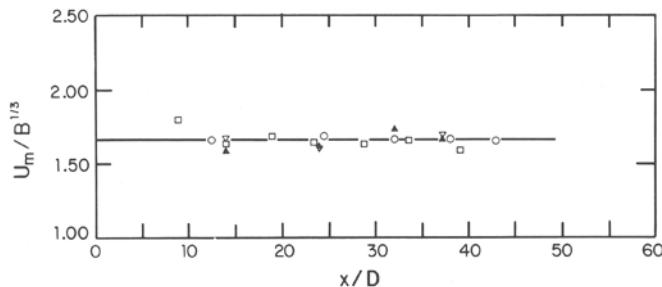


Fig. 13.1.
Velocidad media máxima en el eje de un penacho plano⁵



Para los factores k_R y k_P , varios investigadores han propuesto valores que difieren bastante entre sí; así, Chen y Rodi⁴ proponen 3,5 y 1,9, respectivamente, mientras que Kotsovinos⁵ encuentra el valor de 1,66 para k_P a partir de medidas de velocidad, y otros investigadores sugieren para k_R un valor comprendido entre 3,4 y 3,9; incluso se encuentra el valor 4,7, aunque este último no parece merecer mucho crédito. La figura 13.1 muestra la variación de la velocidad media máxima del fluido en el eje de un penacho plano, en función de la distancia relativa a su origen, a partir de las medidas realizadas por Kotsovinos.

13.1.2 Características físicas de los penachos

Una característica física interesante de los penachos es que, aceptado como apropiado el supuesto de autosemejanza, todas las propiedades medias del flujo inducido se describen mediante un simple parámetro de penacho: el flujo específico de empuje ascensional B . Algunas de estas propiedades medias de flujo son las siguientes:

Flujo de cantidad de movimiento total, caudal y dimensión transversal del penacho

Por razonamientos dimensionales, se llega a definir asintóticamente el flujo de cantidad de movimiento total m para un penacho axisimétrico por la expresión:

$$m \cong k_m B^{2/3} x^{4/3} \quad (13.10)$$

Por otra parte, el caudal se expresa:

$$\mu = k_\mu B^{1/3} x^{5/3} \quad (13.11)$$

El parámetro $\mu / m^{1/2}$ es una medida del ancho de penacho, es decir, una escala de longitud local. Este parámetro se expresa en términos de las ecuaciones 13.10 y 13.11 de la forma siguiente:

$$\frac{\mu}{m^{1/2}} = \frac{k_\mu}{k_m^{1/2}} x \quad (13.12)$$

A partir de la ecuación 13.12, se deduce el invariante del penacho:

$$C_p = \frac{\mu}{m^{1/2} x} \quad (13.13)$$

y, a partir de las expresiones 13.10 y 13.11, el invariante:

$$R_p = \frac{\mu B^{1/2}}{m^{5/4}} \quad (13.14)$$

que es el número de Richardson de penacho.

Los valores de las constantes k_m y k_μ se determinan a partir de los perfiles de velocidad media obtenidos experimentalmente y, una vez conocidos m y μ , se calculan los invariantes C_p y R_p .



Chen y Rodi⁴ proponen los siguientes valores $C_p = 0,25$ y $R_p = 0,55$, pero otros investigadores aportan valores bastante en desacuerdo con ellos.

Para penachos planos, los resultados equivalentes son:

$$\mu = k_\mu B_e^{1/3} x \quad (13.15)$$

y

$$m = k_m B_e^{2/3} x \quad (13.16)$$

Por consiguiente, los invariantes se escriben:

$$C_p = \frac{\mu^2}{mx} = 0,29 \quad (13.17)$$

y

$$R_p = \frac{\mu^2 B_e^{2/3}}{m^2} = 0,735 \quad (13.18)$$

Con base en la escala de velocidad m / μ y la escala de longitud $\mu / m^{1/2}$, se define el número de Reynolds de penacho local $m^{1/2} / \nu$, cuyo valor aumenta con la distancia al origen del penacho.

Variación del caudal a lo largo del penacho. Arrastre del fluido ambiente

La tasa de variación de caudal a lo largo del penacho es una medida de la tasa de arrastre del fluido ambiente por el penacho. Aunque hay dudas sobre si el proceso de arrastre es un mecanismo de vórtices de gran escala como así parece en los chorros, una fotografía aportada por Kotsovinos (v. figura 13.2) sugiere que el proceso es similar, si bien el mecanismo promotor puede ser diferente.



Fig. 13.2.
Fotografía de un
penacho plano
turbulento que
muestra movi-
mientos de gran
escala⁶



Para penachos circulares, la tasa de arrastre se obtiene derivando con respecto a x la ecuación 13.11 y se obtiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{5}{3} k_{\mu} B^{1/3} x^{2/3} \quad (13.19)$$

o bien
$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{5}{3} C_p m^{1/2} \quad (13.20)$$

Análogamente, para penachos planos, se obtiene:

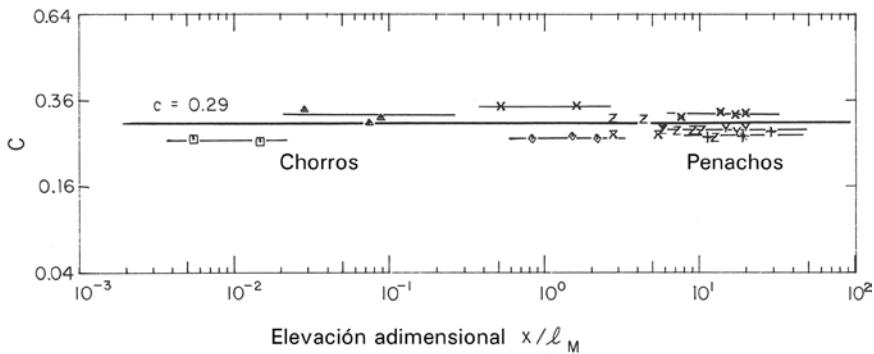
$$\frac{d\mu}{dx} = k_{\mu} B_e^{1/3} = \frac{k_{\mu}}{k_m^{1/2}} \left(\frac{m}{x} \right)^{1/2} \quad (13.21)$$

y

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{C_p m}{x} \right)^{1/2} \quad (13.22)$$

Un hecho importante es que, aun siendo diferentes las tasas de arrastre en los chorros y los penachos, los valores determinados experimentalmente de los invariantes son los mismos para los penachos y los chorros circulares y planos. Para los chorros y los penachos circulares, el invariante C_p (13.13) tiene un valor de 0,25 y para los chorros y los penachos planos (13.17), su valor es de 0,29 (v. figura 13.3).

Fig. 13.3.
 $C = \mu^2 / mx$
para chorros y penachos planos⁶



Decaimiento de la temperatura media o bien de la concentración del trazador a lo largo del eje del penacho

El decaimiento se especifica mediante la tasa de variación del caudal. Sea Y el flujo másico total del trazador o bien el flujo de calor, que debe conservarse, y $\hat{\theta}$ la tasa de cambio de concentración del trazador ponderada por el flujo. Entonces, para penachos y chorros circulares, se tiene:

$$Y = \hat{\theta} \mu = k_{\mu} \hat{\theta} B^{1/3} x^{5/3} = \int \overline{\theta u} 2\pi r dr \quad (13.23)$$



y para penachos planos:

$$Y = \hat{\theta}\mu = k_\mu \hat{\theta} B_e^{1/3} x = \int \overline{\theta u} dy \quad (13.24)$$

Como se comenta en el subapartado siguiente, hay algunas diferencias de opinión con respecto a las contribuciones relativas del flujo de turbulencia $\overline{\theta' u'}$ y el flujo advectivo $\overline{u\theta}$ a las integrales de las ecuaciones 13.23 y 13.24. Sin embargo, dada la autosemejanza de los perfiles de velocidad media \overline{u} y de temperatura media $\overline{\theta}$, cabe esperar que $\overline{u\theta}$ se escale también con U_m y θ_m .

Así, las ecuación 13.23 se escribe:

$$k_\mu \hat{\theta} B_e^{1/3} x^{5/3} = U_m \theta_m x^2 \int \frac{\overline{u\theta}}{U_m \theta_m} 2\pi \left(\frac{r}{x}\right) d\left(\frac{r}{x}\right) \quad (13.25)$$

Habida cuenta de las ecuaciones 13.8 y 13.9, que definen la velocidad media del fluido en el eje del penacho circular y en la línea media del penacho plano, respectivamente, la concentración media ponderada por flujo $\hat{\theta}$ se expresa:

$$\hat{\theta} = \left(\frac{k_R}{k_p}\right) \theta_m \int \frac{\overline{u\theta}}{U_m \theta_m} 2\pi \left(\frac{r}{x}\right) d\left(\frac{r}{x}\right) \quad (13.26)$$

Resulta que la concentración media ponderada por flujo en un penacho circular y en un penacho plano es un múltiplo directo de la concentración media (temporal) máxima. Esta magnitud se puede expresar así:

$$\text{Para penachos circulares} \quad \theta_m \sim Y B_e^{-(1/3)} x^{-(5/3)} \quad (13.27)$$

$$\text{Para penachos planos} \quad \theta_m \sim Y B_e^{-(1/3)} x^{-1} \quad (13.28)$$

Turbulencia

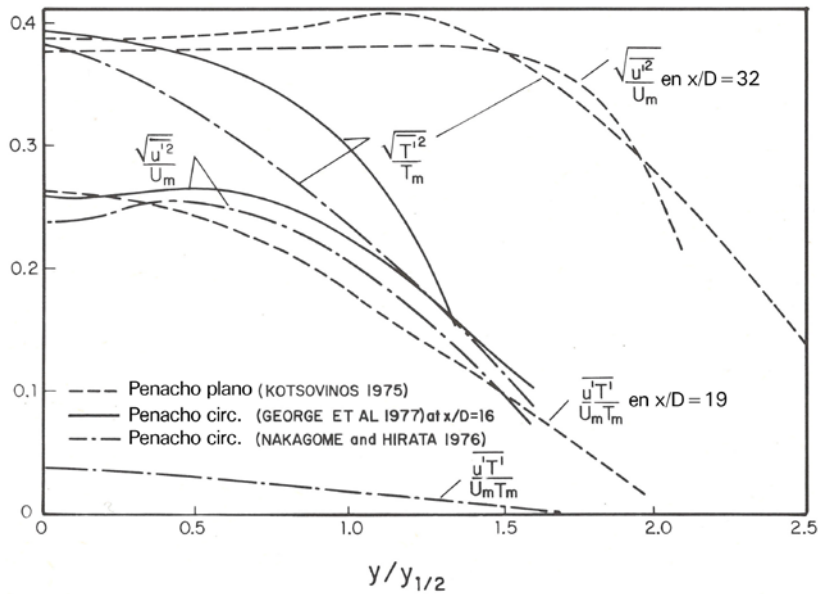
Kotsovinos y List⁶ y Beuther,⁷ entre otros, han medido la magnitud relativa de fluctuaciones turbulentas de velocidad y de temperatura en penachos planos. La figura 13.4 muestra las distribuciones de las fluctuaciones turbulentas relativas de velocidad y de temperatura. En ella aparece una inconsistencia, pues las medidas de la variancia de la velocidad no son del mismo orden que las de la temperatura, tanto en los penachos circulares como en los penachos planos. La resolución de esta discrepancia requerirá la realización de nuevos experimentos, que aporten resultados más fiables que los disponibles hasta el momento.

Otros investigadores concluyen, a la vista de los resultados experimentales obtenidos, que las variancias de velocidad y de concentración en la línea central de los chorros circulares y planos son del mismo orden. La magnitud relativa de las fluctuaciones



$\sqrt{u'^2}/U_m$ y $\sqrt{\theta'^2}/\theta_m$ se encuentra en el intervalo 0,25-0,29; fuera de la línea central, la magnitud relativa con respecto a los valores en la línea central cambia drásticamente.

Fig. 13.4.
Distribuciones
de magnitudes
turbulentas rela-
tivas en chorros
boyantes⁴



Cabe resaltar que, entre los perfiles de variancia de velocidad y de concentración en chorros y penachos, hay una diferencia básica.

Los perfiles de chorro muestran claramente la importancia de los términos generadores de cortadura en la producción de su máximo, mientras que, en los penachos, el perfil de velocidad es relativamente plano, lo cual indica la importancia del mecanismo que genera la flotación.

Con respecto al flujo de calor, las primeras medidas realizadas en chorros y penachos planos se deben a Kotsovinos. De sus medidas, se desprende que el valor punta de $\overline{u'T'}/U_m T_m$ es aproximadamente 0,065 para chorros planos y 0,25 para penachos planos. Con posterioridad al trabajo de Kotsovinos, varios investigadores han criticado estos valores por considerarlos muy altos.

(Ver [Rod82])

13.2 Chorros turbulentos boyantes. Penachos forzados

En este apartado, se considera la dinámica de flujos en que están presentes, a la vez, una cantidad de movimiento inicial y un empuje ascensional que tiene como efecto incrementar el flujo de la cantidad de movimiento.

La figura 13.5 muestra los tipos de flujo que cabe encontrar según la publicación de Chen y Rodi.

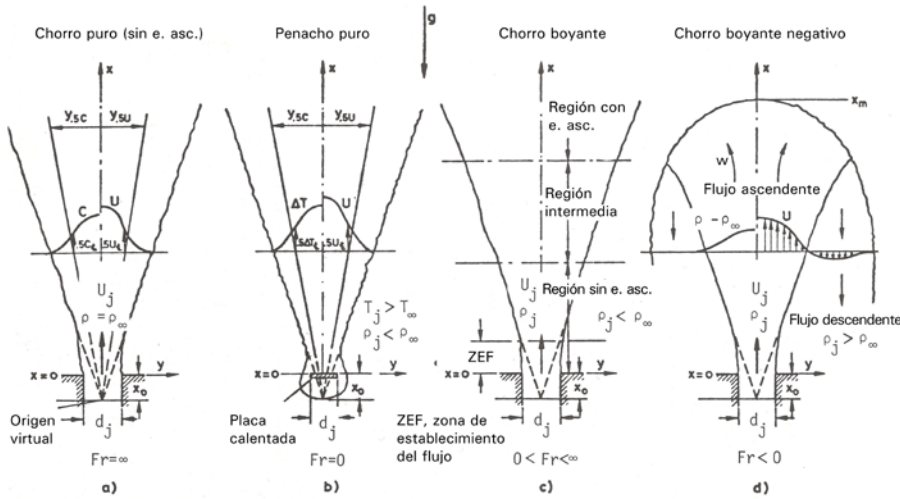


Fig. 13.5. Esquema de un chorro boyante en un ambiente estratificado

Cuando el flujo de la cantidad de movimiento generado por el gradiente de densidad es significativamente mayor que el flujo de la cantidad de movimiento inicial, entonces las características del flujo son más de penacho que de chorro. Esta transición de chorro a penacho está bien determinada por una escala de longitud característica, definida por los flujos específicos de cantidad de movimiento, M , y de empuje ascensional, B . Para los chorros circulares boyantes, la escala de longitud es $l_M = M^{3/4} / b^{1/2}$; para los chorros planos, es $l_H = M / B_e^{2/3}$, donde B_e y M son los flujos por unidad de longitud del orificio de salida del chorro plano.

Para comprender el significado de estas escalas de longitud, procede considerar la velocidad axial media U_m de un chorro boyante. En principio, cabe suponer que debe ser una función de M , B y x , de manera que se puede escribir:

$$U_m = \frac{M^{1/2}}{x} f\left(\frac{xB^{1/2}}{M^{3/4}}\right) \quad (13.29)$$

Dos son los límites que interesa analizar de la ecuación 13.29: cuando el argumento de la función f es mucho mayor que la unidad y cuando dicho argumento tiende a cero.

El primer caso comporta hacer M pequeño o bien B grande o x grande. Para M pequeño, se sabe que $U_m \sim (B/x)^{1/3}$; por consiguiente, para el argumento f tendiendo a infinito:

$$f\left(\frac{xB^{1/2}}{M^{3/4}}\right) \rightarrow \left(\frac{xB^{1/2}}{M^{3/4}}\right)^{2/3} \quad (13.30)$$

Análogamente, para el argumento de f tendiendo a cero, la función ha de tender a una constante.



Por consiguiente, las formas asintóticas de la función están especificadas por la magnitud relativa de x y $M^{3/4} / B^{1/2}$. Así pues, la escala de longitud $M^{3/4} / B^{1/2}$ separa la región de un chorro boyante que es como un chorro, de la región en que es como un penacho.

13.2.1 Análisis de chorros turbulentos boyantes

Dos de los primeros estudios de los chorros turbulentos boyantes se deben a Morton, Taylor y Turner,¹ y a Priestley y Ball.⁹ Aun cuando sus trabajos se basan en formas integrales de las ecuaciones del movimiento, entre ellos hay una sustancial diferencia: cómo se considera la tasa de variación de caudal dentro de un chorro turbulento. Los primeros investigadores consideran que la tasa de arrastre ha de ser proporcional a la velocidad axial en el penacho; los segundos utilizan una ecuación de conservación de energía para deducir la ecuación de arrastre que conduce a un coeficiente de arrastre variable, función del número local de Froude o bien del número de Richardson. La falta de acuerdo entre ambos enfoques propició la propuesta de uno nuevo, por parte de List e Imberger,¹⁰ basado en el reconocimiento de que la ecuación del movimiento podía expresarse en términos de dos parámetros: $C = \mu / m^{1/2} x$ y $R = \mu \beta^{1/2} / m^{5/4}$, donde β es el flujo boyante específico local. Las magnitudes μ, m, β para chorros boyantes circulares se definen

como $\mu = \int_{ch} 2\pi r \bar{u} dr$, $m = \int_{ch} 2\pi r \bar{u}^2 dr$, $\beta = \int_{ch} 2\pi r g \left(\frac{\rho_a - \bar{\rho}}{\rho_0} \right) \bar{u} dr$, respectivamente.

List e Imberger,¹⁰ utilizando los conocidos resultados de C , invariante en chorros y penachos, y de R , tendiendo a un valor constante en los penachos, derivan un conjunto de ecuaciones para especificar la función de arrastre suponiendo que los perfiles de distribución de velocidad y de concentración a través del chorro o del penacho están definidos por funciones de la forma:

$$\bar{u} = U_m \exp \left[- (y / b_u)^2 \right] \quad (13.31)$$

$$\bar{\theta} = \theta_m \exp \left[- (y / b_\theta)^2 \right] \quad (13.32)$$

donde b_u y b_θ representan la distancia lateral en el chorro en que la velocidad del fluido y la cantidad de movimiento del mismo son el 37 % de su valor máximo, respectivamente, e y es una distancia desde el eje del chorro-penacho circular o desde la línea central de un chorro-penacho plano. Sustituyendo estas ecuaciones en las expresiones dadas para μ, m , y β , se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 13.1.

La tasa de variación del flujo de cantidad de movimiento específico se define por la fuerza de empuje ascensional integrada que actúa sobre un plano de sección transversal del chorro. Cuando el medio ambiente tiene estratificada la densidad, representada por la frecuencia de Brunt-Väisälä $N^2 = \frac{-g}{\rho} \frac{d\rho_a}{dz}$, entonces la tasa de cambio

de flujo boyante es representada por N^2 veces el caudal local, tal como se muestra en la tabla 13.1.



Magnitud	Flujo plano	Flujo axisimétrico
Caudal μ	$\sqrt{\pi} b_u U_m$	$\pi b_u^2 U_m$
Flujo de cantidad de movimiento, m	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} b_u U_m^2$	$\frac{\pi}{2} b_u^2 U_m^2$
Flujo boyante, β	$\sqrt{\frac{\pi \lambda^2}{1 + \lambda^2}} g \theta_m b_u U_m$	$\frac{\pi \lambda^2}{1 + \lambda^2} g \theta_m b_u^2 U_m$
Tasa de cambio de caudal, $\frac{du}{dx}$	$2\alpha U_m$	$2\pi \alpha b_u U_m$
Tasa de cambio de cantidad de movimiento, $\frac{dm}{dx}$	$\sqrt{\pi} \lambda g \theta_m b_u$	$\pi \lambda^2 g \theta_m b_u^2$
Tasa de cambio de flujo boyante, $\frac{d\beta}{dx}$	$-\sqrt{\pi} b_u U_m N^2$	$-\pi b_u^2 U_m N^2$
Coefficiente de arrastre, α	$\alpha_j \exp \left[\ln \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_j} \right) \left(\frac{R}{R_p} \right)^{3/2} \right]$	$\alpha_j \exp \left[\ln \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_j} \right) \left(\frac{R}{R_p} \right)^2 \right]$
Número de Richardson, R	$\frac{\mu^2 \beta^{2/3}}{m^2}$	$\frac{\mu \beta^{1/2}}{m^{5/4}}$
Número de Richardson de penacho, R_p	0,735	0,557
Coefficiente de arrastre de chorro, α_j	0,052 \pm 0,003	0,0535 \pm 0,0025
Coefficiente de arrastre de penacho, α_p	0,102 \pm ?	0,0833 \pm 0,0042
Relación de ancho, $\lambda = \frac{b_\theta}{b_u}$	1,35	1,19

La figura 13.6 muestra el caudal de chorros turbulentos y de penachos circulares en función de la altura de la elevación, calculados aplicando las fórmulas de la tabla 13.1, y la comparación con los resultados experimentales de Ricou y Spalding (1961). La figura 13.7 muestra la misma relación de magnitudes comparada con los resultados experimentales de Kotso-vinos (1975). Los resultados correspondientes a penachos forzados han sido revisados posteriormente.



Fig. 13.6.

Caudal en chorros circulares boyantes turbulentos calculado con las ecuaciones recopiladas en la tabla 13.1 y su comparación con los resultados experimentales de Ricou y Spalding¹⁴

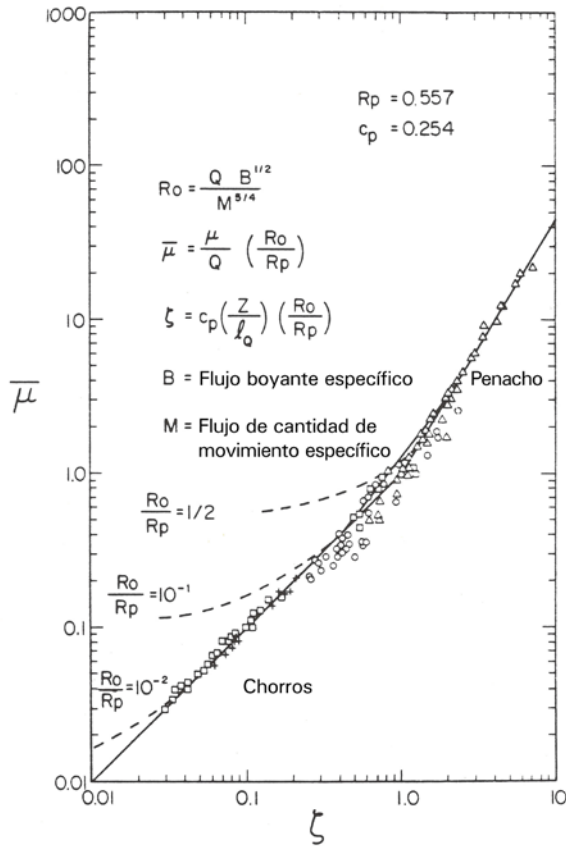
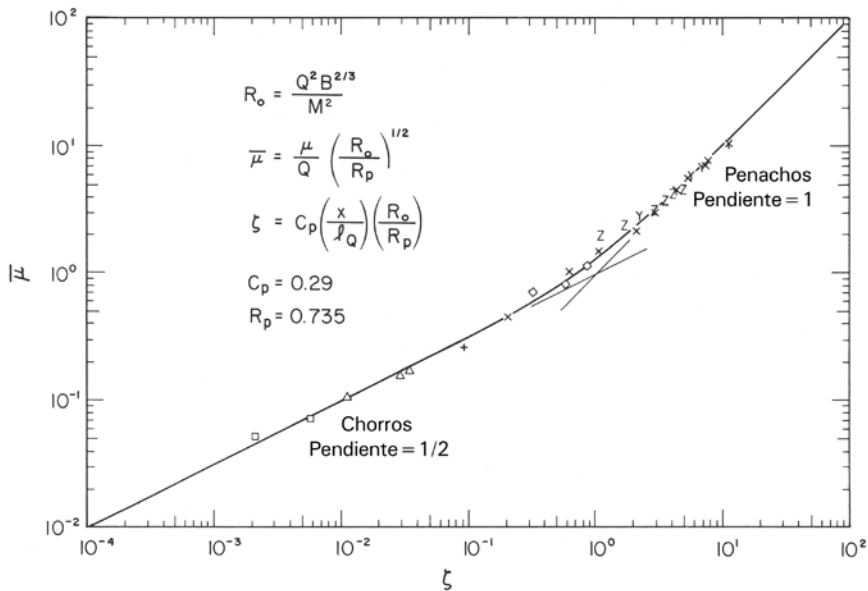


Fig. 13.7.
Caudal de chorros planos boyantes turbulentos calculado con las ecuaciones recopiladas en la tabla 13.1 y su comparación con los resultados experimentales de Kotsovinos





Ambientes de densidad estratificada

Cuando el fluido ambiente está estratificado estable, entonces un chorro boyante vertical, dirigido hacia arriba, arrastra inicialmente el fluido que es más denso que el del ambiente corriente abajo. Este fluido más denso, arrastrado por el chorro, tiene el efecto de inducir un flujo boyante negativo que destruye el flujo de cantidad de movimiento inicial y el flujo de cantidad de movimiento generado por cualquier flujo boyante positivo inicial. Cuando el flujo de cantidad de movimiento es anulado totalmente, el chorro cesa de elevarse e incluso puede caer hacia atrás ligeramente, y entonces inicia un desparramado horizontal.

La figura 13.8 es la imagen de un chorro boyante turbulento en una atmósfera de densidad estratificada que muestra su altura terminal de elevación y el desparramado posterior en capa de densidad neutra.



Fig. 13.8. Fotografía tomada por Leonard H. Delano de la erupción del Mt. St. Helens (Mayo 18, 1980) que muestra el chorro boyante turbulento en una atmósfera de densidad estratificada. La altura de elevación terminal y el desparrame de capa de densidad neutra, aparecen evidentes

En un medio ambiente de densidad estratificada, son dos las escalas de longitud características para los chorros y los penachos circulares: sus alturas de elevación terminales

$(M/N^2)^{1/4}$ y $(B/N^3)^{1/4}$. Los resultados equivalentes para los chorros y los penachos

planos son $(M/N^2)^{1/3}$ y $(B/N^3)^{1/3}$, respectivamente. Definida la relación entre las

dos escalas de longitud características por el parámetro $S = (MN/B)^2$, conjuntamente con el número de Richardson inicial del chorro, se puede definir el movimiento de cualquier chorro boyante en un medio ambiente linealmente estratificado.

La tabla 13.2 muestra las fórmulas normalizadas del caudal y de la elevación de los flujos plano y axisimétrico, respectivamente, y la tabla 13.3 incluye las expresiones de altura de elevación terminal y de dilución normalizadas para los chorros y los penachos circulares y planos en un medio ambiente linealmente estratificado. Con la información aportada por ambas tablas, se puede obtener una primera estimación de la dilución y de la altura de elevación terminal de los chorros boyantes en atmósferas de densidad estratificada.



Tabla 13.2.
Caudal y elevación normalizados [Rod82]

Magnitud	Flujo plano	Flujo axisimétrico
Caudal	$\bar{\mu} \frac{\mu B^{1/3}}{R_p^{1/2} M}$	$\frac{\mu B^{1/2}}{R_p M^{5/4}}$
Elevación ζ	$\frac{C_p x B^{2/3}}{R_p M}$	$\frac{C_p x B^{1/2}}{R_p M^{3/4}}$

Tabla 13.3.
Altura de elevación terminal y dilución adimensionales de chorros y penachos planos en un medio ambiente linealmente estratificado [Rod82]

Magnitud	Fuente plana		Fuente circular	
	$S \ll 1$	$S \gg 1$	$S \ll 1$	$S \gg 1$
Altura terminal de chorro, h_M	-----	$3,6 (M / N^2)^{1/3}$	-----	$3,8 (M / N^2)^{1/4}$
Altura terminal de penacho,	$h_B 2,5 (B / N^3)^{1/3}$	-----	$3,8 (B / N^3)^{1/4}$	-----
Altura de elevación normalizada, ζ_T	$S^{-1/2}$	$1,4 S^{-1/3}$	$1,7 S^{-3/8}$	$1,7 S^{-1/4}$
Dilución normalizada, \bar{u}_T	$S^{-1/2}$	$0,82 S^{-1/6}$	$1,5 S^{-5/8}$	$1,2 S^{-1/4}$

La figura 13.9 presenta, en función de la altura de elevación terminal, resultados del cálculo de la dilución normalizada de chorros y penachos circulares boyantes, eyectados en la atmósfera con estratificación lineal de densidad, mediante las fórmulas de la tabla 13.1, suponiendo constantes los valores de S indicados en ella.

Acerca de la estructura turbulenta, o bien del arrastre hacia el interior del chorro de fluido en condiciones de ambiente de densidad estratificada, el conocimiento es muy limitado, pues no se dispone de suficientes análisis experimentales detallados.

Para los chorros boyantes verticales, Hossain y Rodi publican, en el libro de este último, un capítulo titulado “A Turbulence Model for Buoyant Flows and Its Application to Vertical Buoyant Jets”, en que comentan los procedimientos de cálculo existentes y sus limitaciones, e incluyen un modelo matemático de la turbulencia, que es una extensión boyante del modelo $k - \varepsilon$ ampliamente contrastado y utilizado.

(Ver [Rod82])

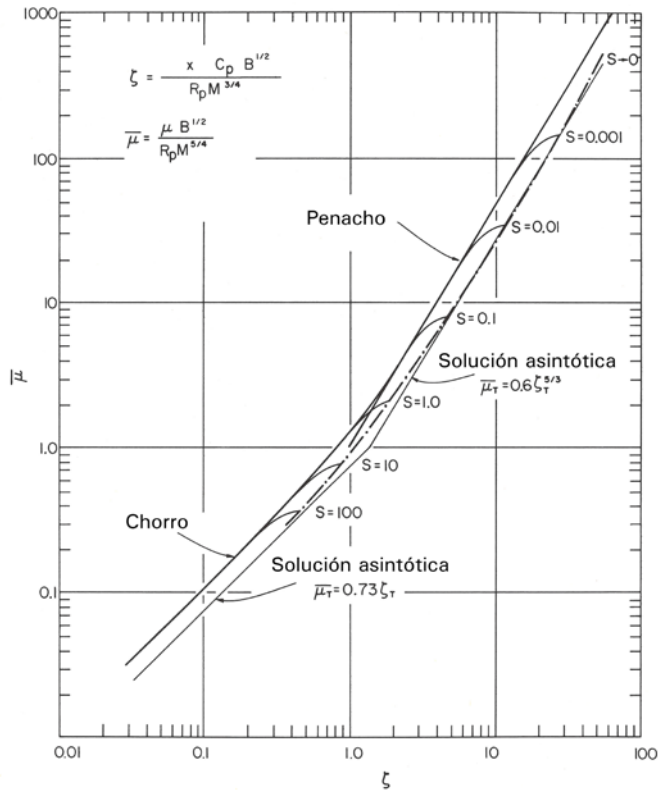


Fig. 13.9. Dilución de chorros circulares boyantes en ambientes de densidad estratificada linealmente, calculada con las fórmulas incluidas en la tabla 13.1

13.3 Cálculo de los chorros boyantes verticales

Este apartado trata del cálculo de los chorros bajo estacionarios el número de Mach cuyo eje es vertical y cuya densidad es diferente de la del fluido que lo rodea, de manera que están sujetos a fuerzas de empuje ascensional. Además, otras de sus características son:

- El estado en que se encuentra el medio ambiente donde descarga el chorro es de estancamiento.
- Los chorros son generados por descarga vertical de fluido de menor densidad que la del medio ambiente, sea desde un orificio o desde una superficie caliente. Si el orificio es circular, el chorro eyectado es axisimétrico y, si es una ranura, es un chorro plano.
- No hay paredes o fronteras en que el chorro pueda impactar.
- El chorro puede ser un “penacho forzado” si tiene cantidad de movimiento inicial, o bien puede ser un simple penacho, si carece de ella.

En los chorros, pueden dominar los efectos de inercia o bien la fuerza de empuje ascensional. En los primeros, si el número de Reynolds $Re = U_0 D / \nu$ es suficientemente alto, el régimen de flujo es turbulento; para que así sea en los segundos, el número de Grashof

$G = g(\rho_a - \rho_0) D^3 / \rho_0 \nu^2$ ha de ser suficientemente alto.



Los parámetros importantes que gobiernan por completo los chorros boyantes turbulentos son:

$$\text{El flujo de cantidad de movimiento } M = 2 \int_0^{\infty} \rho U^2 (\pi y)^j dy \quad (13.33)$$

$$\text{El flujo de empuje ascensional } W = 2g \int_0^{\infty} (\rho_a - \rho) U (\pi y)^j dy \quad (13.34)$$

donde $j = 0$ para chorros planos y $j = 1$ para chorros axisimétricos.

El flujo de cantidad de movimiento M se mantiene constante desde el origen del chorro únicamente si este es un chorro puro, mientras que en los chorros boyantes aumenta con la distancia a su origen debido a la fuerza de empuje ascensional, que actúa en dirección vertical ascendente. El flujo de empuje ascensional W es constante e igual a su valor en la fuente para chorros boyantes, en un ambiente de entorno uniforme.

La importancia relativa de las fuerzas inercial y de empuje ascensional en la fuente está caracterizada por el número de Froude de densidad, definido en términos de la cantidad de movimiento inicial y el flujo de empuje ascensional:

$$Fr = \frac{M_0 U_0}{W_0 D} = \frac{U_0^2}{g D (\rho_a - \rho_0) / \rho_0} \quad (13.35)$$

Cuando un chorro descarga en un medio ambiente estratificado linealmente, como se muestra en la figura 13.5, primero se comporta como un chorro boyante, de manera que su flujo de fuerza de empuje ascensional se reduce paulatinamente hasta llegar a cero a cierta distancia de la fuente, determinando el punto de empuje ascensional neutro. A partir de allí, la fuerza de empuje es negativa, de modo que el flujo se desacelera y el chorro alcanza una altura máxima x_m , y después retrocede y se desparrama lateralmente.

13.3.1 Ecuaciones de modelo para chorros boyantes verticales

En este apartado, se presenta únicamente el caso de chorros circulares eyectados en una atmósfera linealmente estratificada estable, caracterizada por el parámetro:

$$S = \frac{g}{\rho_{a,0}} \frac{d\rho_a}{dx} \quad (13.36)$$

La configuración del sistema se muestra en las figuras 13.5a y 13.6, representado en coordenadas x, y , suponiendo un chorro boyante plano. Para los chorros axisimétricos, se utiliza un sistema de coordenadas cilíndricas, en cuyo caso y representa la distancia radial desde el eje de simetría. Se considera únicamente el caso de un chorro bidimensional, o sea, sin remolino.

Considerado el flujo del tipo de capa de cortadura, se han de satisfacer las condiciones siguientes:

- (i) El flujo se extiende mucho más en la dirección x que en la dirección y , por lo cual los gradientes de las magnitudes con respecto a y son mucho mayores que los



gradientes con respecto a x . En términos de la aproximación de capa límite, esta condición se expresa $V \ll U$, $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$.

- (ii) El transporte difusivo (molecular y turbulento) en la dirección principal del flujo puede despreciarse, comparado con el transporte en la dirección lateral.
- (iii) El gradiente de presión longitudinal en el chorro es el mismo que el del medio ambiente donde descarga, o sea, $-(dP/dx) = \rho_a g$, donde ρ_a es la densidad local del fluido ambiente, que puede variar con la altura.
- (iv) Solo los procesos estacionarios son considerados, de modo que las derivadas temporales pueden ser despreciadas.
- (v) El transporte molecular se considera despreciable frente al transporte turbulento, o sea, $\mu \partial U_i / \partial x_j \ll \rho \overline{u'_i u'_j}$, $\lambda \partial T / \partial x \ll \rho \overline{u'_i T'}$.

Habida cuenta de estas condiciones, las ecuaciones de flujo se escriben:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j \rho v) = 0 \quad (13.37)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j \rho \overline{uv}) \quad (13.38)$$

Ecuación de temperatura:

$$\rho \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j \rho \overline{vT'}) \quad (13.39)$$

En las ecuaciones 13.37 a 13.39, el símbolo j se utiliza para identificar el tipo de chorro al cual se aplican; así, $j = 0$ corresponde a chorros planos y $j = 1$, a chorros axisimétricos, lo cual requiere escribir las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

La solución de las ecuaciones anteriores requiere determinar la tensión de cortadura turbulenta \overline{uv} y del flujo lateral de calor $\overline{vT'}$. Ahora bien, estas magnitudes dependen de la componente de tensión normal lateral $\overline{v^2}$ y, en la ecuación para k , el término de producción de empuje ascensional implica la correlación $\overline{uT'}$, en que aparece la variancia $\overline{T'^2}$.

La forma de las ecuaciones para las magnitudes de turbulencia en los chorros boyantes verticales y el acoplamiento entre ellas se encuentran, respectivamente, en la tabla 13.2 y la figura 13.3 del libro publicado por Rodi, titulado *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*. En él se proporciona también amplia información sobre las características del modelo de turbulencia, el procedimiento de solución y las condiciones de contorno.



Resultados

En este subapartado, se exponen los resultados obtenidos con el modelo matemático de Rodi y se les compara, por separado, con los resultados experimentales para chorros puros y penachos puros, para chorros boyantes en ambiente homogéneo y para chorros en ambientes establemente estratificados.

Para los chorros y penachos autosemejantes, la autosemejanza significa que, dada una longitud suficiente de desarrollo del flujo, solo una velocidad, una temperatura y una escala de longitud son suficientes para expresar las magnitudes de promedio temporal adimensionales por funciones de una sola variable geométrica. El análisis de semejanza requiere que los chorros y los penachos se desparramen linealmente, o sea:

$$S_U = \frac{dy_{0,5U}}{dx} = \text{cte}, \quad S_T = \frac{dy_{0,5T}}{dx} = \text{cte} \quad (13.40)$$

donde $y_{0,5U}$ e $y_{0,5T}$ son el ancho característico de la distribución de velocidad y el de la temperatura respectivamente, cuyos valores para los modelos de turbulencia $k-\varepsilon$ y tensión algebraica/flujo de chorros y penachos planos y axisimétricos se encuentran en la publicación de Chen y Rodi.⁴ Además, en chorros y penachos autosemejantes, el decaimiento de la velocidad máxima y el del exceso de temperatura en el eje vienen dados por las ecuaciones siguientes:

$$\text{Chorros puros} \quad \frac{U_m}{U_0} = A_U \left(\frac{x}{D} \right)^{-\frac{j+1}{2}} \quad (13.41)$$

$$\frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a} = A_T \left(\frac{x}{D} \right)^{-\frac{j+1}{2}} \quad (13.42)$$

$$\text{Penachos puros} \quad \frac{U_m}{U_0} = B_U F^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{D} \right)^{-\frac{j}{3}} \quad (13.43)$$

$$\frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a} = B_T F^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{D} \right)^{-\frac{2j+3}{3}} \quad (13.44)$$

donde A_U, \dots, B_T son coeficientes constantes cuyos valores, predichos y medidos, se muestran en la tabla 13.4.

Tabla 13.4.
Valores de los
coeficientes en
las ecuaciones
(13.37 a 13.40)

	Plano				Axisimétrico			
	Chorro puro		Penacho puro		Chorro puro		Penacho puro	
Constante de decaimiento	Au	AT	Bu	BT	Au	AT	Bu	BT
Predicciones	2,17	2,1	1,98	2,6	6,6	5,1	3,5	8,22
Mediciones	2,4	2	1,9	2,4	6,2	5	3,5	9,35

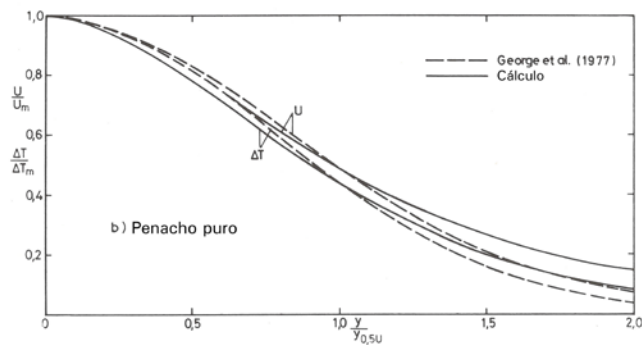
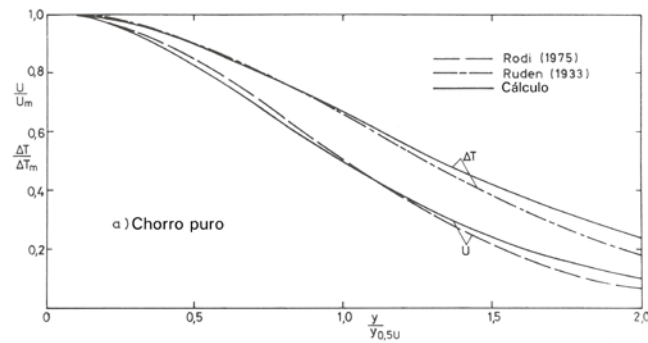
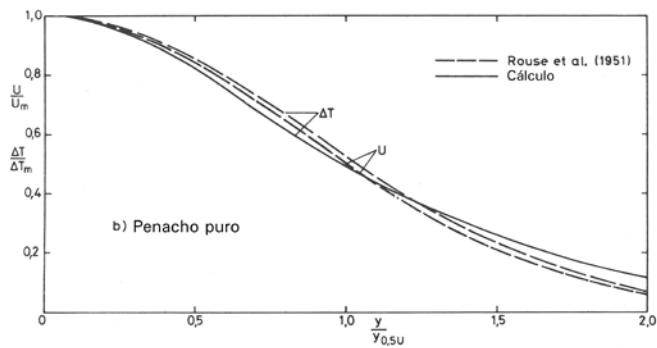
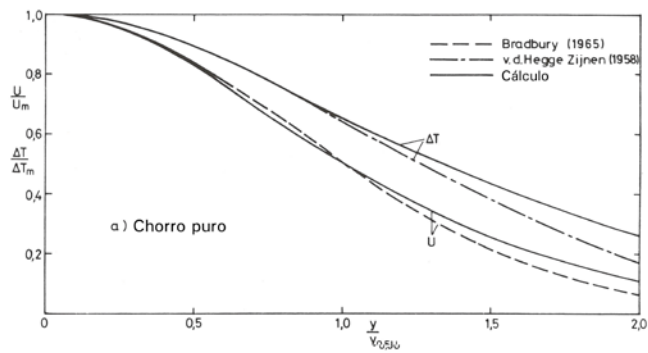


Fig. 13.10.
Perfiles de distribución de velocidad y de temperatura en chorros planos

Fig. 13.11.
Perfiles de distribución de velocidad y de temperatura en chorros axi-simétricos



Las figuras 13.10 y 13.11 presentan los perfiles de semejanza de velocidad y exceso de temperatura para chorro plano y axisimétrico, respectivamente, determinados por varios investigadores. En todos los casos, el acuerdo entre los perfiles teóricos y los determinados experimentalmente es bueno.

13.3.2 Transición de chorro puro a penacho puro

En este apartado, se aporta información sobre la transición de chorros puros, dominados por la cantidad de movimiento, a penachos puros, dominados por fuerzas de empuje ascensional, en un medio ambiente uniforme.

Las figuras 13.12 y 13.13 muestran el decaimiento de la velocidad y del exceso de temperatura a lo largo del eje de los chorros boyantes planos, respectivamente, y las figuras 13.14 y 13.15 hace lo propio para los chorros boyantes axisimétricos. En ambas figuras, las dos magnitudes citadas y la distancia a la fuente x están escaladas con el número de Froude en la salida del chorro y del penacho y la relación de densidades inicial ρ_0 / ρ_a .

Fig. 13.12. Decaimiento de la velocidad a lo largo del eje en chorros boyantes planos [Rod 82]

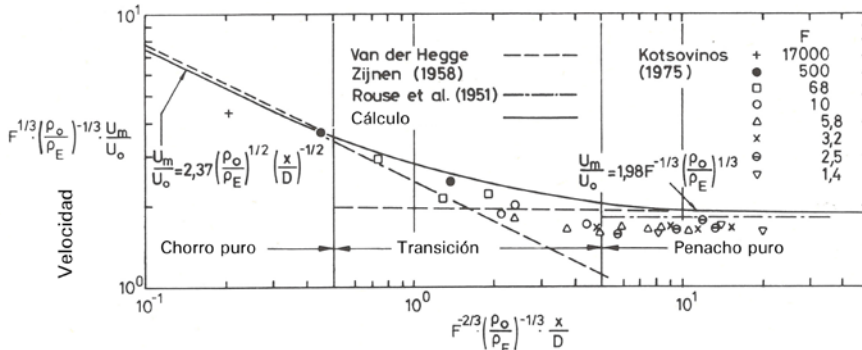
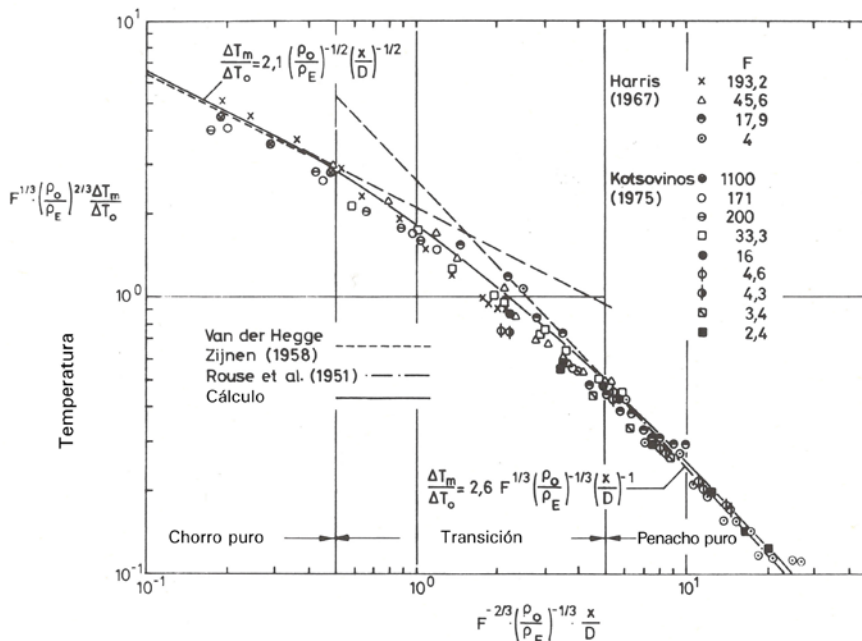


Fig. 13.13. Decaimiento de la temperatura a lo largo del eje en chorros boyantes planos [Rod 82]



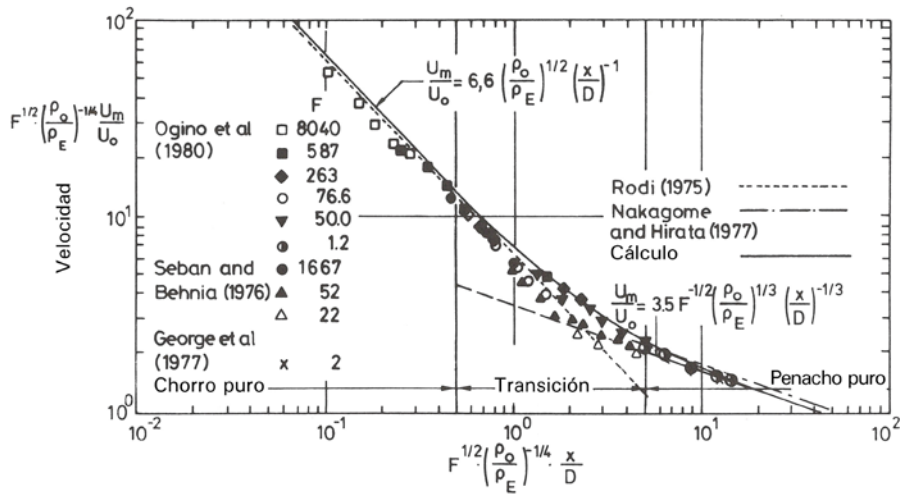


Fig. 13.14. Decaimiento de la velocidad a lo largo del eje en chorros boyantes axisimétricos [Rod82]

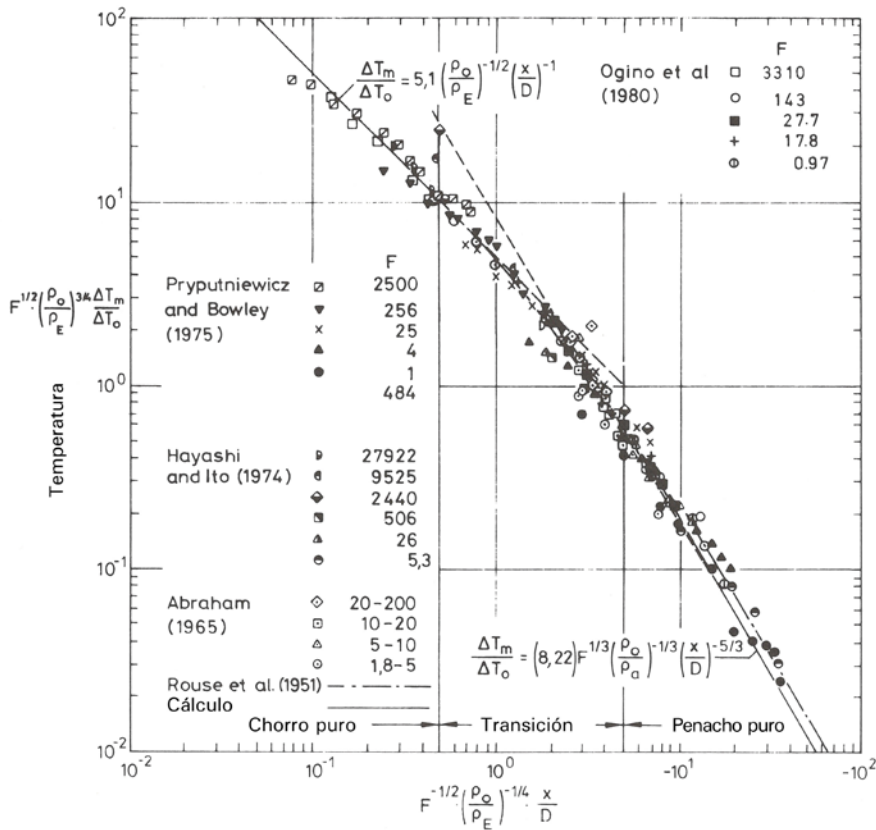


Fig. 13.15. Decaimiento de la temperatura a lo largo del eje en chorros boyantes axisimétricos [Rod82]

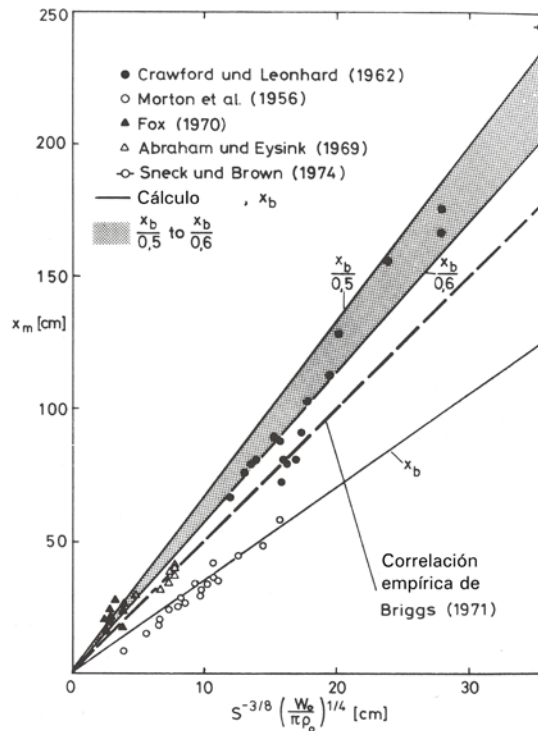
13.3.3 Chorros boyantes verticales en medio ambiente estratificado estable

Este tipo de flujo se muestra esquemáticamente en la figura 13.5. Su característica más importante es la altura limitada que alcanza el chorro (altura x_b) a la cual corresponde un empuje de elevación neutro; por encima de ella, las fuerzas de empuje negativo retardan el movimiento vertical hasta que cesa, incluso en el eje. A partir de este punto, el flujo cambia de dirección y se desparrama lateralmente sin una dirección de flujo predominante, de manera que no se puede analizar como si fuera una capa límite.

El modelo de Rodi para simular este flujo solo es aplicable hasta el punto neutro.

La mayoría de los experimentos realizados se han orientado a determinar la máxima altura que puede alcanzar el chorro, correlacionando los resultados con el parámetro de estratificación S y el déficit de peso inicial W_0 . La figura 13.16 muestra gran parte de los resultados disponibles sobre penachos puros y chorros boyantes con muy poca cantidad de movimiento. Incluye también los resultados de los cálculos obtenidos con condiciones iniciales propias de chorros boyantes, con pequeños valores del número de Froude.

Fig. 13.16.
Máxima elevación
del penacho en un
ambiente estratifi-
cado linealmente
[Rod82]



En las figuras 13.17 y 13.18, se comparan los resultados predichos con los medidos en los experimentos de decaimiento de densidad y de temperatura a lo largo de la línea central de chorros boyantes en ambientes estratificados establemente. Se ha encontrado que el desarrollo inicial del chorro es muy sensible a los valores iniciales de k y ε tomados en la simulación numérica.

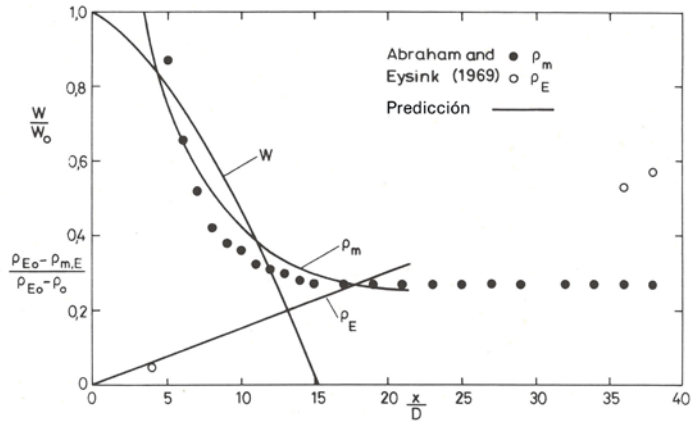


Fig. 13.17. Variación de la densidad a lo largo de la línea central de chorros eyectados en un ambiente estratificado [Rod82]

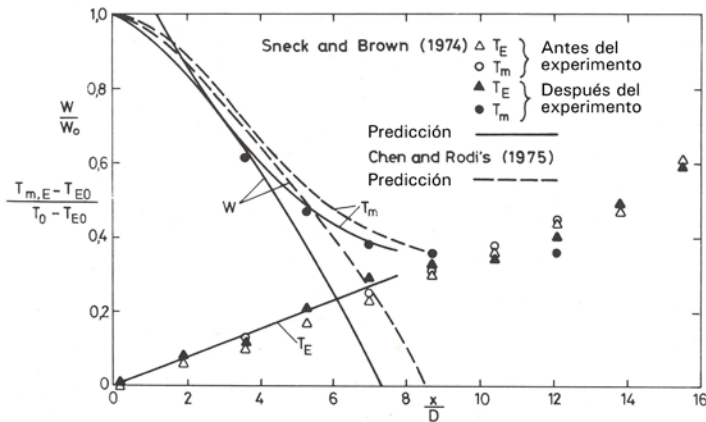


Fig. 13.18. Decaimiento relativo de la temperatura relativa del fluido a lo largo de la línea central de chorros boyantes planos⁸

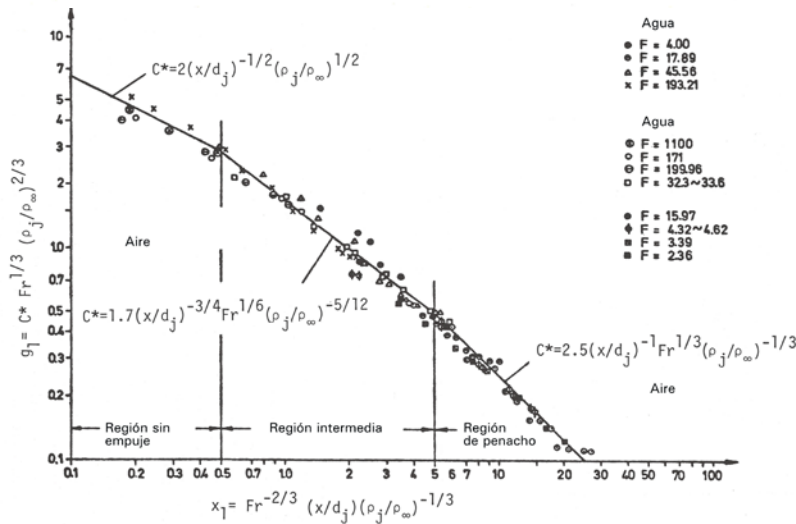


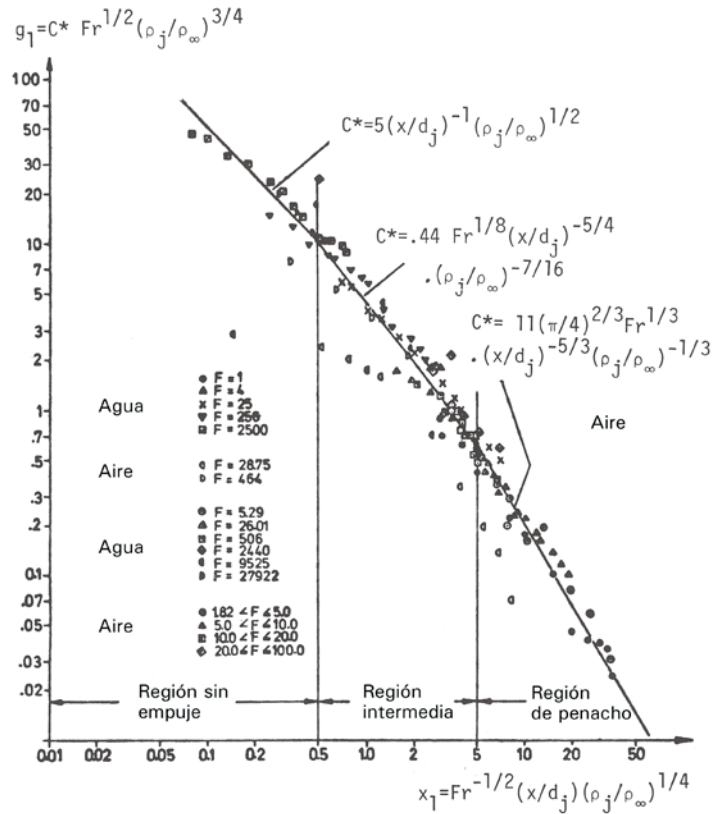
Fig. 13.19. Variación de la densidad a lo largo de la línea central de chorros eyectados en un ambiente estratificado [Rod82]

$$C^* = (\rho_a - \rho_c) / (\rho_a - \rho_j) \quad Fr (Ec. 4 con ch \equiv j) \quad a \equiv \text{ambiente}$$

$c \equiv$ línea central (eje del chorro) $j \equiv$ chorro $\infty \equiv$ en el amb. lejos del chorro



Fig. 13.20. Decaimiento de la densidad relativa del fluido a lo largo de la línea central de chorros boyantes axisimétricos⁸



Los subíndices de las magnitudes que aparecen en las figura 13.17 y 13.18 significan: E , ambiente; E_o , ambiente inicial; mE , en la línea central (máximo); 0 , valor inicial.

En las figuras 13.19 y 13.20, se muestran otros resultados experimentales en términos del número de Froude de densidad.

13.3.4 Interacción de los chorros y los penachos con corrientes transversales

La mayoría de los chorros y los penachos

están vinculados, en la práctica, a corrientes transversales. El comportamiento detallado del flujo que resulta de la interacción se explica analizando la información experimental disponible, bastante extensa. Crabb, Durão y Whitelaw,¹¹ entre otros investigadores, han estudiado experimentalmente, en la región próxima al orificio de eyección, un chorro circular que descarga verticalmente en una corriente externa de densidad uniforme.

Viendo cómo se desarrolla el flujo resultante de la interacción, se supone que los dos parámetros básicos son el flujo específico de cantidad de movimiento del chorro y la velocidad U de la corriente transversal. Mediante ambos, se define una longitud característica $z_M = M^2 / U$. Así, se observa que solo en $z \gg z_M$ el efecto de la corriente transversal es el rasgo dominante.



Por simple aplicación de argumentos de flujo de cantidad de movimiento, y asumiendo autosemejanza de secciones transversales del chorro en los casos límite $z \ll z_M$ y $z \gg z_M$, se pueden deducir formas asintóticas generales de la trayectoria del chorro; por ejemplo:

$$\frac{W_m}{U} \sim \begin{cases} z_M / z, & z \ll z_M \\ (z_M / z)^2, & z \gg z_M \end{cases} \quad (13.45)$$

donde W_m es la velocidad máxima media en dirección vertical.

Suponiendo que la trayectoria del eje del chorro puede definirse por una función $\bar{z}(x)$, donde x es ahora una coordenada horizontal, de manera que se satisface:

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \frac{W_m}{U} \quad (13.46)$$

entonces se obtiene:

$$\frac{\bar{z}}{z_M} \sim \begin{cases} C_1 (x / z_M)^{1/2}, & \bar{z} \ll z_M \\ C_2 (x / z_M)^{1/3}, & \bar{z} \gg z_M \end{cases} \quad (13.47)$$

Similares argumentos se aplican a la conservación de un trazador en secciones horizontales y transversales de chorros.

La aplicación del principio de cantidad de movimiento y semejanza a una sección horizontal y a una sección vertical de un chorro aporta los resultados siguientes:

$$\frac{W_m}{U} \sim \begin{cases} \left(\frac{z_B}{z} \right)^{1/3}, & \frac{z}{z_B} \ll 1 \\ \left(\frac{z_B}{z} \right)^{1/2}, & \frac{z}{z_B} \gg 1 \end{cases} \quad (13.48)$$

$$\frac{\bar{z}}{z_B} \cong \begin{cases} C_3 \left(\frac{x}{z_B} \right)^{3/4}, & \frac{\bar{z}}{z_B} \ll 1 \\ C_4 \left(\frac{x}{z_B} \right)^{2/3}, & \frac{\bar{z}}{z_B} \gg 1 \end{cases} \quad (13.49)$$

$$\frac{\mu U}{M} \left(\frac{z_M}{z_B} \right)^2 = \frac{BU}{gM\theta} \left(\frac{z_M}{z_B} \right)^2 \sim \begin{cases} \left(\frac{\bar{z}}{z_B} \right)^{5/3}, & \frac{\bar{z}}{z_B} \ll 1 \\ \left(\frac{\bar{z}}{z_B} \right)^2, & \frac{\bar{z}}{z_B} \gg 1 \end{cases} \quad (13.50)$$

donde μ es el flujo másico específico local y θ es la concentración de especies.



Las relaciones anteriores comprenden los casos límite que podrían ocurrir con un chorro boyante turbulento en una corriente transversal uniforme. Sin embargo, en cualquier situación dada de flujo, solo cabe considerar dos casos: $z_M > z_B$ y $z_M < z_B$.

La condición $z_M > z_B$ corresponde a preponderancia de la cantidad de movimiento de chorro con respecto al empuje ascensional, de modo que la secuencia de desarrollo del flujo es: chorro, chorro encorvado, penacho encorvado, de conformidad con las ecuaciones 13.45a, 13.45b y 13.48b.

La condición $z_M < z_B$ corresponde a fuerzas de empuje ascensional dominantes con respecto a la cantidad de movimiento del chorro, de modo que la secuencia de desarrollo del flujo es: chorro, penacho, penacho encorvado. Los puntos de desviación de la trayectoria se encuentran, aproximadamente, en z_M y $z_C = (M^2 / UB)^{1/3}$, cuando $z_M > z_B$, y en $z = l_M = M^{3/4} / B^{1/2}$, si $z_M < z_B$. Los valores de los coeficientes $C_1 \dots C_4$ obtenidos por varios investigadores se indican en la tabla 13.5.

Tabla 13.5.
Constantes utilizadas en las leyes de trayectoria asintótica y dilución para un chorro boyante en una corriente transversal uniforme

Constante	Valor	Investigadores
C1	1,8-2,5	Hoult, Fay y Forney (1969)
	1,8-2,3	Wright (1977)
C2	1,8-2,1	Briggs (1975)
	1,6-2,1	Wright (1977)
	1,44	Chu y Goldberg (1974)
C3	1,4-1,8	Wright (1977)
C4	0,85-1,3	Briggs (1975)
	$(0,85-1,4)(z_M/z_B)^2$	Chu y Goldberg (1974)

El simplista análisis presentado no describe dos características del flujo que interesan a quienes estudian el medio ambiente: el proceso de *sembrado de vórtices*, que se produce cuando la corriente transversal se comporta como si el chorro fuera esencialmente un objeto sólido, y la *bifurcación*, o división del chorro en dos, por la adición de empuje ascensional al chorro.

Chorros y penachos con corriente transversal y estratificación

Las soluciones de los problemas del flujo en los chorros y los penachos afectados por corrientes transversales y estratificación de densidad requieren la determinación de tres parámetros dependientes de seis escalas de longitud: l_Q, l_M, h_M, h_B, z_M y z_B .

Los parámetros son l_Q / l_M , conocido como el número de Richardson; $S = (MN / B)^2$, del cual dependen h_M y h_B , y $M^{1/2} U^2 / B$, especificado por z_M / z_B .

La altura de elevación terminal de un chorro boyante en una corriente transversal de densidad estratificada puede especificarse a partir de soluciones previas, para chorros en corrientes transversales, teniendo en cuenta que hay una escala de longitud que implica



solo la corriente transversal y la estratificación, $L = U / N$. Puesto que L es la única escala de longitud horizontal, la altura terminal de elevación se especifica, aproximadamente, sustituyendo x por L en cualquier solución asintótica de la ecuación de trayectoria apropiada.

La tabla 13.6 incluye una lista de alturas asintóticas de elevación para un chorro boyante turbulento vertical que descarga en una corriente de densidad estratificada.

Tabla 13.6.

Caso	$(U / N)^2 / M^{1/2} \ll 1$	$1 \ll (U / N)^2 / M^{1/2} \ll z_M / z_B$	$z_M / z_B \ll (U / N)^2 / M^{1/2}$
$z_M > z_B$	$z_T / h_M = E_1 \cong 4$	$z_T / z_M^{2/3} L^{1/3} = E_2$	$z_T / z_B^{1/3} L^{2/3} = E_4 \cong 3,8$
Caso	$S^{-1/2} \ll 1$	$1 \ll S^{-1/2} \ll (z_B / z_M)^2$	$(z_B / z_M)^2 \ll S^{-1/2}$
$z_M < z_B$	$z_T / h_M = E_1 \cong 4$	$z_T / h_B = E_3 \cong 4$	$z_T / z_B^{1/3} L^{2/3} = E_4 \cong 3,8$

La tabla 13.6 incluye también los valores encontrados para los coeficientes E_1 , E_3 y E_4 . No se dispone de información sobre el coeficiente E_2 .

Los modelos integrales desarrollados por Schatzmann¹² son muy apropiados para resolver problemas en que intervienen efectos de corrientes transversales y de estratificación de densidad en el medio ambiente. Son, probablemente, los métodos más adecuados para desarrollar proyectos de ingeniería. Otro modelo interesante, concretamente para describir la mayoría de los rasgos de los incendios masivos, es el desarrollado por Luti y Brzustowski.¹³

En algunas condiciones atmosféricas, se observa una asombrosa semejanza entre la trayectoria real del flujo que resulta de la interacción de un penacho y una corriente transversal, y la determinada por cálculo (v. figura 13.21).

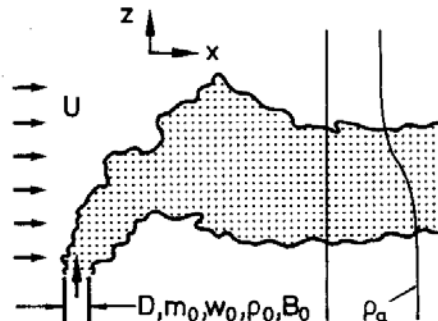
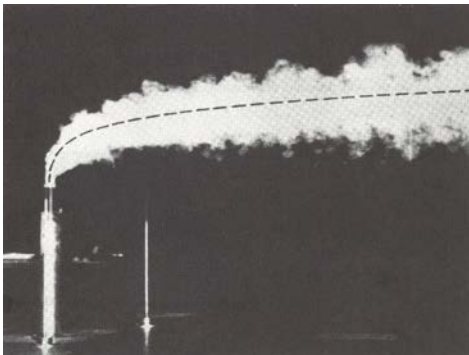


Fig. 13.21. Fotografía directa de un chorro de gas transversal en una corriente de baja velocidad

→ 14



Licuefacción de gases

14.1 Introducción

La licuefacción o licuación de gases es el cambio de estado que ocurre cuando una sustancia pasa del estado gaseoso al líquido por alta compresión isoterma y disminución de su temperatura por expansión adiabática. El fenómeno fue descubierto por Faraday en 1823.

La licuefacción ocurre cuando las fuerzas de atracción entre las moléculas de gas son suficientemente fuertes para contrarrestar su energía cinética, así que todos los gases pueden convertirse a fase líquida incrementando su presión o disminuyendo la temperatura, o por una combinación de ambos procesos. La temperatura por encima de la cual un gas no puede ser licuado por la sola acción de la presión se denomina *temperatura crítica*, T_c . La presión requerida para licuar un gas a temperatura crítica se denomina *presión crítica*, P_c .

La tabla 14.1 proporciona los datos de la temperatura crítica y la presión crítica de varios gases.

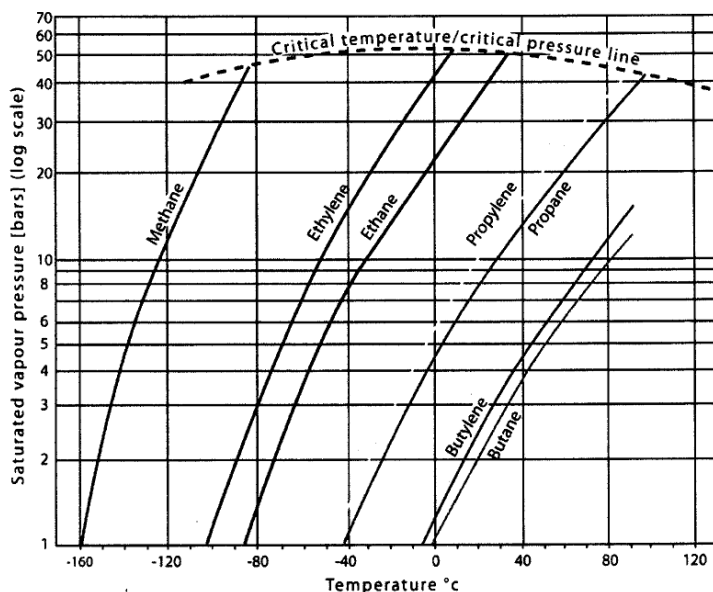
Gas	Temperatura crítica, T_c (°C/k)	Presión crítica, P_c (KPa)
Argón	-122,40 (150,7)	4.870
Amoníaco	132,40 (405,5)	11.280
Cloro	143,80 (417,0)	7.700
Helio	-267,96 (5,19)	227
Hidrógeno	-239,95 (33,2)	1.300
Nitrógeno	-146,90 (126,2)	3.390
Oxígeno	-118,60 (154,5)	5.050

Tabla 14.1.
Temperatura y
presión críticas
de algunos
gases



La figura 14.1 ilustra las curvas de presión de vapor saturado con respecto a la temperatura de varios gases hidrocarburos.

Fig. 14.1.
Curvas P_v, T
para varios
gases
hidrocarburos



Muchos gases tienen una temperatura crítica superior al valor de su temperatura estándar. Son los denominados *gases licuables*, que pueden licuarse simplemente incrementando su presión después de enfriarlos. Dos de estos gases son el dióxido de azufre y el dióxido de carbono.

Muchos son los usos de los gases licuados. Entre ellos, cabe citar los siguientes:

- En refrigeración y acondicionamiento de aire.
- En los hospitales (oxígeno líquido, convertido a gas y suministrado a pacientes con problemas respiratorios) (dermatología, inseminación artificial, etc.).
- En procesos tecnológicos (solución de cloro en agua para el blanqueo de la pasta de papel y de textiles).
- Para la desinfección y la purificación del agua, de desechos industriales, etc.
- Para la obtención de nitrógeno, oxígeno y argón (aire líquido, separación de componentes por destilación).
- El helio líquido tiene muchas e importantes aplicaciones en criogenia, fabricación de semiconductores, soldadura, tecnología espacial, imanes superconductores, etc.

Por otra parte, la licuación de los gases facilita su almacenamiento y transporte, como es el caso de los gases licuados del petróleo (GLP) o del GNL.

14.2 Fundamentos

Todo proceso de licuefacción comporta, en el clásico método de cascada, varios ciclos de compresión, refrigeración y expansión del gas a través de una válvula en que se produce el efecto de Joule-Thomson.

En la figura 14.2, se muestra un esquema del ciclo ideal de licuefacción y, en la figura 14.3, se representa en el diagrama T, S . El balance del ciclo requiere aplicar las dos leyes de la termodinámica.

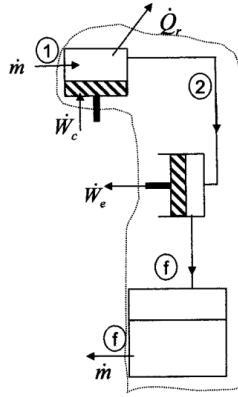
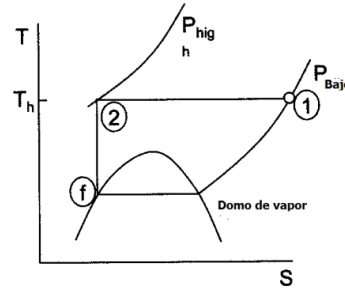


Fig. 14.2. (izquierda)
Fig. 14.3. (derecha)



La primera ley se aplica al balance de energía del sistema, que se enuncia así: en estado estacionario, el balance de las energías dentro y fuera del sistema es cero. Su expresión matemática es:

$$\dot{W}_c + \dot{m}h_1 = \dot{W}_e + \dot{Q}_r + \dot{m}h_f, \text{ o bien } \dot{W}_{net} = \dot{Q}_r - \dot{m}(h_1 - h_f) \quad (14.1)$$

Mediante la segunda ley, se establece el balance de entropía del sistema:

$$\dot{m}s_1 = \dot{m}s_f + \frac{\dot{Q}_r}{T_1} + \sigma \nearrow^0,$$

$$\text{o bien } \dot{Q}_r = T_1 \dot{m}(s_1 - s_f) \quad (14.2)$$

Combinando ambas ecuaciones, se tiene:

$$\dot{W}_{net} = T_1 \dot{m}(s_1 - s_f) - \dot{m}(h_1 - h_f) \quad (14.3)$$

De hecho, la energía requerida para enfriar una masa de gas y convertirla de vapor saturado a líquido saturado a su temperatura normal de ebullición, se expresa:

$$\Delta W = \int_{T_{nbp}}^{T_h} mc_p(T) \left[\frac{T_h}{T} - 1 \right] dT + mh_{fg} \left[\frac{T_h}{T_{nbp}} - 1 \right] \quad (14.4)$$

donde el primer término del segundo miembro representa el trabajo necesario para extraer el calor sensible del gas, y el segundo, para extraer el calor latente.

Entre sus principales limitaciones, cabe señalar que no es posible alcanzar una presión escenario ideal y que la expansión isoentrópica es muy difícil de conseguir. En cambio, la expansión isoentálpica se logra fácilmente por estrangulación de la corriente de gas. El enfriamiento asociado a este proceso explota las propiedades del gas real. A elevada temperatura y baja presión, la entalpía es independiente de la presión.



Tabla 14.2.
Trabajo ideal
requerido para licuar
gases a partir de las
condiciones: 300 K,
101,3 kPa

Gas	Punto normal de ebullición, k	Trabajo ideal de licuefacción $-W_i / \dot{m}_f$, kJ/kg
Helio-4	4,21	6819
Hidrógeno, H ₂	20,27	12019
Neón, Ne	27,09	1335
Nitrógeno, N ₂	77,36	768,1
Aire	78,8	738,9
Monóxido de carbono, CO	81,6	768,6
Argón, A	87,28	478,6
Oxígeno, O ₂	90,18	635,6
Metano, CH ₄	111,7	1091
Etano, C ₂ H ₆	184,5	353,1
Propano, C ₃ H ₈	231,1	140,4
Amoniaco, NH ₃	239,8	359,1

La tabla 14.2 incluye el punto normal de ebullición y el trabajo de licuefacción ideal de los gases más importantes.

La eficiencia de los procesos se define por la figura de mérito (FOM):

$$FOM_{lqf} = \frac{\left(\dot{W}_{net} / \dot{m}_f \right)_{ideal}}{\left(\dot{W}_{net} / \dot{m}_f \right)_{real}}, \quad FOM_{ref} = \frac{COP_{real}}{COP_{ideal}} \quad (14.5)$$

donde COP es el coeficiente de eficiencia:

$$COP_{ref} = \frac{Q}{W_{net,e}}, \quad Q = \text{carga de refrigeración} = h_1 + h_2$$

14.2.1 Coeficiente de Joule-Thomson

En 1885, Joule y Thomson confirman que un flujo de gas a través de una restricción experimenta un descenso de temperatura junto con una caída de presión.

El fenómeno se caracteriza por el coeficiente de Joule-Thomson, $\mu_j = \left. \frac{dT}{dP} \right|_h$. Cuando $\mu_j > 0$, la caída de presión va acompañada de una disminución de la temperatura.

Las figuras 14.4 y 14.5 muestran las regiones de μ_j positivo y negativo. Por encima de la temperatura de inversión, se tiene $\mu_j \leq 0$ para todas las presiones.

Algunos gases requieren enfriamiento previo. Para el helio, la temperatura de inversión es de 45 K; para el hidrógeno, 205 K, y para el neón, 250 K.

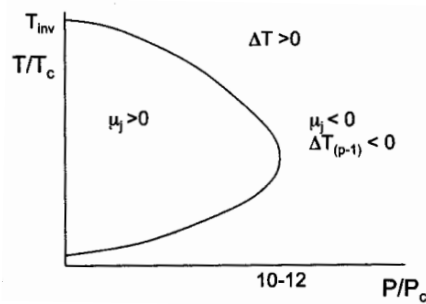
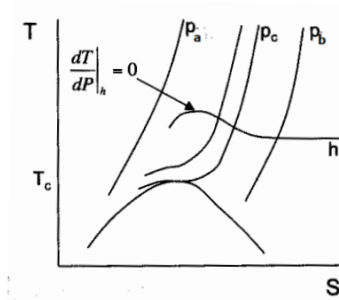


Fig. 14.4. (izquierda)
Diagrama T, S

Fig. 14.5. (derecha)
Curva de inversión

14.3 Ciclos

Varios son los ciclos por los cuales se puede lograr la licuación de los gases. En general, cabe citar los siguientes:

- Ciclo simple de Linde-Hampson
- Ciclos de Linde-Hampson mejorados
- Ciclo de Claude y sus variantes
- Licuador de Collins
- Licuador comercial de helio

En concreto, para el gas natural, hay los siguientes:

- Proceso de cascada clásica (ConocoPhillips)
- Proceso Technip-L'Air Liquide
- Proceso de Air Products and Chemicals (C3MR o bien ACPI)
- Proceso de Technip-Snamprogetti
- Shell DMR

A título de ejemplo, se muestran esquemas de los ciclos de Linde-Hampson simple y mejorado, de carácter general, y del proceso de Air Products and Chemicals, junto con una representación gráfica de un licuador de GN, a pequeña escala (Idaho National Engineering and Environmental Laboratory), para el gas natural.

14.3.1 Ciclo simple de Linde-Hampson

La figura 14.6 muestra el esquema del ciclo simple de Linde-Hampson.

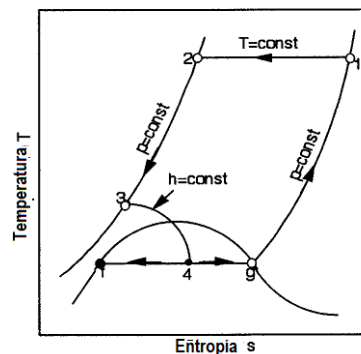
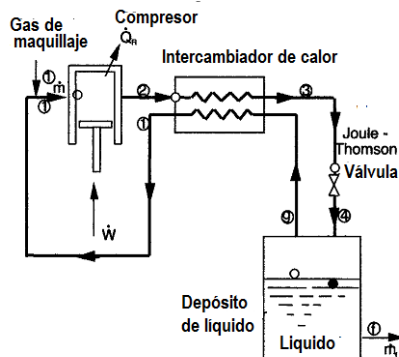


Fig. 14.6.
Ciclo simple de
Linde-Hampson



Como características peculiares de este ciclo, cabe citar las siguientes:

- La temperatura de inversión ha de estar por encima de la temperatura de compresión, o bien se requiere un enfriamiento previo a través de un líquido refrigerante de más alta temperatura.
- El intercambiador de calor recuperativo preenfía la corriente de alta presión.
- El licuador requiere el suministro de gas de maquillaje.
- El refrigerador absorbe calor convirtiendo el líquido a vapor a la temperatura de saturación de baja presión.

El trabajo de compresión se calcula aplicando la primera y la segunda ley al compresor en condiciones de estado estacionario, y la primera ley al sistema sin el compresor. En efecto:

$$(i) \quad 1^a \text{ ley en el compresor} \quad \dot{W}_c - \dot{Q}_r + \dot{m}(h_1 - h_2) = 0 \quad (14.6)$$

$$(ii) \quad 2^a \text{ ley en el compresor} \quad \dot{Q}_r = \dot{m}T_1(s_1 - s_2) \quad (14.7)$$

(se ha supuesto compresión isotérmica)

Combinando las ecuaciones 14.6 y 14.7, se obtiene:

$$\frac{\dot{W}_c}{\dot{m}} = T_1(s_1 - s_2) - (h_1 - h_2) \quad (14.8)$$

$$(iii) \quad 1^a \text{ ley aplicada al sistema sin el compresor: } \dot{m}(h_1 - h_2) = \dot{m}_f(h_1 - h_f) \quad (14.9)$$

Definido por el rendimiento del ciclo Y como $Y = \dot{m}_f / \dot{m} = (h_1 - h_2) / (h_1 - h_f)$, se obtiene:

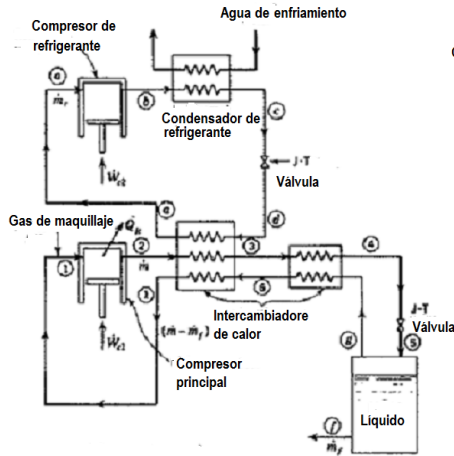
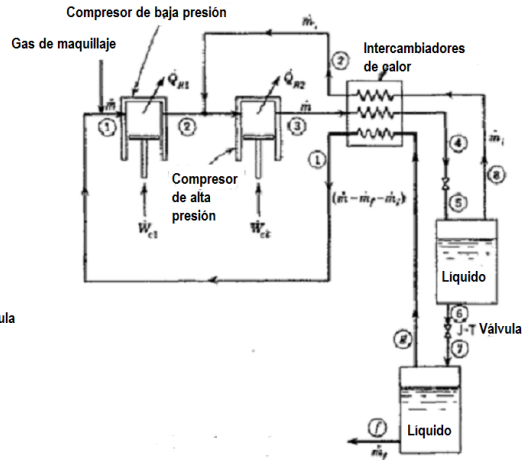
$$\frac{\dot{W}_c}{\dot{m}_f} = \frac{\dot{W}_c}{Y\dot{m}} = [T_1(s_1 - s_2) - (h_1 - h_2)] \left(\frac{h_1 - h_f}{h_1 - h_2} \right) \quad (14.10)$$

Ciclos Linde-Hampson mejorados

Las figuras 14.7a y 14.7b muestran los esquemas de un ciclo L-H preenfriado y de presión dual, respectivamente.

El ciclo L-H preenfriado optimiza el rendimiento a través de la presión, la temperatura de pre-enfriamiento y la relación del flujo másico. Incrementa el valor de FOM por un factor de 2.

El ciclo L-H de presión dual optimiza el rendimiento a través de dos presiones y la relación del flujo másico fraccional. Incrementa el valor de FOM por un factor de 1,9.


 Fig. 14.7a.
Ciclo L-H
preenfriado

 Fig. 14.7b.
Ciclo L-H de
presión dual

Influencia de los componentes no ideales

La figura 14.8 muestra en el diagrama T, S dos ciclos de licuefacción: uno ideal y otro real. El ciclo real tiene en cuenta la influencia de los componentes no ideales del gas en el rendimiento del proceso.

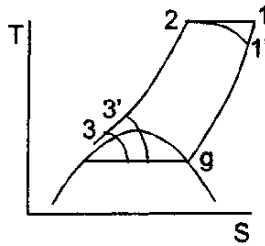


Fig. 14.8.

En primer lugar, un intercambiador de calor real tiene un rendimiento ε menor que la unidad.

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_g}{h_1 - h_g} \quad (14.11)$$

En segundo lugar, un compresor no isoterma requiere más trabajo, $\eta_c < 1$, que un compresor isoterma para el mismo incremento de presión:

$$\eta_c = \frac{(\dot{W} / \dot{m})_{isoterma}}{(\dot{W} / \dot{m})_{real}} \quad (14.12)$$

La influencia de estos dos parámetros sobre la capacidad del enfriador y la del licuador, y el trabajo de compresión para un sistema de Linde-Hampson simple se cuantifica por las relaciones siguientes:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = (h_1 - h_2) - (1 - \varepsilon)(h_1 - h_g) \quad (14.13)$$



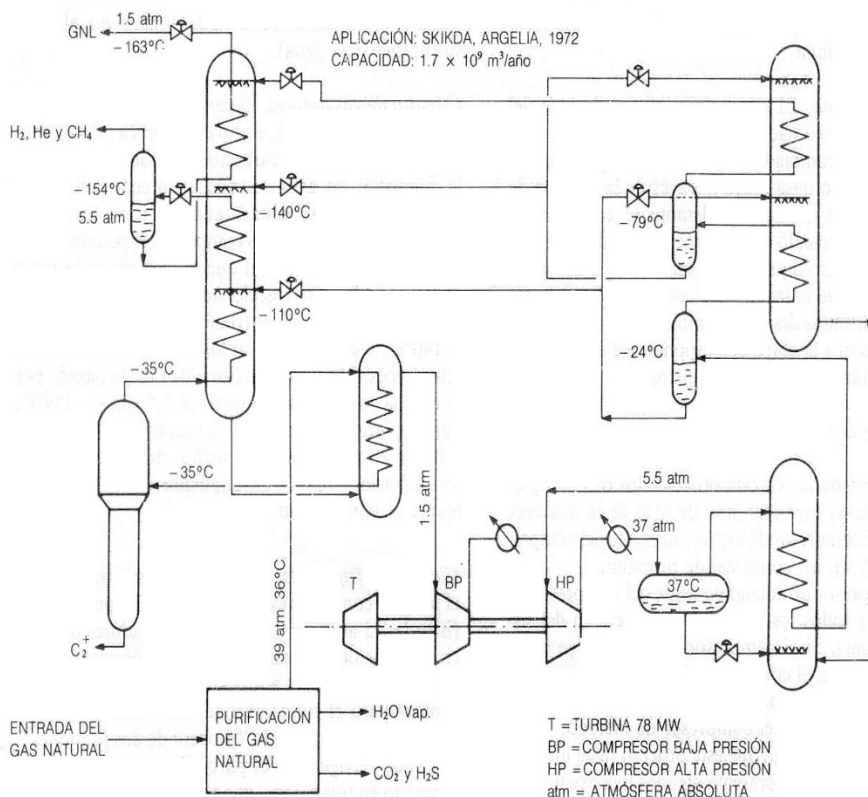
$$y = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_f} = \frac{(h_1 - h_2) - (1 - \varepsilon)(h_1 - h_g)}{(h_1 - h_f) - (1 - \varepsilon)(h_1 - h_g)} \quad (14.14)$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{1}{\eta_c} \left[T_1 (s_1 - s_2) - (h_1 - h_2) + (1 - \varepsilon)(h_1 - h_g) \right] \quad (14.15)$$

14.3.2 Proceso de licuefacción de GN de Air Products and Chemicals, y esquema de licuefacción de GN a pequeña escala del Idaho National Engineering and Environmental Laboratory

La figura 14.9 muestra el esquema del proceso de licuefacción de GN de AP&Ch. Este proceso utiliza el de cascada clásica en propano puro y el de autorrefrigeración. El propano licuado se utiliza para enfriar el refrigerante mixto MCR y el GN a una temperatura de $-32,5^\circ\text{C}$. El refrigerante mixto es una mezcla de nitrógeno, metano, etano, propano y butano. Comprimido y enfriado, pasa a un tanque intermedio para separar las fases, y de él se derivan líquido y gas al intercambiador de calor criogénico, donde son enfriados de nuevo por estrangulación y posteriormente vaporizados para ser realimentados a los compresores de MCR. El intercambiador de calor criogénico enfría una vez más y condensa el GN, que después pasa a almacenamiento.

Fig. 14.9.
Proceso de
licuefacción del
GN (Air
Products and
Chemicals)



En la figura 14.10, se muestra un cuadro con los diferentes componentes esenciales de una instalación de licuefacción de GN a pequeña escala, con sus correspondientes circuitos de conexión, utilizada en el Idaho National Engineering and Environmental Laboratory.

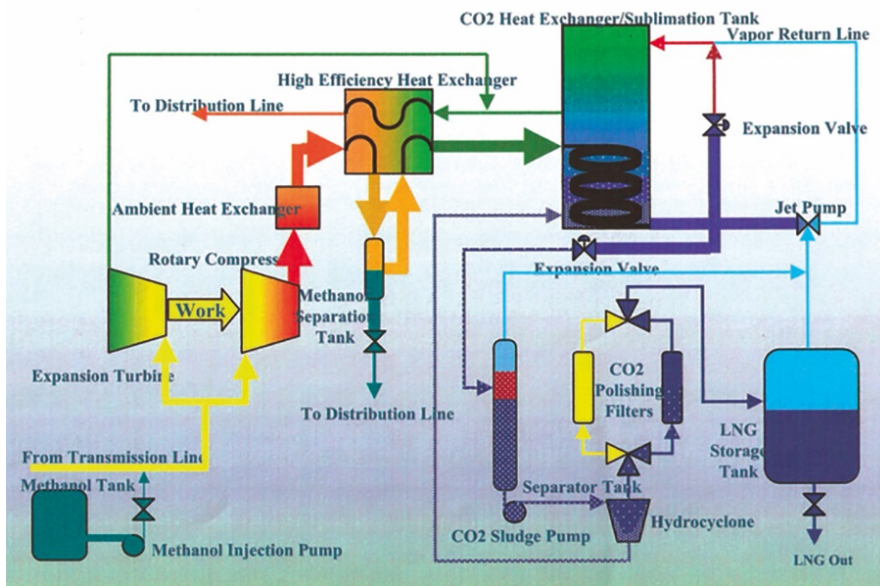


Fig. 14.10.

(Ver ref. 1, 2 y 3)

→ 15



Tubo de vórtice de Ranque-Hilsch

15.1 Introducción

El tubo de vórtice de Ranque-Hilsch es un dispositivo mecánico, sin partes móviles, que divide una corriente de gas comprimido en dos: una fría y otra caliente. Generalmente, los tubos de vórtice se pueden clasificar en dos tipos: el de reflujo (figura 15.1a) y el de flujo paralelo o uniflujo (figura 15.1b). La figura 15.2 muestra, con mayor detalle, la configuración del tubo de vórtice de reflujo y las corrientes fría y caliente en él.

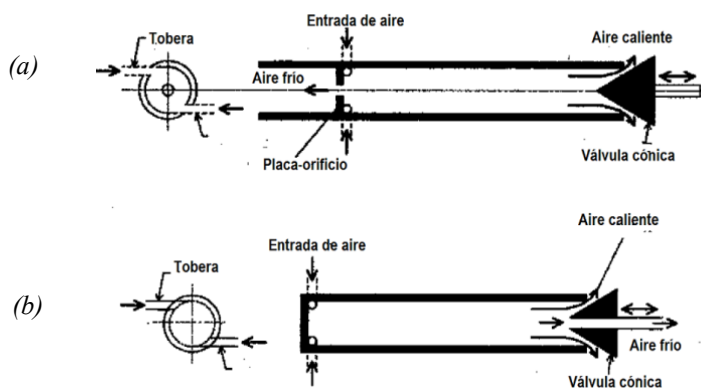


Fig. 15.1.
Tubos de vórtice (a) de reflujo, (b) uniflujo¹

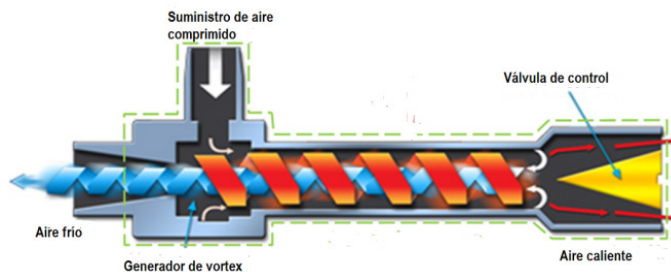


Fig 15.2.



El principio de funcionamiento del tubo de vórtice de reflujo consiste en la inyección de gas comprimido en una cámara generadora de un remolino intenso, que se propaga a alta velocidad de rotación hacia un extremo del tubo, donde se encuentra una válvula de control que separa la capa exterior del remolino, descargada caliente al exterior, del núcleo central, que se ve obligado a retroceder hacia el otro extremo, donde es descargado frío. El gas que emerge del extremo caliente puede llegar a alcanzar una temperatura de 200°C y el del extremo frío, -50°C.

El tubo de vórtice uniflujo está constituido por un bloque de entrada de toberas, un tubo *vortex*, y una válvula de cono con un orificio central. A diferencia de la versión de reflujo, más popular, la salida de aire frío está localizada concéntricamente con la salida anular de aire caliente. Su funcionamiento es similar al del tubo de reflujo.

15.2 Historia

Al parecer, G. J. Ranque² fue el primero en observar, en 1933, el comportamiento de un tubo de vórtice. En 1946, R. Hilsch³ estudió el fenómeno con un más detalle, mediante una optimización tosca de la geometría del tubo relacionando la diferencia de temperatura con las presiones de entrada y salida y con los caudales, y evaluó el rendimiento del tubo de vórtice. Sin embargo, no llegó a explicar el proceso físico que había detrás del efecto, si bien sugirió que el tubo podía ser utilizado en procesos de separación de gas.

La publicación de Hilsch generó un interés considerable y, desde entonces, han aparecido en la literatura muchos artículos con posibles explicaciones de lo que hoy en día se denomina *efecto del tubo de vórtice de Ranque-Hilsch*. La revista *Scientific American*⁴ publicó en 1958 una primera historia del tubo de Hilsch. A continuación, se reproducen algunos párrafos:

“Shortly after the end of World War II, word came to the U.S. that the Germans had developed a remarkably simple device with which one could reach temperatures as low as the freezing point of mercury. The device was said to consist only of an air compressor and three pipes. The details of construction were not available, but it was reported that the device had in effect realized Maxwell’s demon, a fanciful means of separating heat from cold without work.”

“... When physicists heard that the Germans had developed a device which could achieve low temperatures, they were intrigued though obviously skeptical. One physicist, Robert M. Milton, investigated the matter first for the U.S. Navy.”

“Milton discovered that the device was most ingenious, though not quite as miraculous as it had been rumored. It consisted of a T-shaped assembly of pipe joined by a novel fitting. When compressed air is admitted to the ‘leg’ of the T, hot air comes out of one arm of the T and cold air out of the other arm! Obviously, however, work must be done to compress the air.”

“The origin of the device is obscure. The principle is said to have been discovered by a Frenchman who left some early experimental models in the path of the German Army when France was occupied. These were turned over to a German physicist named Rudolf Hilsch, who was working on low temperature devices for the German war effort. Hilsch made improvements on the Frenchman’s design but found that it was no more efficient than conventional methods of refrigeration in achieving fairly low temperature. Subsequently, the device became known as the *Hilsch tube*.”



Desde los años cincuenta, son numerosas las investigaciones que se han realizado sobre el tubo de vórtice, y se han publicado un sinnúmero de artículos intentando presentar una formulación general del proceso de separación de energía que tiene lugar en el tubo. Sin embargo, la complejidad del campo de flujo dificulta su análisis matemático.

15.3 Diseño básico del tubo

Las características del tubo de vórtice dependen mucho del diseño, que se ha de concebir cuidadosamente para obtener el campo de flujo correcto. Varios son los parámetros que pueden variar al diseñar el tubo; los principales son: la longitud, el diámetro, el área de tobera y las áreas de los extremos frío y caliente. Estos parámetros, junto con la relación de flujos de aire caliente y frío, y las condiciones de entrada, determinan notablemente los parámetros de escape del tubo: el campo de velocidad del flujo, la temperatura de las descargas de aire frío y aire caliente, la presión y el caudal.

Hasta el momento, vista la información disponible sobre el tema, parece que todavía no se ha llegado a establecer un modelo que prediga con fiabilidad las prestaciones de un tubo con base solo en las condiciones de entrada y la geometría del tubo. Por consiguiente, la mayoría de los criterios de diseño de un tubo del vórtice provienen de relaciones empíricas establecidas a partir de datos experimentales. Veamos algunos:

(i) La longitud del tubo

Para extraer en el extremo caliente del tubo la fracción caliente de la corriente inyectada, es necesario que la longitud del tubo sea mayor que la del núcleo del reflujo, pues, en caso contrario, la descarga en dicho extremo será una mezcla de gas caliente y gas frío.

La longitud del tubo afecta significativamente sus prestaciones. En los tubos cortos, la separación de temperatura es pequeña y la separación de corriente es alta; si son largos, ocurre lo contrario.

Se admite, en general, que las prestaciones óptimas se alcanzan con longitudes de tubo situadas en el intervalo $40 < L/D < 50$. No obstante, Takahama y Yokosawa⁶ sugieren utilizar un tubo de longitud $L \geq 100D$ para obtener el mejor rendimiento.

(ii) El diámetro del tubo

Tomando como criterio la diferencia de temperatura del gas en los escapes caliente y frío, se ha encontrado que las prestaciones del tubo aumentan a medida que aumenta su diámetro hasta los 16 mm, y después decrecen. De hecho, parece que el diámetro del tubo depende de la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. Estas últimas son las responsables, al parecer, del proceso de separación de energía. La relación de la separación de energía con el aumento del diámetro está asociada directamente a la magnitud de los gradientes de velocidad angular, que, en si las demás condiciones se mantienen iguales, es mucho menor en los tubos de mayor diámetro. Puesto que los gradientes de velocidad angular promueven la transferencia de trabajo, la separación de energía se reduce. Esto sugiere que, en general, en los tubos de vórtice de pequeño diámetro, el efecto de separación de energía será mayor que en los de mayor diámetro.



(iii) La cámara de toberas y la(s) tobera(s) de entrada

La tobera propiamente dicha es la parte de entrada del tubo de vórtice por la cual se inyecta tangencialmente el fluido en el tubo. Es la parte más importante, pues su forma y su área determinan las características del vórtice: la velocidad del fluido y la forma del remolino. Un criterio de diseño consiste en fijar el valor de la velocidad de entrada del gas en el tubo en 100 m/s, si bien resulta difícil de establecer, pues depende no solo de la presión aplicada y del diámetro de tobera d_n , sino también de la presión en el interior del tubo.

La tobera de entrada es un componente muy importante del tubo del vórtice. Para lograr las prestaciones óptimas, la pérdida de presión en la tobera de entrada deberá ser la menor posible; sin embargo, una tobera de entrada demasiado grande no asegura el establecimiento del flujo *vortex* adecuado, lo cual conlleva una baja difusión de la energía cinética y, por tanto, también baja la separación de temperatura.

Se ha encontrado experimentalmente que, en un tubo de vórtice optimizado, la relación del área de la tobera de entrada con el área del tubo de vórtice es:

$$\frac{A_{in}}{A_{vt}} \cong 0,156 + 0,176 / \tau_p \quad (15.1)$$

$$\tau_p = \frac{p_{in}}{p_c} = 7,5 \quad (14.1)$$

Los subíndices significan: *in*, entrada; *c*, extremo frío; *vt*, tubo de vórtice; *n*, orificio o ranura de tobera.

Takahama encontró que, para lograr grandes diferencias de temperatura o máxima capacidad de refrigeración, la geometría óptima del tubo de vórtice ha de cumplir las relaciones siguientes:

$$d_{in} / D_{vt} \leq 0,2 \quad ; \quad Nd_n^2 / D^2 = 0,16 - 0,20. \quad (15.2)$$

$$D^2 / Nd_n^2 \leq 2,3 \quad (15.2)$$

(iv) El tipo y el número de orificios o ranuras de la tobera de entrada

En los tubos de vórtice, los tipos de cámaras de vórtice, los tipos y el número de ranuras de la tobera de entrada son muy importantes. Las toberas de entrada deben diseñarse de modo que el flujo de gas sea tangencial en el tubo de vórtice. La mayoría de las cámaras de vórtice son circulares con una sola entrada, si bien las de dos entradas son más eficaces. La figura 15.3 muestra tres configuraciones distintas del conjunto de la cámara de toberas y las toberas.

En realidad, son muchas y variadas las propuestas de configuración de la cámara de toberas, y la forma y el número de ranuras de la tobera, sin que se haya llegado a un criterio mayoritariamente aceptado. No obstante, parece que el incremento del número de ranuras de la tobera de entrada produce una más alta separación de la temperatura en el tubo. La prestación de las toberas se caracteriza por la velocidad del remolino y por la simetría del flujo.

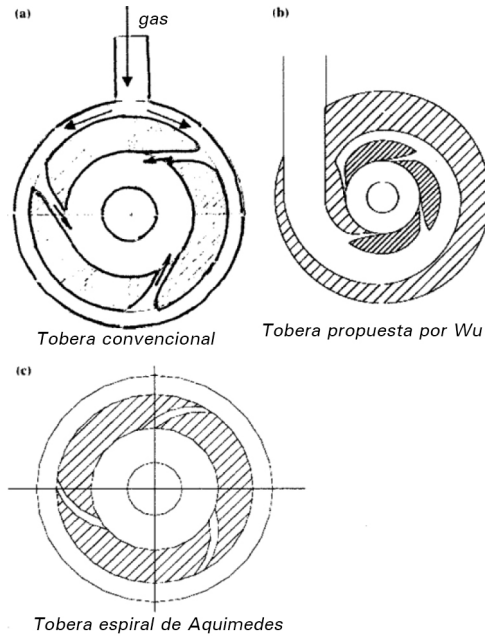


Fig. 15.3.
Algunas configuraciones de cámara con toberas¹

Takahama⁵ propone el criterio siguiente:

$$0,16 < Nd_n^2 / D^2 < 0,20, \text{ y } d_n / D < 0,2 \quad (15.3)$$

donde N es el número de orificios o ranuras de la tobera.

- (v) El tamaño del orificio de salida de la corriente fría

En general, el tamaño óptimo de orificio se encuentra en el intervalo:

$$0,4 < d_c / D < 0,6 \quad (15.4)$$

Westley⁷ sugiere como criterio la relación $A_c / A_{vt} \cong 0,167$ entre el área de la sección recta del orificio del extremo frío y el área de la sección recta del tubo. La tabla 15.1 presenta diámetros óptimos de orificio para dos valores de la relación de presiones p_{in} / p_c .

Merkulov propone la ecuación siguiente:

$$\frac{d_c}{D} = 0,35 + 0,313\varepsilon \quad (15.5)$$

donde $\varepsilon = \dot{m}_c / \dot{m}_{in}$ representa la fracción de flujo másico de la corriente fría.

En cualquier tubo de vórtice de dos extremos, el diámetro de reflujo es siempre menor que $D - 2d_n$, donde d_n es el diámetro de los orificios o ranuras por donde se introduce el gas en el tubo. Un criterio muy conservador consiste en determinar el diámetro en el extremo frío del tubo por la condición $d_c < D - 2d_n$.

Tabla 15.1. Diámetros óptimos de orificio¹

d_n/D_h	d_c/D_h	
0,266	0,34	0,38
0,376	0,37	0,38
0,461	0,4	0,4
0,532	0,41	0,37
0,595	0,36	0,32
$p_{in}/p_c=1,5$		$p_{in}/p_c=7$

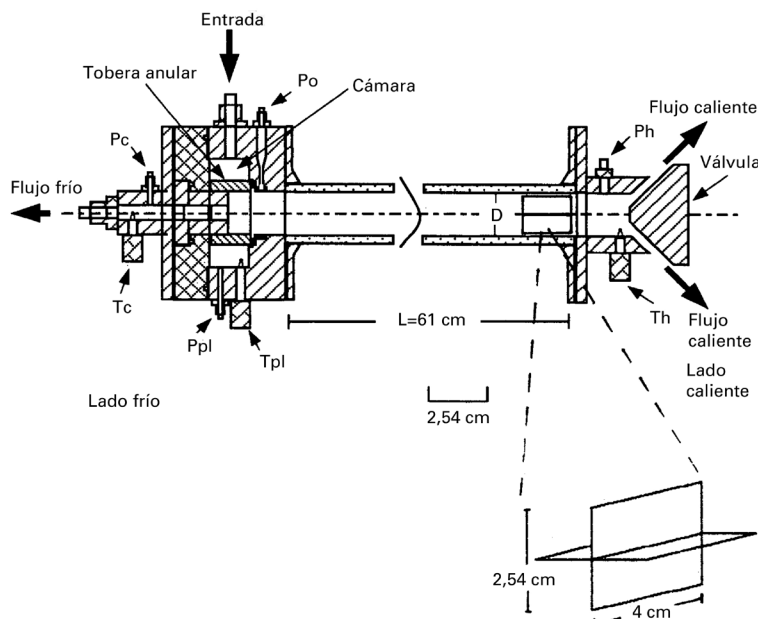
En resumen, cabe concluir que, para conseguir unos resultados óptimos, el valor del diámetro adimensional del orificio de salida de la corriente fría debe encontrarse en el intervalo $0,4 < d_c / D < 0,6$.

(vi) La válvula de control de la corriente caliente

En general, se utiliza una válvula de cono con un ángulo de 50° . Situada en el extremo del tubo, confina la corriente periférica, caliente, hacia la pared y restringe el flujo de la corriente central, fría, que se ve obligado a retroceder. La regulación de la posición de esta válvula permite controlar la fracción de flujo másico correspondiente a la corriente fría.

A título informativo, las figuras 15.4 y 15.5 muestran la configuración del tubo de vórtice utilizado en los experimentos que llevó a cabo J. Camiré.⁸ Se ha de hacer constar que, por imposición de los requisitos de los sistemas de medición de las magnitudes que intervienen en la caracterización de las prestaciones del tubo, sus dimensiones no cumplen por completo los criterios de diseño antes expuestos.

Fig. 15.4.
Conjunto de tubo de
vórtice utilizado por
Camiré⁸



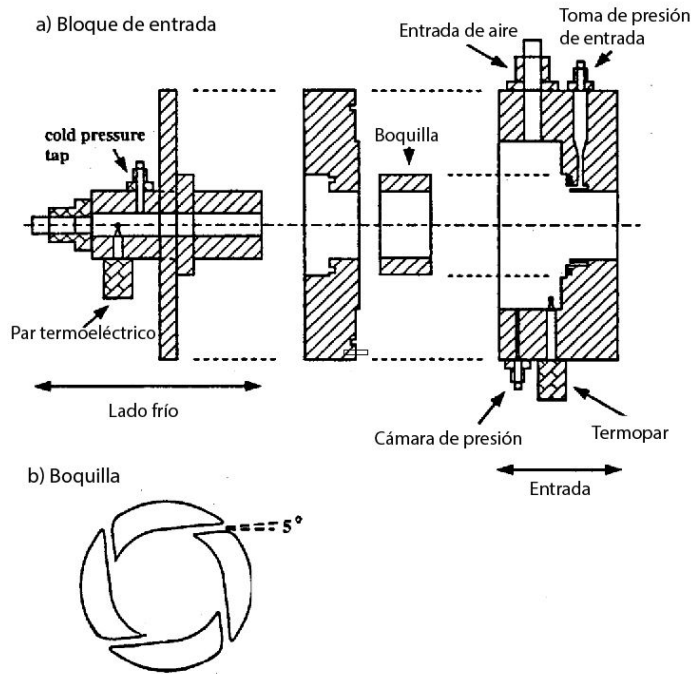


Fig. 15.5. Detalles de la cámara y de la tobera del tubo de vórtice utilizado por Camiré⁸

(Ver ref. 5, 6, 7 y 8)

15.4 Prestaciones

Para caracterizar las prestaciones del tubo de vórtice, se utilizan las magnitudes de estado inicial T_0 , P_0 y flujo másico j_0 , a partir de las cuales se expresan las magnitudes características de la corriente caliente, T_h , P_h , j_h , y las de la corriente fría, T_c , P_c y j_c .

Los experimentos realizados por Camiré⁸ aportaron los resultados que se resumen a continuación.

La figura 15.6 muestra la variación de la temperatura total ($T_t = T + u^2 / 2c_p$) con respecto a su valor inicial de las corrientes caliente y fría en el tubo de vórtice, cuyas características ya se han especificado, en función de la relación de sus respectivos flujos másicos.

Se constata la influencia notable de la presión del gas p_{pl} en la cámara pulmón previa al generador de vórtice, por una parte, y de la relación de flujos másicos, por otra.

La figura 15.8 muestra una representación del campo de flujo en el tubo de vórtice. El ángulo θ indica la orientación del vector velocidad máxima del gas con respecto al eje z . Su conocimiento permite descomponer la velocidad máxima en sus componentes axial y tangencial, por una parte, y la dirección de la corriente ($\theta < 90^\circ$: corriente hacia el extremo caliente; $\theta > 90^\circ$: corriente hacia el extremo frío), por otra.



Fig. 15.6.
Variación de la temperatura de remanso de las corrientes caliente y fría con respecto al valor de la corriente entrada en función del flujo másico normalizado de la corriente fría. Fuente: Camiré⁸

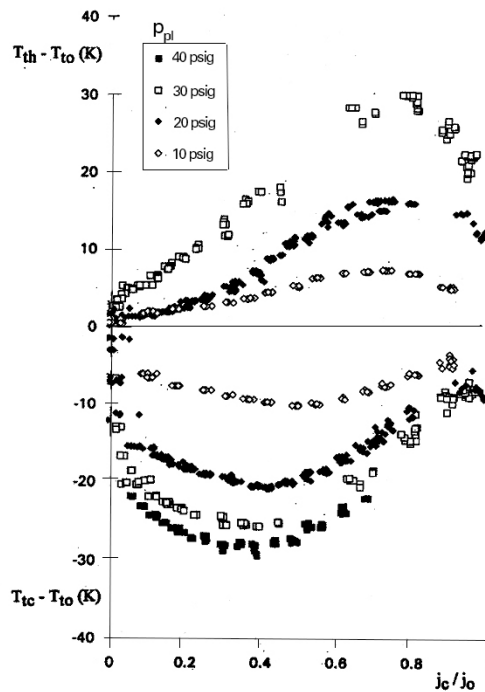


Fig. 15.7.
Temperatura (K) de la corriente caliente y de la corriente fría en función del flujo másico normalizado de la corriente fría para diferentes valores de la presión de entrada. Fuente: Shannak⁹

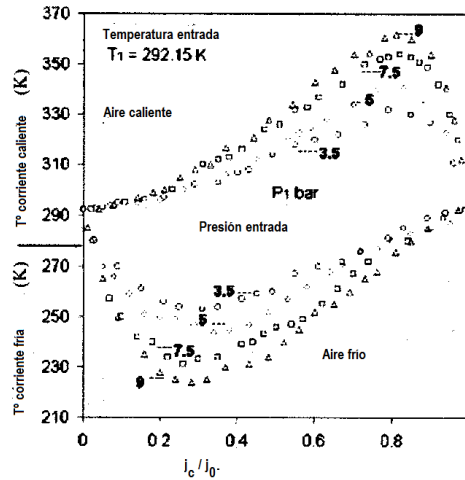
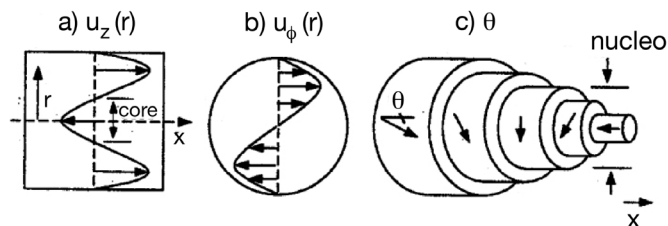


Fig. 15.8.
Campo de flujo en el tubo de vórtice⁸





La figura 15.9 representa el ángulo θ del vector velocidad en función de la distancia radial normalizada para diferentes valores del flujo másico normalizado de la corriente fría. A la separación de las corrientes fría y caliente corresponde $\theta = 90^\circ$.

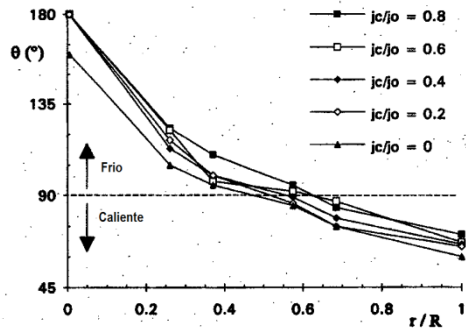


Fig. 15.9. Ángulo del vector velocidad en función de la distancia radial en la sección recta a la mitad del tubo de vórtice⁸

(Ver . 8, 9, 10 y 11)

15.5 Aproximación teórica de las prestaciones del tubo de vórtice

El efecto del tubo de vórtice encuentra, en principio, una explicación completa mediante la ecuación de turbina de Euler que, en su forma vectorial general, se escribe:

$$T - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}}{c_p} = \text{Ccte.} \quad (15.6)$$

donde T es la temperatura de remanso del gas rotante en la posición radial \vec{r} , \vec{v} es la velocidad absoluta del gas, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sistema y c_p es el calor específico del gas a presión constante.

La ecuación 15.6 muestra claramente que, mientras el gas, moviéndose hacia el centro del tubo, está enfriándose, el gas periférico aumenta su velocidad. Al mismo tiempo, el rozamiento del gas periférico a gran velocidad con la pared del tubo transforma la energía cinética en energía interna, lo cual se manifiesta por un aumento de la temperatura del gas en la salida.

En la exploración de la separación de temperatura en un tubo de vórtice, se han considerado diferentes factores, tales como el gradiente de presión, la viscosidad, la estructura del flujo y la transmisión acústica. Debido a la complejidad de la estructura del flujo en el tubo, ninguno de los factores mencionados se ha mostrado determinante en la separación de energía.

El primer fenómeno que se investigó fue el cambio de presión en el tubo. En investigaciones más recientes, se ha estudiado, por simulación numérica, la caída de temperatura cerca de la entrada al tubo, debida a la expansión brusca del gas. Su valor puede calcularse aproximadamente mediante la ecuación de expansión adiabática $P \cdot T^{-(\gamma/(\gamma-1))} = \text{Ccte.}$; sin embargo, la notable diferencia entre el valor calculado y el valor

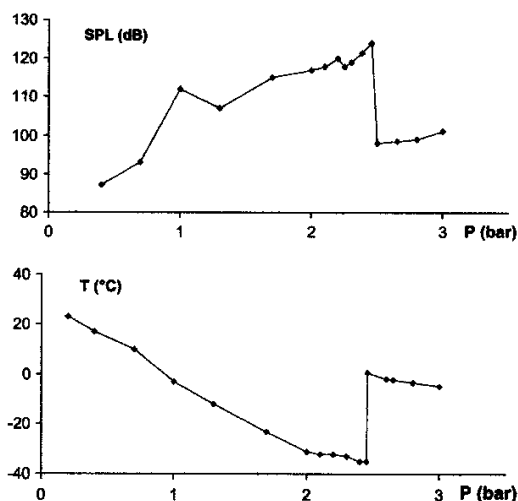


obtenido experimentalmente sugiere que existen otros factores que influyen en la separación térmica. No obstante, la caída de temperatura, debida a la expansión brusca, contribuye significativamente a la separación global de la temperatura.

Otros estudios han sugerido que la generación de un vórtice forzado es la razón principal de la existencia de un gradiente de presión radial; sin embargo, no se ha llegado a un acuerdo sobre la razón por la cual la temperatura aumenta en el flujo periférico.

Otro posible factor que contribuye a la separación térmica es la transmisión del ruido que se produce en el tubo. Los resultados experimentales muestran que, cuando aumenta la presión de entrada, se produce un incremento brusco de la temperatura de -35°C a $0,6^{\circ}\text{C}$ y, simultáneamente, se registra una caída brusca de 25 dB del nivel de presión acústica. Los resultados representados en la figura 15.10 muestran una correspondencia notable entre los cambios en la separación de la temperatura y el nivel de la presión acústica. Sin embargo, no se dispone de evidencia suficiente para sostener que la transmisión acústica altera la estructura de flujo y, por ello, el gradiente de presión en el interior del tubo.

Fig. 15.10.
Influencia del nivel
de presión acústica
en el tubo sobre el
valor de separación
de la temperatura¹⁰



Según algunos investigadores, son causas importantes del calentamiento de la corriente externa la fricción interna y la turbulencia. Se ha sugerido que el calor generado por fricción entre el flujo de gas y la pared interna del tubo convierte la energía cinética en energía térmica, que causa elevación de temperatura; sin embargo, los cálculos demuestran que esta causa no es suficiente para dar lugar al gradiente de temperatura en el tubo de vórtice, en que el incremento de temperatura se sitúa entre 30 y 100 K.

En la investigación del tubo de vórtice de contra-corriente, se constata que la proporción de aire frío forzado hacia atrás por la obstrucción del extremo caliente es mayor que la proporción de aire frío eyectado desde el extremo frío. Por ello, parte del aire frío forzado hacia atrás debe volver al extremo caliente, lo cual da lugar a una circulación secundaria o recirculación, como se muestra en la figura 15.11. Este flujo de recirculación transfiere energía a la corriente primaria inyectada y aumenta la temperatura de la capa externa, al tiempo que enfría el núcleo del flujo. Sin embargo, no todas las investigaciones corroboran la existencia de este flujo secundario. Al parecer, la generación de un flujo secundario depende del tamaño de la tobera del extremo frío del tubo.

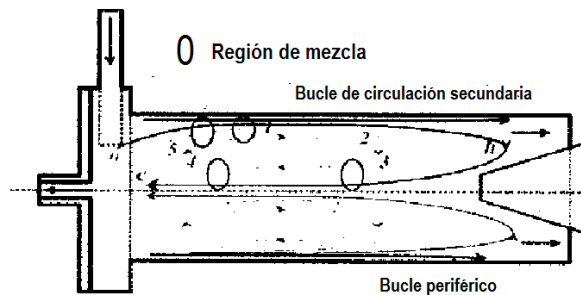


Fig. 15.11.
Regiones de mezcla
y de circulación se-
cundaria en el tubo
de vórtice¹⁰

Como una de las razones de la separación de la temperatura, también se ha investigado el efecto del gradiente de la temperatura estática. La figura 15.12 muestra la distribución de la temperatura estática como una función del radio a lo largo de un tubo de 350 mm de longitud. Se constata que la temperatura estática disminuye radialmente cerca de la entrada, lo cual significa que el flujo interno tiene una temperatura más alta que el flujo periférico, excepto en la capa límite de pared. Se ha supuesto que este gradiente de temperatura estática incrementa la transferencia de calor desde el núcleo hasta el flujo periférico, que ocasiona la separación de la temperatura total.

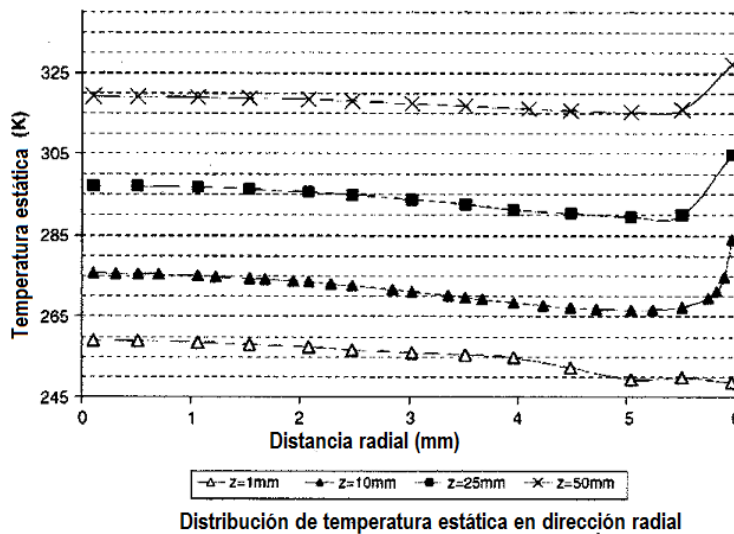


Fig. 15.12.
Distribución radial
de temperatura está-
tica¹⁰

Por contra, otras investigaciones aportan diferente información: la temperatura estática aumenta hacia la pared. La figura 15.13 muestra la distribución radial de la temperatura estática en dos posiciones axiales, a 24 mm y a 48 mm, a partir de la inyección en un tubo de vórtice de 205 mm de longitud. La figura 15.14 muestra la distribución radial de la temperatura estática cerca de la entrada, obtenida por simulación numérica, muy similar a la obtenida experimentalmente.



Fig. 15.13.
Distribución radial
de la temperatura
estática en dos sec-
ciones rectas del
tubo de vórtice¹⁰

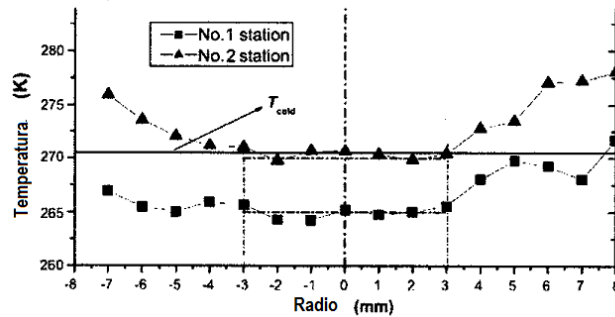
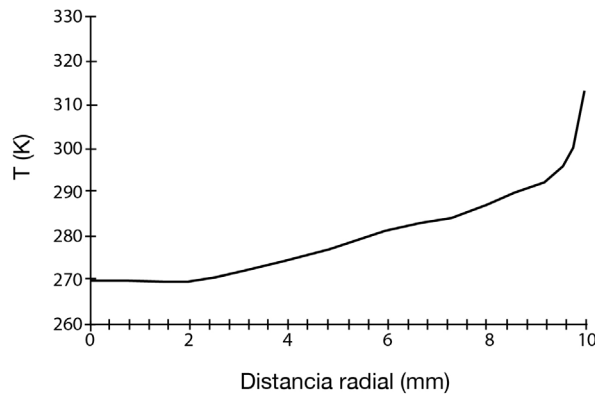


Fig. 15.14.
Predicción numérica
de la distribución ra-
dial de temperatura
estática¹⁰



15.5.1 Modelos fenomenológicos aproximados

Los primeros modelos publicados del tubo de vórtice son fenomenológicos. La mayoría de ellos se encuentran descritos en la publicación (9).

El análisis dimensional aplicado al conjunto de magnitudes significativas del funcionamiento de un tubo de vórtice muestra que la relación del descenso de temperatura del gas con respecto a su temperatura inicial es una función de la relación entre la presión de entrada y la presión de la corriente fría, por una parte, y de la fracción $\mu_c = \dot{m}_c / \dot{m}_{in}$ de flujo másico inyectado que sale del tubo como corriente fría, por otra.

$$\frac{\Delta T_f}{T_{in}} = f\left(\frac{P_{in}}{P_c}, \mu_c\right) \quad (15.7)$$

A partir de los resultados experimentales obtenidos por varios investigadores, parece razonable considerar que el descenso de la temperatura de la corriente central del gas es el resultado de una combinación de una expansión brusca cerca de la entrada, de la transferencia de energía hacia la corriente periférica debida a fricción interna y turbulencia, del flujo secundario y del gradiente de temperatura estática. Por su parte, el incremento de la temperatura puede ser considerado el resultado de la compresión del gas en la periferia, del gradiente de temperatura estática, de la energía transferida a causa de la fricción entre capas turbulentas, de la fricción entre el gas y la pared del tubo y de la circulación secundaria. Además,



el hecho de que la distribución de temperatura a lo largo de la pared presente un máximo cerca de la salida del gas caliente (v. figura 15.15) conduce a sospechar la existencia allí de grandes remolinos de recirculación.

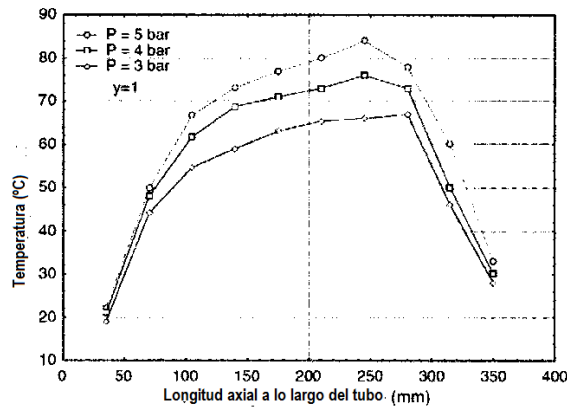


Fig. 15.15.
Distribución de temperatura a lo largo de la pared del tubo¹⁰

Pese al gran número de investigaciones que se han llevado a cabo para descifrar los mecanismos subyacentes en la separación de temperatura, no se ha llegado todavía a comprenderlos.

15.5.2 Modelos teóricos

En el transcurso de los años, han sido numerosos los intentos que se han realizado para comprender los mecanismos responsables de los efectos del calentamiento y el enfriamiento en los tubos de vórtice, para derivar modelos analíticos simplificados de las prestaciones del tubo. La mayoría de los modelos parten de las ecuaciones de Navier-Stokes para resolver el campo de flujo suponiendo alguna de sus características y simplificando su configuración con respecto a la del modelo estándar, y después introducen las relaciones termodinámicas *ad hoc*. Otros investigadores desarrollaron relaciones empíricas utilizando el análisis dimensional. Ninguno de estos modelos ha sido capaz de explicar adecuadamente el efecto de separación de energía en el tubo de vórtice estándar.

De los modelos más recientes, cabe destacar el de Ahlborn y otros,¹² en que el calentamiento se atribuye a la conversión de la energía cinética y el enfriamiento, al proceso inverso.

En este apartado, se exponen las ecuaciones básicas del modelo de Ahlborn, y su validez se contrasta con los resultados experimentales de Camiré.

La figura 15.16 ilustra la estructura del flujo en el tubo de vórtice estándar.

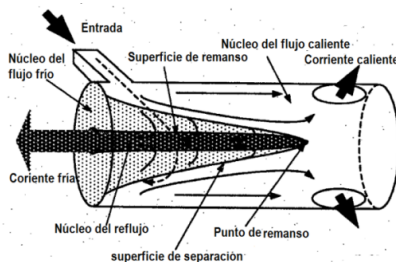


Fig. 15.16.
Esquema del tubo de vórtice y de su estructura de flujo⁸



15.5.3 La dirección del vector velocidad en los remolinos del tubo de vórtice y componentes de la velocidad

En los primeros modelos del tubo de vórtice, se suponía que, en el plano de entrada, existía un vórtice de Rankine, que, como se sabe, está constituido por un vórtice forzado y un vórtice libre. Sin embargo, en todas las mediciones de los perfiles de presión y de velocidad del fluido en la sección de entrada, no se observó ningún vórtice libre. Por otra parte, la hipótesis de vórtice forzado puede ser adecuada para el tubo de vórtice uniflujo, pero no probablemente para el tubo estándar.

Ante la incertidumbre de cuál es realmente la distribución de velocidad en una sección transversal del tubo, Camiré opta por medir la dirección θ del vector velocidad. La figura 15.17a muestra el valor del ángulo θ en función de la posición radial adimensional r/R para varios valores del flujo másico adimensional de la corriente fría j_c/j_0 , y la figura 15.17b muestra la localización radial del núcleo del reflujo en función del mismo flujo másico adimensional. El hecho de que exista núcleo de reflujo incluso cuando $j_c/j_0 = 0$ es sorprendente; se ha interpretado como la existencia de un movimiento axial rotativo presente en el extremo frío del tubo, incluso cuando el flujo másico allí es cero.

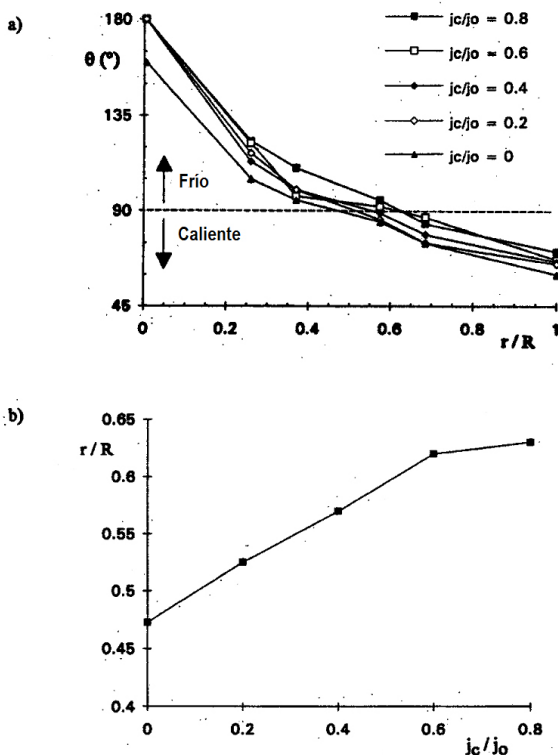


Fig. 15.17a.
Ángulo del vector
velocidad de los
remolinos en función
de la distancia
radial⁸

Fig. 15.17b.
Localización radial
del núcleo del reflujo
en función de la
fracción del flujo má-
sico frío

La velocidad de remolino se calcula a partir de la variación radial de la presión en una sección recta del tubo. En efecto, a partir de las medidas de presión total $P = p + 1/2(\rho u^2)$ y de las medidas de presión en la pared del tubo, se determina la variación radial de la presión en su sección recta:



$$\Delta p(r) = P(r) - p_p = p(r) \left(1 + \frac{u^2(r)}{2RT(r)} \right) - p_p \quad (15.8)$$

Habida cuenta de que $u^2 = u_z^2 + u_r^2 + u_\phi^2 \cong u_z^2 + u_\phi^2$, , pues u_r^2 es despreciable frente a los otros términos, la ecuación 15.8 permite determinar las componentes u_z, u_ϕ de la velocidad u en la posición r , si $p(r)$, p_p y $T(r)$ son conocidos, y, por tanto, la distribución radial de velocidad. A tal fin, Camiré calcula, a partir de resultados experimentales, la variación de la velocidad axial u_z y de la velocidad tangencial u_ϕ a lo largo del radio del tubo en una posición axial que corresponde a la mitad de la longitud del tubo, suponiendo que la variación de la presión a lo largo de la pared y a lo largo del eje del tubo es lineal, que la variación de la presión a lo largo del radio es función de su cuadrado y que la variación radial de la temperatura del fluido es lineal. Por ejemplo, la variación de la velocidad tangencial se calcula mediante la expresión:

$$u_z(r) = u(r) \sin \theta = \left[2RT \left\{ \left(\frac{\Delta p(r) + p_p}{p(r)} \right) - 1 \right\} \right]^{1/2} \sin \theta \quad (15.9)$$

La figura 15.18 muestra la distribución radial de la componente tangencial de la velocidad en la sección recta del centro longitudinal del tubo y una presión del fluido en la entrada de 20 psig.

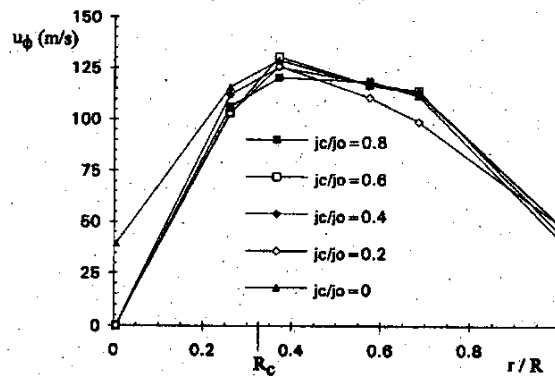


Fig. 15.18.
Distribución radial
de la componente
tangencial de la ve-
locidad⁶

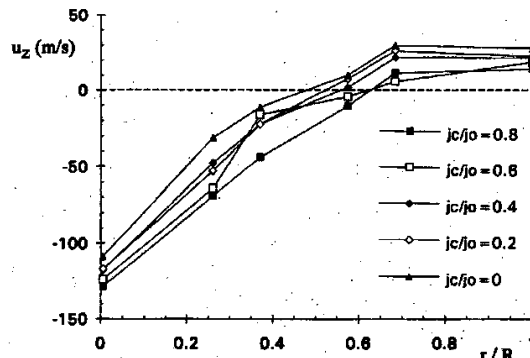


Fig. 15.19.
Distribución radial
de la componente
axial de la veloci-
dad⁶



La figura 15.19 muestra la distribución radial de la componente axial de la velocidad para diferentes valores del flujo másico adimensional de la corriente fría.

15.5.4 La distribución de presión

En cuanto a la distribución de presión, supuesto un perfil de vórtice forzado, el modelo de Ahlborn utiliza la ecuación siguiente:

$$p_0 - p_c|_{z=0} = \frac{u_0^2}{2} \left(1 - \frac{R_c^2}{R^2} \right) \frac{1}{\pi R^2} \int_{R_c}^R \rho 2\pi r dr \quad (15.10)$$

15.5.5 La relación entre velocidad, presión y flujos másicos

Camiré introduce el parámetro adimensional $X = (p_0 - p_c) / p_0$, que, mediante la ecuación 15.10 y expresando u_0^2 en términos del número de Mach, se escribe:

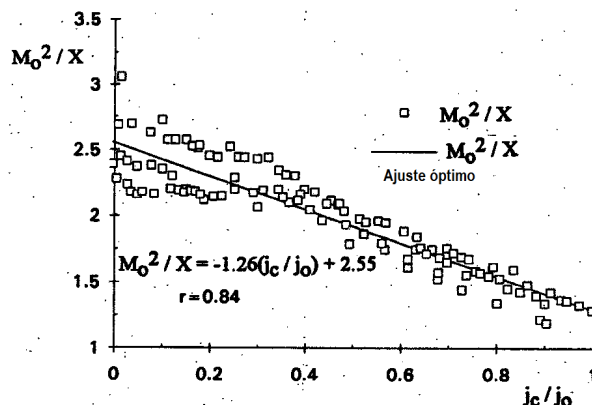
$$X = \frac{\gamma}{2} M_0^2 \left(1 - \frac{R_c^2}{R^2} \right) \quad (15.11)$$

A partir de los resultados experimentales, se calcula X y M , de modo que, definido M_0^2 / X , la representación de esta magnitud frente a j_c / j_0 permite, por ajuste funcional de dichos resultados, deducir una ecuación que describe adecuadamente la relación entre la velocidad de entrada, las presiones y la relación de flujos másicos para el tubo de vórtice utilizado en los experimentos.

La figura 15.20 muestra los resultados experimentales M_0^2 / X frente a j_c / j_0 y la recta, cuya ecuación, obtenida por ajuste funcional, se escribe:

$$M_0^2 / X = 2,55 - 1,26(j_c / j_0) \quad (15.12)$$

Fig. 15.20.
 M_0^2/X vs j_c/j_0



Evidentemente, el coeficiente de correlación es bajo, lo cual debe interpretarse en el sentido de que alguna otra magnitud interviene en el fenómeno.



15.5.6 Los límites de separación de energía

En el modelo de Ahlborn, las relaciones dinámicas en las direcciones radial y axial se combinan con las ecuaciones de balance de energía para obtener los límites de separación de temperatura.

Para ello, se considera el tubo de vórtice como un volumen de control en que hay una entrada de gas y dos salidas (v. figura 15.21). En su interior, se produce un intercambio de energía Q_h , en forma de calor o de trabajo, entre la corriente caliente periférica y el núcleo frío.

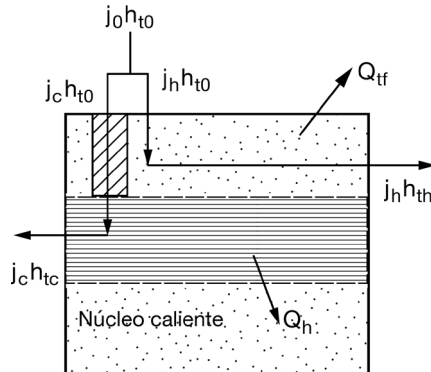


Fig. 15.21.
Volumen de control
para el balance de
energía⁸

Sea Q_{tf} el calor transferido al exterior a través de la pared del tubo; entonces, el balance energético en cada una de las corrientes es:

$$\text{Corriente fría: } j_c \left(c_p T_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \right) = j_c \left(c_p T_c + \frac{1}{2} u_c^2 \right) + Q_h \quad (15.13)$$

$$\text{Corriente caliente: } j_h \left(c_p T_0 + \frac{1}{2} u_0^2 \right) = j_h \left(c_p T_h + \frac{1}{2} u_h^2 \right) - Q_h + Q_{tf} \quad (15.14)$$

La figura 15.22 muestra el calor intercambiado entre las corrientes caliente y fría en función del flujo másico adimensional de la corriente fría.

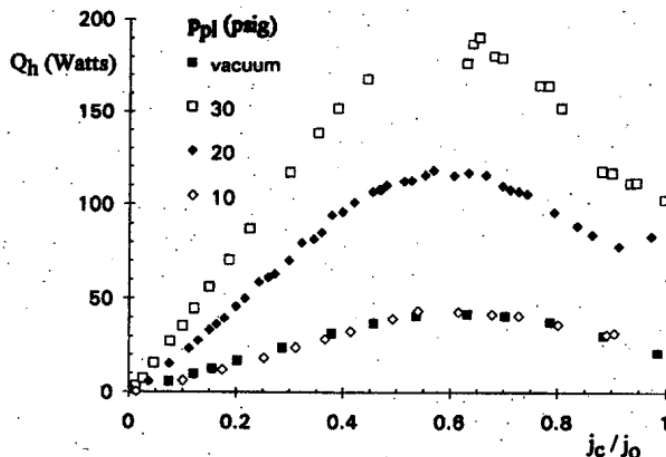


Fig. 15.22.
Intercambio de calor
entre las corrientes
caliente y fría⁸

Aceptada la hipótesis de que el calentamiento del fluido en el tubo de vórtice se debe a la conversión de energía cinética en calor y el enfriamiento, al proceso inverso, los balances de energía y las ecuaciones dinámicas de cada corriente permiten derivar relaciones que predicen los límites de la separación de temperatura $T_h - T_0$. Sin embargo, el hecho de que los valores encontrados a partir de los resultados experimentales de Camiré superen los valores de separación de temperatura predichos por el modelo de Ahlborn sugiere que el efecto del tubo de vórtice ha de ser descrito como una separación de la temperatura de remanso, en lugar de una separación de la temperatura estática.

Las discrepancias entre los valores de los parámetros que sirven para caracterizar las prestaciones de un tubo de vórtice, determinados mediante los resultados experimentales de Camiré, y los obtenidos por Ahlborn, llevan a concluir que las prestaciones del tubo estándar no se pueden simular adecuadamente por el modelo de rotación de un cuerpo sólido; no obstante, cabe extraer varias conclusiones interesantes:

- El modelo de rotación de un cuerpo sólido muestra la importancia de la estructura de vórtice sobre la separación de energía.
- Puesto que la rotación de un cuerpo sólido se inicia en la tobera de entrada, esta deviene una parte importante del tubo.
- La presencia de una rotación casi de un cuerpo sólido es una causa del efecto del tubo de vórtice.

(Ver ref. 13 y 14)

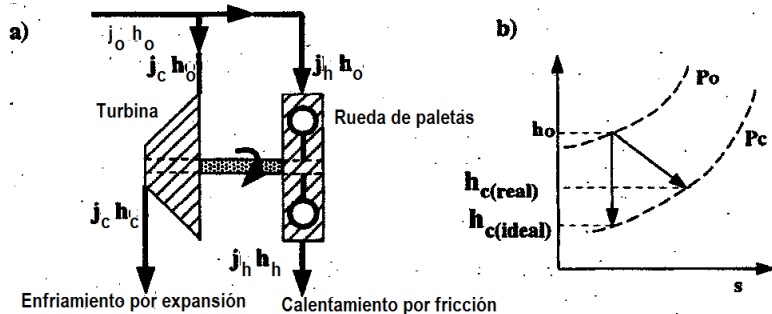
15.6 El modelo de la “rueda de paletas”

El modelo de vórtice de rotación de un cuerpo sólido no sirve para describir correctamente la estructura de flujo en un tubo de vórtice estándar. Por ello, ha habido interés en desarrollar un modelo de dos corrientes separadas, entre las cuales se produzca un intercambio mutuo de calor que dé lugar a una separación de energía.

Uno de estos modelos es la “rueda de paletas”, cuya configuración básica y diagrama de energía se muestran en la figura 15.23.

Fig. 15.23a.
Rueda de paletas

Fig. 15.23b.
Diagrama del proceso de expansión



En este modelo, la turbina, que representa el proceso de núcleo frío, genera la energía mecánica rotacional de un flujo de torbellino, y también la de un flujo axial. Esta energía



mecánica es transmitida por un eje a una rueda de paletas que la disipa en forma de calor. La rueda de paletas representa el proceso en la “camisa caliente” del tubo de vórtice.

La energía producida en la turbina, que después la rueda de paletas convierte en calor, se expresa:

$$W = j_c (h_{t0} - h_{tc}) = (j_c / c_p) (T_{t0} - T_{tc}) \quad (15.15)$$

y el rendimiento de la turbina en el proceso de expansión del flujo, que el modelo considera isoentrópico, se expresa:

$$\eta_{turb} = \frac{h_{t0} - h_{tc}}{h_{t0} - h_{tc(ideal)}} = (T_{t0} - T_{tc}) / \left[T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right\} + \frac{u_0^2}{2c_p} - \frac{u_c^2}{2c_p} \right] \quad (15.16)$$

A partir de los resultados experimentales obtenidos por Camiré en su tubo de vórtice estándar, se calcula el rendimiento de la turbina mediante la ecuación 15.16. La figura 15.24a muestra la variación del rendimiento de la turbina en función del flujo másico adimensional de la corriente fría. A su vez, la figura 15.24b muestra el rendimiento del proceso de enfriamiento en el tubo de vórtice estándar, calculado por Hilsch, en función también de dicho flujo másico adimensional. Ahora, combinando las ecuaciones 15.12 y 15.16, se obtienen los límites de separación de la temperatura total. El modelo de “rueda de paletas” explica parcialmente cómo se puede obtener una separación de energía en un tubo de vórtice. Describe adecuadamente el efecto de enfriamiento por expansión del gas en la turbina; sin embargo, no explica el enlace entre los procesos de calentamiento y enfriamiento.

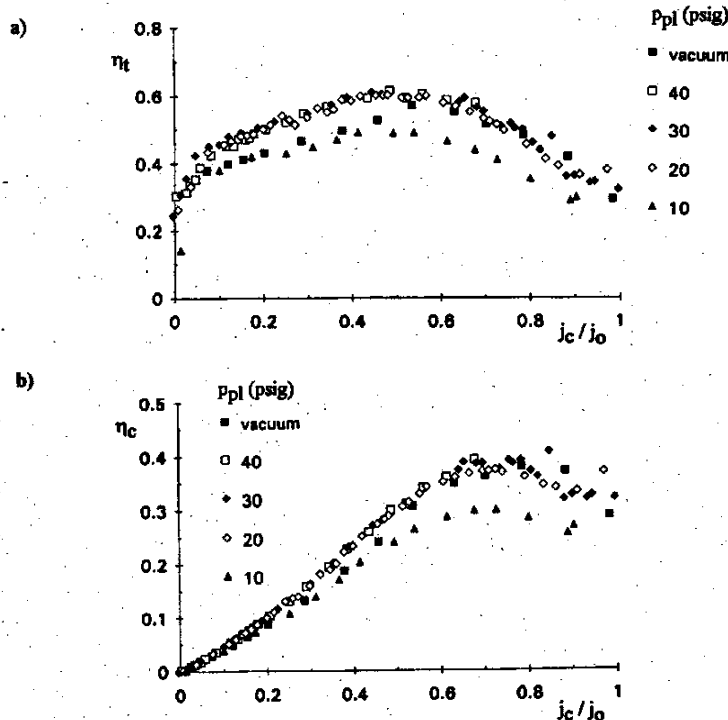


Fig. 15.24.
(a) rendimiento energético de la turbina, (b) rendimiento de potencia de enfriamiento



Este modelo se ha utilizado para estimar el rendimiento de máximo enfriamiento en el tubo de vórtice, que es del orden del 42 %. Además, utilizando los resultados experimentales de Camiré, aporta nuevos límites de separación de la temperatura total:

$$\text{Máximo efecto de enfriamiento } \frac{T_{t0} - T_{tc}}{T_0} |_{max} = 0,23 \quad (15.17)$$

$$\text{Máximo efecto de calentamiento } \frac{T_{th} - T_{t0}}{T_0} |_{max} = 0,63 \quad (15.18)$$

Se ha de hacer constar que estos resultados no pueden explicarse totalmente por la teoría del modelo de la “rueda de paletas”.

Resumiendo, este modelo ayuda a comprender el efecto del tubo de vórtice y se puede utilizar para calcular la separación de la temperatura total, pero no sirve para describir completamente el proceso físico subyacente en el efecto de separación de la energía.

(Ver ref. 8)

15.7 Optimización del tubo de vórtice

Las prestaciones del tubo de vórtice y su diseño óptimo varían con el valor de “corte” o fracción de la corriente de gas desviada como corriente fría. Lewis y Bejan¹⁵ estudian cómo optimizar el efecto de enfriamiento en un tubo de vórtice estándar. Si se desea obtener la máxima refrigeración útil, esta se puede lograr, en parte, utilizando la corriente fría para el enfriamiento previo de la corriente de entrada; entonces, surge la cuestión de qué carga de refrigeración aplicar al tubo para optimizar su prestación y, en segundo lugar, qué valor de “corte” conviene a una temperatura ambiente dada y un valor de la presión de suministro del gas.

El análisis del primer efecto –enfriamiento previo de la corriente de entrada al tubo– implica plantear la primera y la segunda ley de la termodinámica, a fin de establecer un balance de energía para después minimizar la producción de entropía, de modo que se alcance el óptimo efecto de refrigeración. Para conseguir la segunda optimización, Lewis y Bejan consideran el tubo de vórtice como un intercambiador de calor entre dos corrientes internas.

Sea un tubo de configuración como la de la figura 15.1a. Suponiendo un tubo bien aislado, la primera ley requiere que se satisfaga:

$$\dot{m}c_p T_0 = \dot{m}c_p (1-x)T_h + \dot{m}c_p xT_c \quad (15.19)$$

donde T_0 es la temperatura ambiente, \dot{m} es el flujo másico del aire introducido en el tubo y x es la fracción del flujo másico recirculado (corriente fría) o “corte”. Definiendo $\Delta T = \Delta T_h + \Delta T_c$ como el efecto total de temperatura, se tiene:

$$\Delta T_c = (1-x)\Delta T, \quad \Delta T_h = x\Delta T \quad (15.20)$$

El efecto de enfriamiento se puede utilizar de dos maneras: extrayendo un flujo de calor \dot{Q} de algún cuerpo a la temperatura T_Q , lo cual conlleva una elevación de la temperatura



de la corriente fría, o bien utilizando la corriente fría en un intercambiador de calor regenerativo para disminuir la temperatura de la corriente de entrada al tubo. Para esta segunda opción, dichos investigadores suponen, con el fin de plantear un balance de entalpía para la combinación del tubo de vórtice y el intercambiador de calor regenerativo que admite un flujo de calor \dot{Q} suministrado por el cuerpo a la temperatura constante T_Q , que la disminución de la temperatura del gas que entra en el tubo por debajo de la temperatura ambiente no afecta las diferencias de temperatura inducidas dentro del propio tubo.

Para el primer procedimiento, sea $\Delta T_e = \dot{Q} / \dot{m}c_p$ el cambio de temperatura que se alcanzaría en la corriente de entrada; entonces:

$$T_0 - T_Q = \Delta T - \Delta T_e / [x(1-x)] \quad (15.21)$$

Cuando se extrae el máximo calor, el primer término de la ecuación 15.21 es cero, de modo que no hay ganancia de refrigeración. Este máximo es:

$$\Delta T_{e,max} = x(1-x)\Delta T \quad (15.22)$$

Por otra parte, la temperatura de refrigeración más baja $T_Q = T_c$ se obtiene cuando no se extrae calor. Por consiguiente, hay una primera optimización que se ha de encontrar sea cual sea el valor de “corte”. A tal efecto, un modo de proceder consiste en caracterizar la calidad del calor extraído en términos del trabajo mínimo (reversible) que tendría que realizarse en el intervalo de temperatura, o sea, en los términos de la potencia reversible equivalente $\dot{W} = \dot{Q}(T_0 / T_q - 1)$, que, en forma adimensional, se escribe:

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}c_p T_0} = \frac{\Delta T_e}{T_0} \left(\left[\frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_e}{x(1-x)T_0} \right] / \left[1 + \frac{\Delta T_e}{x(1-x)T_0} - \frac{\Delta T}{T_0} \right] \right) \quad (15.23)$$

La ecuación 15.23 puede optimizarse para un valor fijado de “corte”, a fin de determinar $\Delta T_{e,opt}$, y se obtiene:

$$\frac{\Delta T_{e,opt}}{T_0} = x(1-x) \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{1/2} \right] \cong x(1-x) \frac{\Delta T}{2T_0} \left(1 - \frac{\Delta T}{4T_0} \right) \quad (15.24)$$

La ecuación 15.24 tiene un máximo en $\Delta T / T_0 \rightarrow 3/4$.

Para el segundo procedimiento de optimización, se considera el tubo de vórtice como un intercambiador de calor a contracorriente y se supone que, en el interior del tubo, existe alguna superficie, a la temperatura de entrada, que separa la corriente fría de la corriente caliente; a través de ella, tiene lugar un intercambio turbulento de calor.

Sean $M = 2\pi kL / (\dot{m}c_p)$ el tamaño adimensional del intercambiador de calor; ε el rendimiento de un intercambiador de calor en contracorriente con corrientes desequilibradas, y $\Delta\theta$ la diferencia de temperatura interna producida por expansión del gas en el vórtice que, a los efectos del intercambiador, representa la temperatura característica del



tubo del intercambiador, mientras en el gas la diferencia de temperatura es ΔT , dependiendo del rendimiento y, por ello, del “corte”.

A partir de la definición de rendimiento –cambio real de temperatura en la corriente de menor capacidad, dividido por el máximo cambio de temperatura posible–, se obtiene:

$$\Delta T = \Delta \theta [1 - \varepsilon / (1 - x)] \quad , \quad x < 1/2 \quad \text{y} \quad \Delta T = \Delta \theta (1 - \varepsilon / x) \quad , \quad x > 1/2 \quad (15.25)$$

Se constata que el valor pico de ΔT ocurre para $x = 1/2$, sea cual sea el valor del “corte”.

Resumiendo, al nivel de primer orden en la relación de temperatura $\Delta T / T_o$, el primer óptimo requiere una carga a medio camino entre cero y el máximo efecto refrigerador que puede obtenerse con un “corte” dado, y la segunda optimización tiene su “corte” óptimo en una mitad, es decir, equilibrio entre las corrientes fría y caliente.

Por último, las prestaciones de un tubo de vórtice estándar dependen no solo de si está térmicamente aislado o no, sino también del valor de alguno de sus parámetros de diseño, como la relación de diámetros d / D y el número de toberas de entrada en la cámara de vórtice.

Fig. 15.25.
Efecto del aislamiento
del tubo sobre la varia-
ción de temperatura:
(a) extremo frío, (b) ex-
tremo caliente

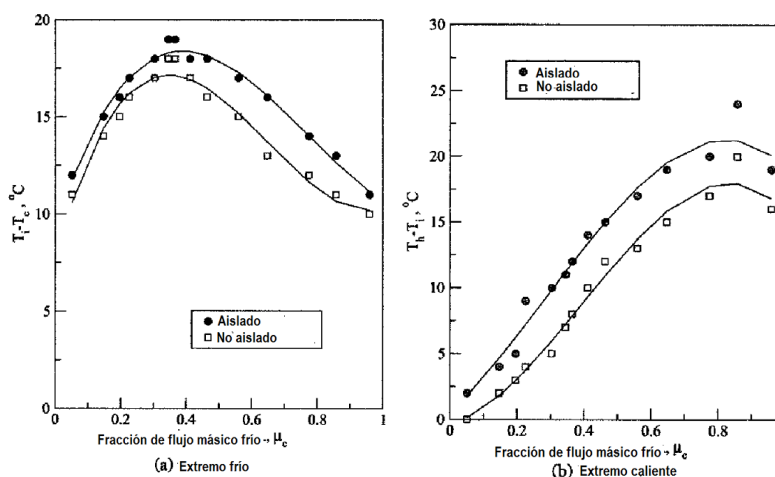


Fig. 15.26.
Efecto del diámetro
del orificio del extremo
frío sobre la reducción
de temperatura en un
tubo de vórtice aisla-
do. $T_1 = 29^\circ\text{C}$ ¹⁶

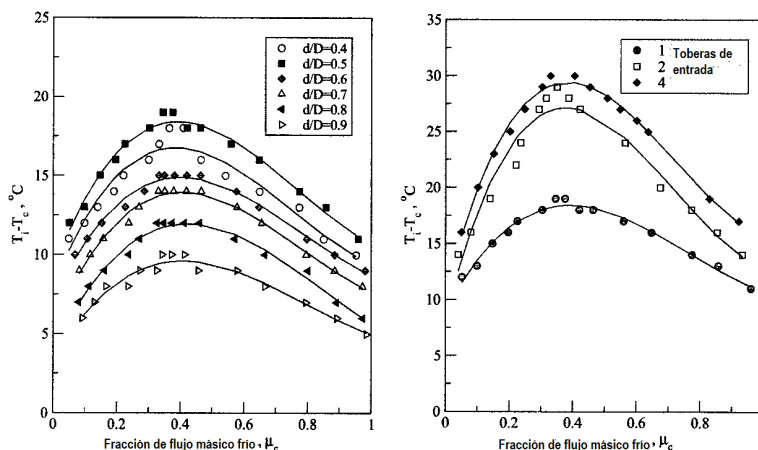


Fig. 15.27.
Efecto del número de
toberas de entrada so-
bre la reducción de
temperatura en un
tubo de vórtice aisla-
do. $T_1 = 29^\circ\text{C}$ ¹⁶



Las figuras 15.25a y 15.25b, 15.26, 15.27 y 15.28 muestran los resultados obtenidos por Promvonge y Eiamsa-ard.¹⁶

El aislamiento térmico del tubo reduce la pérdida de energía al medio del entorno, lo cual se traduce en un incremento de la separación de temperatura, del orden de 2 a 3°C en la corriente fría y de 2 a 5°C en la corriente caliente.

Un pequeño orificio ($d/D = 0,4$) da lugar a una contrapresión más alta, mientras que un orificio de mayor tamaño permite velocidades tangenciales más altas, que resultan en una separación térmica menor.

El incremento del número de toberas de entrada da lugar a una separación más alta de temperatura en el tubo de vórtice.

La figura 15.28 muestra una comparación entre la reducción de la temperatura adimensional obtenida en la experimentación llevada a cabo por Promvonge y Eiamsa-ard con tubos de vórtice de diferentes diámetros de orificio del extremo frío y varias fracciones de flujo másico de la corriente fría, y los resultados obtenidos por Hilsch (1947) y Guillaume-Jolly (2001).

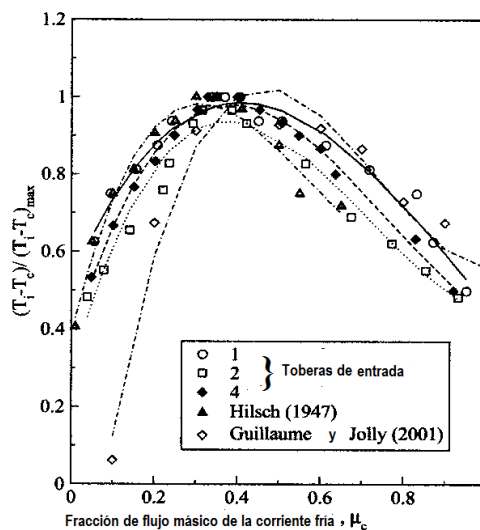


Fig. 15.28.

(Ver ref. 15)

15.8 Simulación numérica

A partir de los años setenta, se han propuesto varios modelos de simulación numérica para contrastar resultados experimentales, pero ninguno ha servido para explicar el fenómeno de la separación de energía en el tubo de vórtice.

En las dos últimas décadas, el desarrollo de métodos numéricos sofisticados para la simulación de la turbulencia ha permitido obtener unos resultados que se ajustan bien a los experimentales, especialmente utilizando modelos de turbulencia de segundo orden. A este respecto, cabe citar algunas publicaciones recientes de Promvonge,¹⁷ Skye y otros,¹⁸ Eiamsa-ard y Promvonge¹⁹ y Farouk.²⁰



Promvonge considera flujo compresible bidimensional en el tubo de vórtice y aplica el modelo de turbulencia ASM y $k - \varepsilon$ a un volumen de control. Los resultados obtenidos, comparados con los experimentales, son buenos.

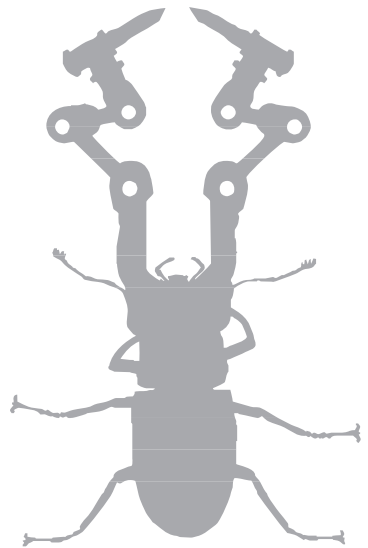
Skye también considera un flujo compresible bidimensional y le aplica los modelos de turbulencia $k - \varepsilon$ y RNG $k - \varepsilon$ con el código FLUENT, y obtiene unos resultados razonablemente buenos.

Eiamsa-ard y Promvonge aplican el modelo de turbulencia ASM y $k - \varepsilon$ a un volumen finito de flujo compresible bidimensional, y obtienen unos resultados muy buenos.

15.9 Aplicaciones

Los tubos de vórtice encuentran una gran variedad de aplicaciones en muchas industrias. Se han utilizado extensamente como enfriadores localizados en operaciones de corte, torneado, rectificado y soldadura, por ejemplo. También como dispositivos de enfriamiento en aeroplanos, minas y salas de instrumentos, y en procesos industriales. Asimismo, fueron utilizados por Linderstrøm-Lang²¹ en 1964 para separar gases de una mezcla, oxígeno y nitrógeno, dióxido de carbono y helio, dióxido de carbono y aire.

Los tubos comerciales llegan a producir un descenso de temperatura de hasta 71°C, logrando una diferencia de temperatura entre las corrientes caliente y fría de 140-160°C. Los límites de temperatura en la práctica son de 190°C para la corriente caliente y de -45°C para la corriente fría. Utilizando aire filtrado comprimido de 6,9 bar, se obtiene una potencia de refrigeración de 1.800 W.



→ 16



Cortinas de aire

16.1 Introducción

Las cortinas de aire son sistemas que se utilizan principalmente en las puertas de acceso a recintos que deben mantenerse abiertas en servicio, para reducir la pérdida o la ganancia de calor, de humedad o de contaminantes en ellos, y también para evitar la penetración de insectos y de polvo a través de la abertura al exterior, al tiempo que permiten el paso de personas, vehículos y otros sistemas de transporte. En general, una cortina de aire consiste en uno o dos chorros turbulentos planos, sopladados horizontal o verticalmente a través de la abertura.

Las cortinas de aire se aplican típicamente en almacenes y hoteles, talleres mecánicos, almacenes frigoríficos y, en general, en las puertas de acceso a locales comerciales o industriales cuyo ambiente requiere ser protegido frente al que reina en el exterior. Todas estas aplicaciones comportan diferentes características desde el punto de vista del diseño y el dimensionamiento de la cortina de aire. En las grandes puertas de las naves industriales previstas para el paso de vehículos, son típicas las cortinas de aire por chorros a gran velocidad en dirección vertical hacia arriba. Los almacenes frigoríficos tienen sus puertas de acceso equipadas con cortinas de aire soplado hacia abajo, para protegerlos del medio ambiente caliente. Los almacenes comerciales y otros recintos cuyas puertas son transitadas frecuentemente por personas, son protegidos del medio ambiente por cortinas de aire soplado horizontalmente o verticalmente a baja velocidad. Según cuál sea la dirección del gradiente de temperatura recinto-ambiente, la cortina puede ser de “aire caliente” o de “aire frío”. Por otra parte, se han de distinguir las cortinas de aire sin recuperación, de las cortinas con recirculación parcial del aire del chorro. En las primeras, todo el aire eyectado por la tobera de la cortina se difunde en el medio ambiente después de impactar sobre el pavimento, en caso de corriente descendente, o en el travesaño de la puerta, en caso de corriente ascendente, aunque, en algunos casos, parte del caudal del chorro pasa al interior del recinto como lámina rasante. En las cortinas con recirculación de aire, la mayor parte del chorro deriva hacia el exterior y/o el interior, y una pequeña proporción del aire primario se recupera.



Un objetivo esencial del dimensionamiento de una cortina de aire es eliminar el flujo neto de aire a través de la puerta y, como resultado de ello, minimizar el transporte de calor. Otro puede ser evitar el escape de gases contaminantes.

La pérdida de calor a través de una puerta abierta con la cortina de aire activa se debe a la turbulencia del chorro y al flujo neto a través de “escapes” de la puerta. El chorro arrastra aire por ambos lados, que mezcla con el aire primario que, por impacto con el borde superior de la puerta, deriva en parte al exterior y en parte al interior del recinto. Así, resulta que la cortina de aire nunca puede prevenir completamente el transporte de calor y de masa a través de la puerta: solo puede reducirlos notablemente en comparación con el valor que tendría si la puerta estuviera abierta sin cortina.

El dimensionamiento técnico de una cortina de aire requiere un análisis fluidodinámico y un análisis térmico.

16.2 Condiciones de trabajo

Las condiciones de trabajo para las cortinas de aire dependen de varios factores y cubren un rango amplio. Las más importantes son las siguientes:

- Las dimensiones de la puerta, que influyen en el caudal de aire y en su velocidad de eyección por la tobera.
- La diferencia de temperatura interior-exterior, que crea un gradiente de presión generador de una corriente de aire a través de la puerta.
- El viento, que crea una presión que se suma a la anterior.

Otros factores cuya influencia, aunque menor, ha de tenerse en cuenta son, entre otros, las dimensiones del recinto, el tamaño y la situación de las ventanas y de los respiraderos por los cuales se producen fugas, el balance de los flujos de aire suministro- evacuación del sistema de ventilación, si lo hay, las condiciones medioambientales del recinto y la frecuencia con que la cortina es atravesada por personas, vehículos y otros medios de transporte.

16.3 Dimensionamiento técnico básico de una cortina de aire

La concepción técnica básica de un equipamiento de cortina de aire comprende la caracterización conceptual y dimensional de la cámara pulmón, de los conductos, de los ventiladores, de la(s) tobera(s) y de otros componentes de la instalación, por una parte, y la determinación del ancho de tobera, la velocidad de descarga del chorro y su ángulo de eyección, por otra. En este apartado, se expone el procedimiento para determinar las características fluidodinámicas de una cortina de aire en determinadas condiciones ambientales.

16.3.1 La distribución de la presión en el recinto

El dimensionamiento correcto de una cortina de aire para proteger un recinto (almacén, tienda, sala, etc.) del medio ambiente exterior requiere determinar la diferencia de presión a través de la puerta cerrada. La diferencia de presión se debe a tres factores: la diferencia de densidad del aire entre el recinto y el medio ambiente exterior (efecto

chimenea), la acción del viento sobre la puerta y la presión del sistema de ventilación del recinto, si existe.

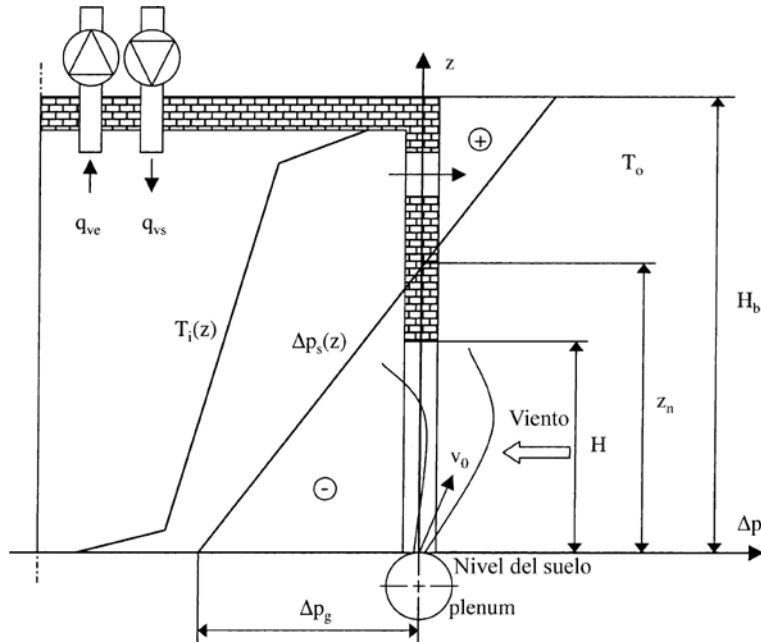


Fig. 16.1. Distribución de la presión en la fachada del recinto donde se encuentra la puerta¹

La figura 16.1 muestra la distribución de la diferencia de presión sobre la pared del recinto que incluye la puerta. La diferencia total de presión a través de la puerta se calcula por superposición de la diferencia de presión debida a la diferencia de densidad del aire, a la diferencia de presión debida al viento y a la diferencia de presión debida al sistema de ventilación, o sea:

$$\Delta p_t = \Delta p_\rho + \Delta p_v + \Delta p_{vt} \quad (16.1)$$

La parte de dicha diferencia que se debe a cada uno de los tres factores enumerados se calcula por separado.

Sean z_n la altura con respecto al suelo del nivel de presión neutra y $\rho_0 > \rho_i$, donde el subíndice 0 indica condiciones fuera del recinto y el subíndice i , en su interior. Entonces:

$$\Delta p_\rho(z) = (\rho_0 - \rho_i) g (z - z_n) \quad (16.2)$$

El nivel de presión neutra se calcula teniendo en cuenta que a dicha altura del suelo la presión en la puerta es 0, lo cual implica equilibrio entre la diferencia de presión debida a la diferencia de densidad del aire $\Delta p_\rho(z)$ y la diferencia de presión debida al efecto del viento p_{ev} y al del sistema de ventilación sobre la puerta p_{evt} , o sea:

$$z_n = - \frac{p_{evt} - p_{ev}}{g(\rho_0 - \rho_i)} \quad (16.3)$$



En realidad, el cálculo del nivel de la línea de presión neutra y el de la diferencia de presión requiere resolver el balance de flujo másico aplicado al volumen del recinto como volumen de control. El problema es complicado, dada la dificultad de evaluar no solo la infiltración y el escape de aire por la cortina de aire activa, sino también el balance de entradas y escapes de aire por la envolvente del recinto (paredes, techo, ventanas, respiraderos, etc.) y al balance impulsión-aspiración del sistema de ventilación. En las referencias (2,3) se halla información sobre este problema. Para soslayar este problema, se puede recurrir a un método más práctico: subdividir horizontalmente el recinto en dos zonas de igual altura, en que los flujos totales de aire son los mismos, y determinar en cada una de ellas el área de fuga total A_{sp}, A_{if} y las correspondientes distancias verticales, ponderadas por su área, desde el nivel del suelo H_{sp}, H_{if} . A partir del valor de estas magnitudes y de la inversa del exponente de flujo m (aproximadamente, $m = 2$ si el flujo es turbulento, e igual a 1 si es laminar), la nueva altura a que se encuentra la línea de presión neutra se calcula por la expresión siguiente:

$$z_{ns} = \frac{(A_{sp} / A_{if})^m H_{sp} + H_{if}}{(A_{sp} / A_{if})^m + 1} \quad (16.4)$$

La presión debida al viento se puede estimar mediante la ecuación:

$$\Delta p_v = \left(\frac{1}{2}\right) C_p \rho_o v_v^2 \quad (16.5)$$

donde C_p es el coeficiente de presión que es función de la orientación de la velocidad del viento v_v con respecto a la superficie sobre la cual incide.

La influencia de la variación de presión en el recinto debida a la instalación de ventilación Δp_{vt} sobre la distribución de presión se debe al desequilibrio entre el flujo introducido en el recinto y el flujo evacuado de él. Si el flujo evacuado es mayor que el suministrado al recinto, se crea una diferencia de presión negativa en él, y viceversa. Su cálculo es un tanto engorroso, por lo cual se aconseja consultar las bases de datos experimentales sobre el tema.

En definitiva, la diferencia total de presión a través de la puerta se calcula mediante la ecuación:

$$\Delta p_t = p_i - p_o = (\rho_o - \rho_i) g(z - z_{ns}) - \frac{1}{2} C_p \rho_o v_v^2 + \Delta p_{vt} \quad (16.6)$$

16.3.2 Dimensionamiento del chorro cortina de aire

Para dimensionar el chorro cortina de aire hay que determinar tres parámetros: el ancho de la tobera b_0 , la velocidad de descarga v_0 y el ángulo de descarga α_0 (v. figura 16.2).

Varios son los métodos disponibles de dimensionamiento del chorro, pero el más riguroso, según Lajos y Preszler,⁴ es el que se basa en el balance de cantidad de movimiento en un volumen de control adoptado en la puerta.

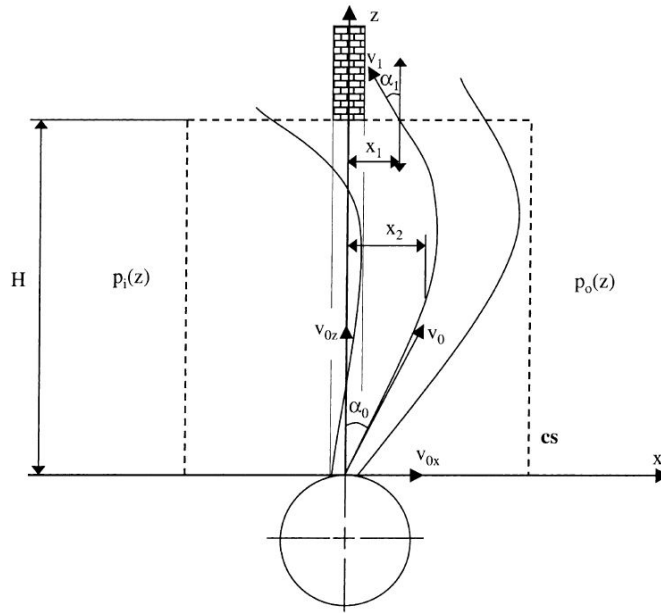


Fig. 16.2.
Esquema de un
chorro cortina de
aire vertical
ascendente¹

Balance de la cantidad de movimiento en un volumen de control en la puerta

Sea W el ancho de la puerta, H su altura y A_0, A_1 las áreas de dos secciones rectas del chorro, como entrada y salida de fluido del volumen de control, cuyas normales están inclinadas con respecto al eje z los ángulos α_0, α_1 , respectivamente. Entonces, la componente según el eje x del flujo de cantidad de movimiento se escribe:

$$W \int_0^H [p_o(z) - p_i(z)] dz = \rho_0 A_0 v_0^2 \sin \alpha_0 - \rho_1 A_1 v_1^2 \sin \alpha_1 \quad (16.7)$$

Habida cuenta de que en el chorro la cantidad de movimiento $\rho A v^2$ se mantiene constante, sustituyendo la diferencia de presión por la ecuación 16.6, despreciando el término de ventilación e integrando, se obtiene:

$$WH \left[(\rho_0 - \rho_i) g (z_{ns} - \frac{1}{2}H) + \frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2 \right] = \rho_0 b_0 l_0 v_0^2 (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1) \quad (16.8)$$

En la ecuación 16.8, b_0 y l_0 son el ancho y la longitud de la tobera.

A partir de la ecuación 16.8, se llega a otra⁵ para el dimensionamiento, basada en la componente según el eje x de la cantidad de movimiento. Dicha forma de ecuación se obtiene imponiendo dos aproximaciones: los ángulos del chorro en descarga y en impacto son iguales, pero de signo contrario $\alpha_0 = -\alpha_1$, y la longitud de la tobera es igual al ancho de la puerta.

Expresada como flujo de cantidad de movimiento por unidad de longitud del chorro en la descarga, se escribe:



$$M_0 (l_0 = 1) = \rho_0 b_0 v_0^2 = \frac{H}{2 \operatorname{sen} \alpha_0} \left[(\rho_0 - \rho_i) g (z_{ns} - \frac{1}{2} H) + \frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2 \right] \quad (16.9)$$

Esta ecuación permite, seleccionando dos de los tres parámetros (b_0, v_0, α_0) , determinar el tercero, pero presenta el inconveniente de que, dando lugar a una forma del eje del chorro razonablemente simétrica, no asegura que el chorro impacte correctamente en el borde superior de la puerta, sino que puede impactar dentro o fuera. Tampoco permite controlar la curvatura del chorro, de modo que, si la curvatura que resulta de la condición de igualdad de los ángulos de descarga e impacto es muy grande, puede ser la causa de fugas por los laterales de la puerta. Por esta y por otras razones, se han propuesto otros métodos de dimensionamiento; entre ellos, cabe citar los siguientes:

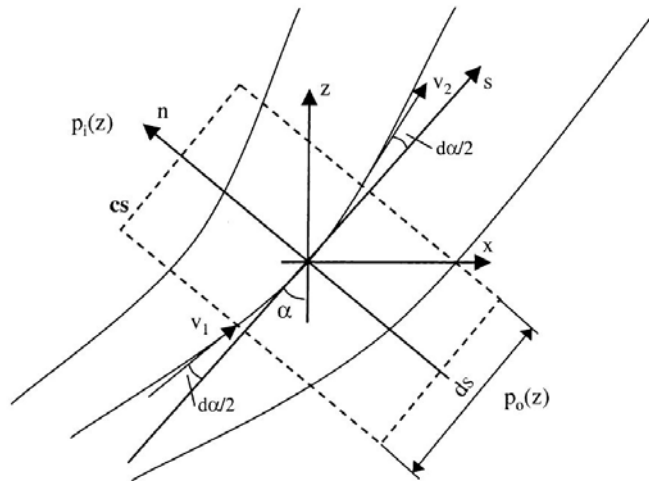
- Balance de la cantidad de movimiento de un volumen de control diferencial en el chorro
- Balance del momento de la cantidad de movimiento en un volumen de control en la puerta

Balance de cantidad de movimiento de un volumen de control diferencial en el chorro

Sea el volumen de control diferencial que se muestra en la figura 16.3. El balance de la cantidad de movimiento por unidad de ancho del chorro en la dirección x se escribe:

$$(p_0 - p_i) dz = \rho_1 b_1 v_1^2 \operatorname{sen}(\alpha - \frac{1}{2} d\alpha) - \rho_2 b_2 v_2^2 \operatorname{sen}(\alpha + \frac{1}{2} d\alpha) \quad (16.10)$$

Fig. 16.3.
Sistema de
coordenadas y
situación del
volumen de
control en el
chorro¹



A partir de la ecuación 16.10, y teniendo en cuenta el principio de conservación de la cantidad de movimiento del chorro, este método de dimensionamiento obtiene, aplicando la aproximación $\operatorname{sen}(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$, la siguiente forma simplificada de la ecuación 16.10:

$$(p_o - p_i) dz = p_o b_o v_o^2 \cos \alpha d\alpha \quad (16.11)$$



Sustituyendo el primer término de la ecuación 16.11 por la ecuación 16.6, sin el término de ventilación Δp_{vt} , e integrando entre 0 y z , se obtiene:

$$\sin \alpha - \sin \alpha_0 = \frac{(\rho_0 - \rho_i) g \left(\frac{z}{2} - z_{ns} \right) z}{\rho_0 b_0 v_0^2} - \frac{1/2 C_p \rho_0 v_0^2 z}{\rho_0 b_0 v_0^2} \quad (16.12)$$

La ecuación 16.12 se puede utilizar para determinar el ángulo del eje el chorro en función de la distancia al suelo z , pero no es útil para dimensionar una cortina de aire. A tal efecto, se ha de especificar, como una condición adicional, el valor del ángulo del eje del chorro a una altura determinada.

Una alternativa es $\sin \alpha|_{z=H} = \sin \alpha_1 = -\sin \alpha_0$, que da lugar a un resultado idéntico a la ecuación 16.9. Otra puede ser $\sin \alpha|_{z=H/2} = 0$, que da el siguiente resultado:

$$M_0 (l_0 = 1) = \rho_0 b_0 v_0^2 = \frac{H}{2 \sin \alpha_0} \left[(\rho_0 - \rho_i) g \left(z_{ns} - \frac{1}{4} H \right) + 1/2 C_p \rho_0 v_v^2 \right] \quad (16.13)$$

Balance del momento de la cantidad de movimiento en un volumen de control situado en la puerta

Sea x_1 la distancia del eje del chorro al punto de impacto en el plano de la puerta. El momento de la cantidad de movimiento se expresa:

$$W \int_0^H \left[(p_0(z) - p_i(z))(H - z) \right] dz = \rho_0 A_0 v_0^2 H \sin \alpha_0 - \rho_0 A_0 v_0^2 x_1 \cos \alpha_0 \quad (16.14)$$

Sustituyendo el primer término de la ecuación 16.14 por la ecuación 16.6, sin el término de ventilación, e integrando, se obtiene:

$$1/2 W H^2 \left[(\rho_0 - \rho_i) g \left(z_{ns} - \frac{1}{3} H \right) + 1/2 C_p \rho_0 v_v^2 \right] = \rho_0 b_0 l_0 v_0^2 (H \sin \alpha_0 - x_1 \cos \alpha_0) \quad (16.15)$$

A partir de la ecuación 16.15, el flujo de la cantidad de movimiento por unidad de longitud de tobera y, por tanto, de puerta, $l_0 = W = 1$, es:

$$\begin{aligned} M_0 (l_0 = 1) &= \rho_0 b_0 v_0^2 = \\ &= \frac{H}{2 [\sin \alpha_0 - (x_1 / H) \cos \alpha_0]} \left[(\rho_0 - \rho_i) g \left(z_{ns} - \frac{1}{3} H \right) + 1/2 C_p \rho_0 v_v^2 \right] \end{aligned} \quad (16.16)$$

La aplicación de la ecuación 16.16 requiere acotar el valor del ángulo de descarga por la relación $\tan \alpha_0 \geq x_1 / H$, y elegir el punto de impacto de tal manera que el flujo neto de aire a través de la puerta sea igual a 0.

Suponiendo que la distribución de velocidad en el chorro corresponde a la solución de Goertler y que el borde de la puerta opuesto a la tobera está en su mismo plano vertical, la expresión para el punto de impacto toma la forma:

$$x_e = \pm 0,208 \sqrt{b_0 H} \quad (16.17)$$



El signo positivo se utiliza en caso de que el aire primario se tome del exterior y el negativo, en caso de que se tome del interior.

Un factor importante que hay que tener en cuenta en el dimensionamiento del chorro es su deflexión máxima (la curvatura del eje del chorro). Por un procedimiento análogo al aplicado para determinar la cantidad de movimiento del chorro, adoptando un volumen de control de altura $H/2$ en el eje del chorro e integrando el término de presión, se obtiene la expresión del flujo de cantidad de movimiento por unidad de longitud:

$$M_0(l_0 = 1) = \frac{H}{8[(x_2/H)\cos\alpha_0 - \frac{1}{2}\sin\alpha]} \left[(\rho_0 - \rho_i)g\left(z_{ns} - \frac{1}{3}H\right) + \frac{1}{2}C_p\rho_0v_v^2 \right] \quad (16.18)$$

donde x_2 es el valor de la deflexión del eje del chorro a media altura de la puerta.

Una segunda condición es la nulidad del ángulo del eje del chorro a media altura de la puerta. Igualando las ecuaciones 16.16 y 16.18 y despejando el término de ángulo de descarga, se obtiene:

$$\tan\alpha_0 = (x_1 + 4x_2)/H \quad (16.19)$$

Comparación de los métodos de dimensionamiento

Para la comparación de los métodos de dimensionamiento de las cortinas de aire como las analizadas, procede calcular, por dichos métodos, los valores de los parámetros de la cortina $\alpha_0, x_1/H, x_2/H$ y M_0 .

Asumiendo la aproximación $\sin(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$, la componente en la dirección x del balance de cantidad de movimiento en un volumen de control diferencial con centro en el eje del chorro se expresa:

$$(p_0 - p_i)dz = \rho_0 b_0 v_0^2 \cos\alpha d\alpha$$

Insertando en la ecuación anterior la diferencia de presión definida por la ecuación 16.6 sin el término de ventilación, se obtiene la ecuación que representa la variación diferencial del ángulo de deflexión del chorro en la dirección z :

$$\frac{d\alpha}{dz} \cos\alpha = \frac{(\rho_0 - \rho_i)g(z - z_{ns})}{\rho_0 b_0 v_0^2} - \frac{\frac{1}{2}C_p\rho_0v_v^2}{\rho_0 b_0 v_0^2} \quad (16.20)$$

Para comparar los métodos de dimensionamiento del chorro cortina, se han elegido dos situaciones: en la primera, el nivel neutro está a la altura del borde superior de la puerta $z_{ns}/H = 1$, que es una situación típica de los edificios industriales; en la segunda, dicho nivel se encuentra a la mitad de la altura de la puerta $z_{ns}/H = 0,5$, situación que corresponde a un flujo de aire excesivo en el recinto, o bien a que es estanco. En ambas situaciones, tanto la velocidad del viento como los parámetros x_1 y x_2 están definidos convenientemente.

La figura 16.4 muestra la deflexión del eje del chorro que resulta de aplicar diferentes métodos de dimensionamiento para $z_{ns}/H = 1$. La figura 16.5 muestra lo mismo,

pero para $z_{ns} / H = 0,5$. En ambas representaciones, el valor de α en función de x, z se calcula mediante la ecuación 16.20. Se constata que la condición $\alpha_0 = -\alpha_1$ se satisface completamente por el método de dimensionamiento más simple: balance de cantidad de movimiento en la dirección x (ecuación 16.16).

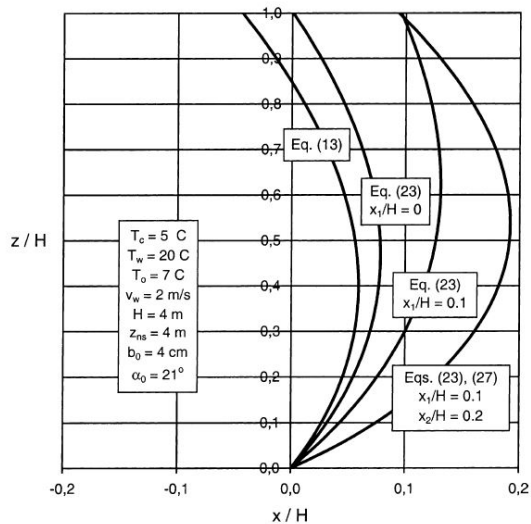


Fig. 16.4.
Deflexión del eje del
chorro según diferentes
métodos de
dimensionamiento,¹
 $z_{ns} / H = 1$

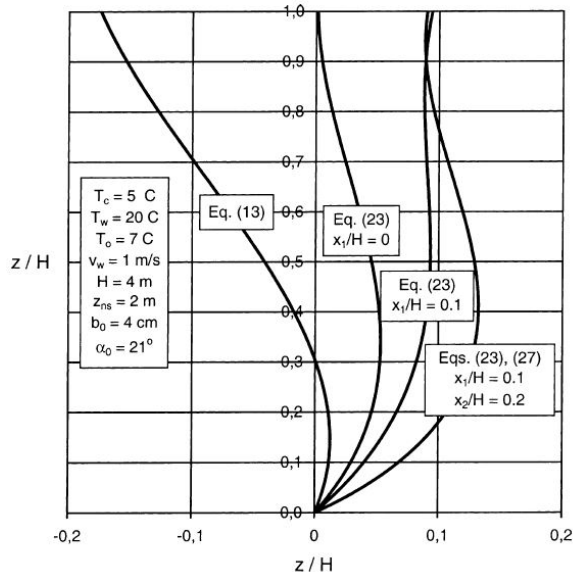


Fig. 16.5.
Deflexión del eje del
chorro según diferentes
métodos de
dimensionamiento,¹
 $z_{ns} / H = 0,5$

16.3.3 La rotura del chorro

La rotura del chorro se produce cuando la diferencia de presión lo desvía de tal manera que no alcanza el borde superior de la puerta, o sea, cuando la cortina de aire no es capaz de cerrarla completamente y deja una abertura para el libre paso de aire. En general, la rotura se produce cuando el ángulo del eje del chorro toma el valor $|\alpha| \geq 90^\circ$. De hecho,



la causa de la rotura del chorro es un flujo de cantidad de movimiento en la descarga de tobera demasiado débil.

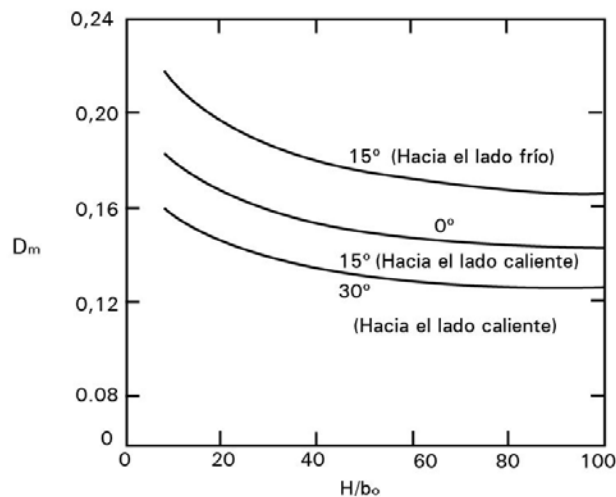
Hayes y Stoecker² desarrollaron un modelo analítico de apoyo al diseño de cortinas de aire que permite el cálculo del denominado “módulo de deflexión”, que es la relación de la cantidad de movimiento de la cortina de aire a las fuerzas transversales causadas por la diferencia de temperatura del aire a ambos lados de la cortina (efecto chimenea).

Dicho módulo se expresa así:

$$D_m = \frac{\rho_0 b_0 v_0^2}{g H^2 (\rho_i - \rho_e)} \quad (16.21)$$

El valor mínimo de este módulo corresponde a la rotura de la cortina de aire. La figura 16.6 muestra la cantidad mínima de movimiento del chorro que se requiere para evitar que la cortina se rompa.

Fig. 16.6.
Mínima cantidad de
movimiento requerida
para que el chorro no se
rompa



Este modelo no tiene en cuenta el efecto de la acción del viento sobre la cortina, que puede ser determinante. Posteriormente, Siren propone una modificación que tiene en cuenta la acción el viento, introduciendo el concepto de *flujo de cantidad de movimiento de rotura*.

El flujo de cantidad de movimiento de rotura M_b se define con el máximo flujo de cantidad de movimiento por unidad de longitud de tobera que todavía conduce a la rotura bajo unas condiciones específicas. La distancia vertical de la tobera al nivel donde el ángulo del eje del chorro encuentra la condición de rotura ya definida es la *altura de rotura*, z_b .

En principio, los diferentes tipos de rotura son tres. El primer tipo (tipo I) se caracteriza por un nivel de la línea neutra habitualmente alto. En este caso, la presión debida a la diferencia de densidad, negativa, junto con la presión debida al viento, la fuerza al chorro hacia el interior del recinto. La rotura del chorro tiene lugar justo debajo del borde superior de la puerta.

Insertando la condición $\sin \alpha = -1$ y $z = z_b = H$ en la ecuación 16.12, se obtiene, para el flujo de cantidad de movimiento de rotura, la expresión:

$$M_b = \frac{H}{\sin \alpha_0 + 1} \left[(\rho_0 - \rho_i) g (z_{ns} - \frac{1}{2}H) + \frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2 \right] \quad (16.22)$$

En el tipo II, el nivel de la línea de presión neutra se encuentra por debajo de la altura de la puerta. Al principio, el chorro se curva hacia el exterior pero, una vez superada la altura del nivel neutro, la presión debida a la diferencia de densidad tiende a empujar el chorro hacia atrás. Si el flujo de cantidad de movimiento del chorro supera el de rotura, el chorro alcanza la altura del dintel de la puerta, pero el punto de impacto está lejos, en el exterior. A partir de la condición $\sin \alpha = -1$ y $z = z_b$, la ecuación 16.12 conduce a las expresiones siguientes para el flujo de cantidad de movimiento y la altura de rotura:

$$M_b = \frac{z_b}{2(\sin \alpha_0 + 1)} \left[(\rho_0 - \rho_i) g z_{ns} + \frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2 \right] \quad (16.23)$$

$$z_b = z_{ns} + \frac{\frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2}{(\rho_0 - \rho_i) g} \quad (16.24)$$

El tipo III difiere de los anteriores en la dirección de la deflexión de chorro, que es hacia el exterior. En este caso, el nivel neutro está por debajo de la altura a la mitad del vano de la puerta $z_{ns} < H/2$ y la presión del viento es débil, de modo que el chorro rompe hacia el exterior. Procediendo como en los otros casos, para $\sin \alpha = +1$ y $z = z_b = H$ el flujo de cantidad de movimiento para la rotura es:

$$M_b = \frac{H}{\sin \alpha_0 - 1} \left[(\rho_0 - \rho_i) g (z_{ns} - \frac{1}{2}H) + \frac{1}{2} C_p \rho_0 v_v^2 \right] \quad (16.25)$$

La figura 16.7 muestra la influencia del ángulo de descarga sobre el flujo de cantidad de movimiento de rotura. Cuanto mayor es el ángulo de descarga, tanto menor es el flujo de cantidad de movimiento de rotura.

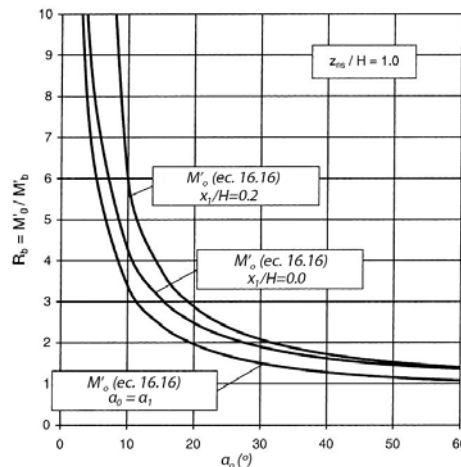


Fig. 16.7.
Relación de rotura como una función del ángulo de descarga para diferentes métodos de dimensionamiento¹



Desde el punto de vista del dimensionamiento, un flujo de cantidad de movimiento de rotura bajo tiene sus ventajas. Tolera mejor las perturbaciones bruscas, como los cambios de la presión del viento o de la presión interna del recinto.

Un parámetro que sirve para caracterizar el grado de tolerancia es la relación del flujo de cantidad de movimiento del chorro en la descarga al flujo de cantidad de movimiento de rotura $R_b = M_0 / M_b$, que se denomina *relación de rotura*. Una forma simple de dicha relación es:

$$R_b = (\text{sen} \alpha_o + 1) / 2 \text{sen} \alpha_o \quad (16.26)$$

expresión válida en caso de dimensionamiento por la ecuación 16.9 y situación correspondiente a un tipo I de rotura. Para otros casos, la relación de rotura se define por expresiones más complicadas pero, en cualquier caso, el ángulo de descarga permanece como el factor más determinante. La figura 16.8 muestra el valor de la relación de rotura en función del valor del ángulo de descarga para tres diferentes métodos de dimensionamiento.

Hay dos factores que, en conjunto, definen qué tipo de rotura cabe esperar en ciertas condiciones. El primer factor F_1 es la altura relativa del punto de equilibrio de presión, es decir, la posición vertical donde la presión debida a la diferencia de densidad y la presión del viento están en equilibrio. El segundo factor F_2 es la integral de la diferencia de presión debida a la diferencia de densidad y a la acción del viento a través del vano de puerta. La tabla 16.1 muestra la relación entre la combinación de estos factores y el tipo de rotura.

Tabla 16.1. Relación entre la combinación de los factores F_1 y F_2 y el tipo de rotura¹

$F_1 = (z_{ns} / H) + \left[\frac{1/2 C_p \rho_0 v_v^2}{H(\rho_0 - \rho_i)g} \right]$	$F_2 = \left[(\rho_0 - \rho_i)g(z_{ns} - 1/2 H) + 1/2 C_p \rho_0 v_v^2 \right]$	Tipo
$F_1 \geq 1$	$F_2 \geq 0$	I
$F_1 \geq 1$	$F_2 < 0$	I
$F_1 < 1$	$F_2 \geq 0$	II
$F_1 < 1$	$F_2 < 0$	III

(Ver ref. 1)

16.4 Consideraciones térmicas

A los efectos del balance de entalpía en un sistema constituido por un recinto cuya puerta de acceso dispone de una cortina de aire, se considera que es atravesada por personas que no deben verse afectadas desfavorablemente por la velocidad del aire y/o por su temperatura en el chorro.

16.4.1 Balance térmico del aire en el recinto

Desde el punto de vista del recinto, el balance de energía \dot{Q}_{rc} , que representa el flujo de calor suministrado al recinto, o extraído de él, para mantener en él la temperatura T_i se compone del flujo de calor a través de la estructura envolvente del recinto \dot{Q}_{erc} , del calor



transportado por el flujo másico de aire arrastrado por el chorro \dot{Q}_{ach} , del calor transportado por el flujo másico de aire que fuga del recinto \dot{Q}_{src} , del flujo de calor por fugas a través de la puerta con cortina \dot{Q}_p y del flujo de calor transportado por la parte del chorro que penetra en el recinto \dot{Q}_{ich} . Hay que tener en cuenta el signo de estas magnitudes, positivo si es una aportación al recinto y negativo en caso contrario. El balance de energía se expresa:

$$\dot{Q}_{rc} = \dot{Q}_{erc} + \dot{Q}_{ach} + \dot{Q}_{src} + \dot{Q}_p + \dot{Q}_{ich} \quad (16.27)$$

La aplicación de la ecuación 16.26 a un recinto equipado con una cortina de aire requiere identificar si la temperatura que se ha de mantener en el recinto es mayor o menor que la temperatura ambiente exterior, y si el aire primario del chorro es tomado del exterior, del interior o de ambas zonas en la debida proporción.

Si la suma de todos los términos del segundo miembro de la ecuación 16.26, afectados por el signo correspondiente, resulta positiva, entonces se entiende que \dot{Q}_{rc} es el flujo de calor que se debe extraer del recinto para mantener su temperatura; si es negativa, es el calor que debe aportarse al recinto. El recinto se mantiene térmicamente estacionario si la suma es 0.

Así, por ejemplo, en verano, para mantener el recinto refrigerado, y en el supuesto de que el aire primario del chorro se toma del exterior, \dot{Q}_p y \dot{Q}_{src} pueden considerarse negativos (el aire del recinto es más denso que el del exterior), también lo es \dot{Q}_{ach} , mientras que los otros son positivos. Entonces, cabe encontrar tres situaciones:

$$\dot{Q}_{erc} + \dot{Q}_{ich} > \dot{Q}_{ach} + \dot{Q}_{src} + \dot{Q}_p$$

$$\dot{Q}_{erc} + \dot{Q}_{ich} = \dot{Q}_{ach} + \dot{Q}_{src} + \dot{Q}_p$$

$$\dot{Q}_{erc} + \dot{Q}_{ich} < \dot{Q}_{ach} + \dot{Q}_{src} + \dot{Q}_p$$

En el primer caso, \dot{Q}_{rc} representa el flujo de calor que debe ser extraído del recinto para mantener su temperatura; el segundo representa que el sistema se encuentra en equilibrio, y el tercero significa que se han de reducir las fugas por la cortina y por el recinto, además de reducir el arrastre de aire interior por el chorro.

16.4.2 Balance térmico del chorro

De todas las magnitudes del balance de energía, aquella que interesa para calcular la cortina que conviene para una aplicación general es el flujo de calor asociado al chorro que la configura. Ello requiere conocer los perfiles de distribución de velocidad y de temperatura en el chorro.

La distribución de velocidad, definida por el modelo de Goertler, se expresa:

$$\frac{v}{v_a} = \frac{1}{\cosh^2 \eta} \quad (16.28)$$



donde v es la velocidad en el eje a la distancia s de la tobera y a la distancia x a través del chorro, v_a es la velocidad en el eje del chorro, $\eta = \sigma x / s$ es la coordenada transversal adimensional y σ es una constante experimental de valor 7,67, en general. Puesto que la curvatura del chorro es, en la práctica, pequeña, cabe admitir que $z \cong s$.

Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento con base en la nueva distribución de velocidad, la relación entre la velocidad en el eje del chorro a la distancia z de la tobera y la velocidad en la descarga v_0 se escribe:

$$\frac{v_a}{v_0} = \xi \sqrt{\frac{b_0}{z}} \quad (16.29)$$

donde el valor de la constante ξ es 2,40, en general.

Con respecto al perfil de distribución de la temperatura (o entalpía) en el chorro, una expresión que ajusta relativamente bien los resultados experimentales es una modificación de la ecuación derivada por Tamm (6):

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = 1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma b_0}{3z}} \frac{T_0 - (T_i + T_0)/2}{T_i - T_0} \frac{1}{\cosh \eta} - \frac{2}{\pi} \arctan e^\eta \quad (16.30)$$

El balance térmico de la cortina como ganancia o pérdida de flujo de calor del chorro en su interacción con el ambiente del recinto y el medio exterior se compone, en el caso de una cortina sin recirculación, del flujo de calor asociado al flujo másico de aire arrastrado por el chorro en contacto con el medio del recinto y el correspondiente a la parte del chorro en contacto con el medio ambiente externo.

Sean η_1 la coordenada transversal adimensional del punto de impacto del chorro y η_e la correspondiente al punto de flujo neto cero, que se expresa $\eta_e = \pm \sqrt{\sigma b_0 / 3H}$, donde el signo positivo es para el caso de que el aire primario se tome del interior del recinto, y negativo en caso contrario.

En términos de dichos límites, el balance térmico de la cortina se expresa:

$$Q_{ta} = l_0 c_p \frac{z}{\sigma} \left(T_i \int_{-\infty}^{\eta_e} \rho v d\eta - \int_{-\infty}^{\eta_1} \rho T v d\eta - T_{i0} \int_{\eta_e}^{\eta_1} \rho v d\eta \right) \quad (16.31)$$

donde $T_{i0} = T_i$, si $\eta_1 \geq \eta_e$ y $T_{i0} = T_0$, si $\eta_1 < \eta_e$.

La figura 16.8 muestra los valores relativos de los flujos de entalpía y de la pérdida total térmica en función del punto de impacto adimensional del chorro, en un caso típico de cortina de aire para la industria, que toma el aire primario del exterior. Los valores etiquetados son relativos al valor de la pérdida térmica mínima que corresponde a la condición $\eta_1 = \eta_e$.

En la figura, Q_{min} significa la pérdida térmica mínima (W) a través de la puerta, correspondiente a un flujo neto cero, H_a es el flujo de entalpía arrastrado por el chorro y H_e es el flujo de entalpía a través de la envolvente del recinto.

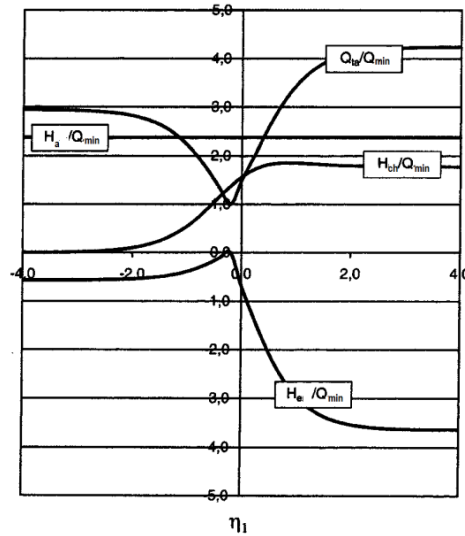


Fig. 16.8.
Valores relativos de
flujos de entalpía y
pérdida térmica total
como una función² del
punto de impacto² del
chorro

Se constata que, para valores de η_1 a la derecha (chorro soplado hacia el interior del recinto), el valor máximo de la pérdida térmica es mayor que si el chorro es soplado hacia el exterior, lo cual es evidente si se tiene en cuenta que el aire primario del chorro es tomado del exterior.

En el caso de una cortina de aire enfriada con recuperación parcial del aire, el mecanismo principal de transferencia de calor se debe al aire caliente procedente del recinto que es arrastrado por el chorro, enfriado y devuelto de nuevo al recinto a una temperatura inferior.

Para el cálculo del flujo de calor a través de la cortina, Hayer y Stoecker⁸ proponen la expresión:

$$Q_s = \left[W \int_{-\infty}^{y_d} \rho c_p v (T_c - T) dy \right]_{x=H} \quad (16.32)$$

donde Q_s representa la transferencia de calor sensible a través de la cortina en $x = H$; v es la velocidad del aire en un punto de la cortina de coordenadas x, y , donde su temperatura es T ; T_c es la temperatura del aire en el recinto, e y_d es la coordenada en dirección transversal al plano de la cortina, donde la parte de corriente del chorro que retorna al recinto se separa de la que se deriva al exterior.

Definida Q_s mediante un coeficiente de transferencia de calor h en la forma:

$$Q_s = hWH(T_c - T_R) \quad (16.33)$$

sustituyendo la ecuación 16.31 en la 16.30, se obtiene, mediante las oportunas transformaciones, la relación funcional:

$$\frac{Nu}{RePr} = F\left(\frac{H}{b_0}, IT\right) \quad (16.34)$$

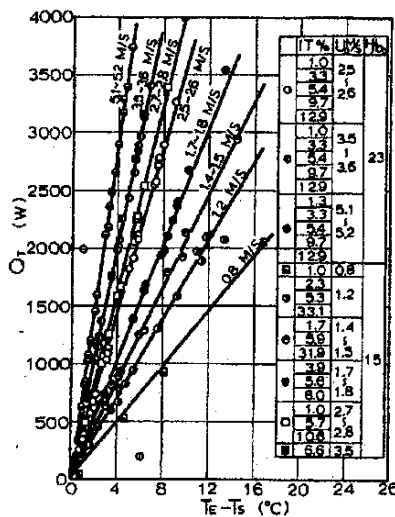


donde IT representa la intensidad de turbulencia inicial del chorro.

Howell y Shibata¹² realizaron un estudio sobre la transferencia óptima de calor a través de cortinas de aire turbulentas con recirculación parcial del chorro. Los principales resultados experimentales obtenidos se muestran en las figuras 16.10, 16.11, 16.12, 16.13 y 16.14.

La representación de la transferencia de calor sensible frente a la diferencia de temperatura a través de la cortina de aire para varios valores de la intensidad de turbulencia inicial muestra la fuerte influencia del valor de dicha intensidad y de la relación longitud de la cortina-ancho de la tobera. En la figura 16.9 se representa la transferencia total de calor a través de la cortina como una función de la diferencia de temperatura del aire del chorro entre la tobera de suministro y la cámara pulmón de retorno, y, como parámetro, la velocidad inicial del chorro.

Fig. 16.9¹²,
Fig. 16.10¹².



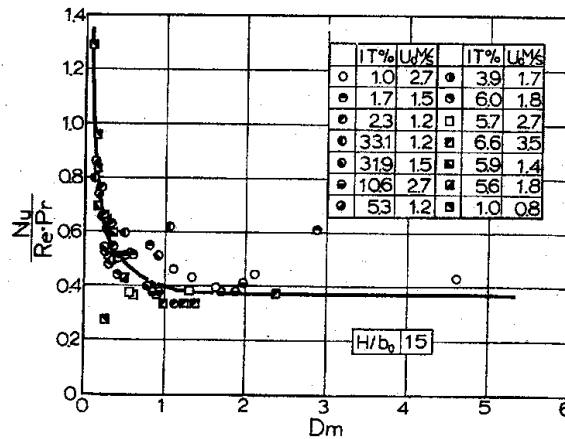


Fig. 16.13. Coeficiente adimensional de transferencia de calor frente al módulo de deflexión¹²

Aparece una relación lineal evidente, cuya ecuación se escribe:

$$Q_T = 141U_0(T_E - T_S) \quad (16.35)$$

En la figura 16.10 se representa la diferencia de temperatura a través de la cortina de aire con respecto a la elevación de la temperatura del aire a lo largo de ella. Su ecuación se escribe:

$$T_R - T_C = 1,81(T_E - T_S) \quad (16.36)$$

La figura 16.11 es una representación de la diferencia de temperatura a través de la cortina de aire en función de la diferencia de temperatura entre la del recinto y la de suministro de aire, cuya ecuación se escribe:

$$T_R - T_C = 2,45(T_C - T_S) \quad (16.37)$$

En la figura 16.12, se representa la relación entre el parámetro de transferencia de calor $Nu / Re \cdot Pr$ y el módulo de deflexión del chorro. La curva indica que, para minimizar la transferencia de calor a través de la cortina de aire, se requiere mantener un valor mínimo del módulo de deflexión, que para cortinas de $H / b_0 = 15$ es, aproximadamente, de 1,5.

(Ver ref. 12)

16.5 Rendimiento térmico

La pérdida térmica a través de una puerta que se abre con frecuencia puede ser considerable si la diferencia de temperatura a través de ella es grande. La cortina de aire nunca puede eliminar completamente la pérdida térmica, pero puede reducirla notablemente. Al respecto, una magnitud característica de la eficacia de una cortina de aire es su rendimiento térmico, cuya definición es:

$$\eta_t = 1 - (Q_{ta} / Q_{td}) \quad (16.38)$$



donde Q_{ta} , evaluado con la ecuación 16.29 tomando $z = H$, representa la pérdida total térmica a través de una puerta abierta protegida por una cortina de aire activa, y Q_{td} es la misma magnitud sin la cortina de aire.

El cálculo de Q_{td} requiere conocer el flujo másico de aire a través de la puerta y las densidades del aire a ambos lados de la puerta.

A su vez, el flujo másico de aire depende de las dimensiones de la puerta, de su coeficiente de descarga y de la posición de la línea de presión neutra en ella.

Sean W el ancho de la puerta, H su altura, C_d el coeficiente de descarga, z_{n0} la distancia a partir del suelo de la línea de presión neutra y $\pm(\rho_0 - \rho_i)$ la diferencia de densidad del aire a ambos lados de la puerta (se toma el signo $+$ si $\rho_0 > \rho_i$ y el signo $-$ en caso contrario). Si $0 \leq z_{n0} \leq H$, la abertura de la puerta está dividida en dos zonas de altura z_{n0} y $H - z_{n0}$, por las cuales el flujo tiene sentido opuesto.

Los valores de sus correspondientes flujos másicos son los siguientes:

$$\dot{M}_{inf}(z_{n0}) = \frac{2}{3} C_d W z_{n0}^{3/2} \sqrt{2g\rho_0(\rho_0 - \rho_i)} \quad (16.39)$$

$$\dot{M}_{sup}(H - z_{n0}) = \frac{2}{3} C_d W (H - z_{n0})^{3/2} \sqrt{2g\rho_i(\rho_0 - \rho_i)} \quad (16.40)$$

Si $z_{n0} > H$, entonces:

$$\dot{M}_{tt}(z_{n0} > H) = \frac{2}{3} C_d W \left[z_{n0}^{3/2} - (z_{n0} - H)^{3/2} \right] \sqrt{2g\rho_0(\rho_0 - \rho_i)} \quad (16.41)$$

Para evaluar el rendimiento térmico de la cortina de aire, se aplica la ecuación 16.40 con el valor de z_{n0} que tiene en cuenta el efecto del viento. Si $0 \leq z_{n0} \leq H$, se aplica la ecuación de las dos (16.37, 16.38) que sea la máxima. El valor de C_d se encuentra, en general, en el intervalo 0,6-0,7.

Sea h_{ptm} la pérdida térmica específica mínima definida como:

$$h_{ptm} = Q_{ptm} / Hl_0 (T_i - T_0) \quad (16.42)$$

que, en términos de un coeficiente de pérdida térmica, se expresa:

$$h_{ptm} = C_t c_p \rho_m v_0 \sqrt{\frac{b_0}{H}} \quad (16.43)$$

Entonces, introduciendo el flujo de cantidad de movimiento por unidad de longitud del chorro en la descarga M_0 , se obtiene:

$$h_{ptm} = C_t \frac{\rho_m}{\sqrt{\rho_0}} c_p \sqrt{\frac{M_0}{H}} \quad (16.44)$$

Ahora, a partir de las ecuaciones 16.43, 16.41 y 16.40, la ecuación 16.37 se escribe:

$$\eta_t = 1 - \frac{3}{4} \frac{C_t}{C_d} \frac{H}{\sqrt{\sin \alpha_0}} \frac{\sqrt{z_{nc} - (1/3)H}}{\left[z_{n0}^{3/2} - (z_{n0} - H)^{3/2} \right]}, \quad z_{n0} \geq H \quad (16.45)$$

donde z_{nc} es el nivel de presión neutra que corresponde a la situación de puerta cerrada, incluyendo el efecto del viento.

16.5.1 Efecto de las fugas laterales

Tanto si se trata de una cortina de aire establecida por un chorro turbulento plano vertical ascendente, como si es descendente, la deflexión del chorro y/o la separación de su línea de impacto con respecto al plano vertical de la puerta da lugar a espacios laterales abiertos por los cuales se produce una fuga. El efecto de estas fugas no se ha tenido en cuenta en los modelos expuestos anteriormente.

Giráldez y otros¹⁰ realizan una simulación CFD del efecto de las fugas laterales planteando un nuevo balance de energía, que consiste en añadir al balance de energía del modelo de Siren un nuevo término, que representa el flujo de entalpía por dichas secciones de fuga. Este término se expresa $\dot{H}_{lat} = \pm \rho_e \bar{v} A_{lat} c_p (T_i - T_e)$, donde el signo + corresponde al caso de que la temperatura en el interior (subíndice i) del recinto sea mayor que la del exterior (subíndice e), y el signo -, en el caso contrario.

El rendimiento predicho con el modelo que incorpora este término adicional se acerca más a los resultados obtenidos por Jaramillo y otros.¹¹ Así, mientras que el modelo de Siren calcula rendimientos de las cortinas de aire del orden del 80-90 %, el modelo modificado predice rendimientos inferiores del orden del 68-75% para los mismos casos, más acordes con la realidad. Esta disminución del rendimiento es tanto mayor cuanto menor es el ancho de cortina.

De los resultados experimentales obtenidos por Giráldez para la validación de los predichos por el modelo modificado se derivan varias conclusiones relativas al rendimiento de las cortinas de aire. Entre ellas, cabe citar las siguientes:

- Cuanto menor es el ancho de puerta, tanto más rápida es la disminución del rendimiento para un mismo ángulo de descarga del chorro.
- Para un mismo ancho de puerta, el rendimiento de la cortina disminuye a medida que aumenta el ángulo de descarga.
- La disminución de la deflexión de la cortina por combinación adecuada al caso de la velocidad de descarga del chorro, del efecto chimenea y de la velocidad del viento mejora el rendimiento.

(Ver [ASTM99])



16.6 Procedimiento de dimensionamiento de cortinas de aire por el método de Siren

El procedimiento que se expone aquí resume el diseño técnico y el dimensionamiento de una cortina de aire vertical ascendente sin optimizar la energía. Los pasos que hay que seguir son los siguientes:

1. Elegir si el aire primario del chorro se ha de tomar del interior del recinto o del exterior.
2. Verificar que, en todo momento, el balance del flujo de aire en el recinto (aportación y evacuación) es nulo.
3. Especificar los parámetros de diseño: la temperatura del aire dentro y fuera del recinto, y la velocidad y la dirección del viento.
4. Evaluar la altura del nivel de presión neutra debida a la diferencia de densidad del aire (efecto chimenea) en condiciones de puerta cerrada.
5. Calcular, mediante la ecuación 16.17, el punto de impacto del eje del chorro $x_1 = x_e$ que corresponde al flujo neto nulo a través de la puerta, eligiendo una primera estimación del ancho de la tobera b_0 .
6. Elegir el ángulo de descarga α_0 teniendo en cuenta el punto de impacto x_1 , la deflexión del chorro asignada x_2 conforme a la ecuación 16.19, la seguridad deseada frente al fenómeno de rotura y la influencia del rendimiento térmico.
7. Calcular el flujo de cantidad de movimiento por unidad de longitud de tobera mediante la ecuación 16.16.
8. Elegir una combinación de ancho de tobera b_0 y velocidad de descarga v_0 que asegure el flujo de cantidad de movimiento deseado. Para conseguir una distribución uniforme de velocidad a lo largo de la tobera, la relación ancho de tobera-sección recta de la cámara pulmón que la alimenta ha de satisfacer el criterio $b_0 / A_p < 0,1\text{m}^{-1}$. La velocidad de descarga no ha de superar el valor que genera un nivel de ruido aerodinámico molesto y, además, poco confortable para las personas que han de atravesar la cortina.
9. Si, a partir del ancho de tobera elegido en el paso 5, no se satisfacen los niveles tolerables de ruido y confort, elegir un nuevo valor y repetir los cálculos.

El diseño de componentes del sistema de cortina de aire tales como la cámara pulmón, los conductos, el(los) ventilador(es), el(los) silenciador(es) y otros accesorios se realizará siguiendo los criterios del proyecto de instalaciones de transporte de gases y los reglamentos que deban cumplirse.

(Ver ref. 1)

16.7 Conclusiones

Las cortinas de aire por chorro vertical ascendente se utilizan en las grandes puertas de acceso a las naves industriales, aunque también se utilizan cortinas de flujo descendente por su bajo coste y fácil instalación. Las cortinas de aire de flujo descendente son soluciones típicas en las puertas de los recintos refrigerados; sin embargo, no son apropiadas para la prevención de tiro, debido a que este tipo de cortinas de aire da lugar a corrientes de aire y tiro sobre el nivel del suelo, enfrente de la puerta. En las puertas de los recintos refrigerados, tanto las cortinas de aire de soplado vertical como las de soplado horizontal logran casi el mismo efecto de cierre.

Una de las conclusiones principales que cabe extraer de cuanto se ha expuesto sobre las características y prestaciones de las cortinas de aire es que tanto la envolvente del recinto como su sistema de ventilación tienen una influencia notable en el funcionamiento de la cortina. La diferencia de presión a través de las paredes y del techo del recinto es un factor muy importante. Esta diferencia se ve afectada por la altura de las aberturas existentes y por los flujos de ventilación, y tanto más cuanto mayor es la hermeticidad del recinto; sin embargo, esta hermeticidad constituye una ventaja desde el punto de vista de la estabilidad del chorro, sobre todo frente a la acción del viento.

La figura 16.14 muestra la distribución típica de presión a través de la envolvente de un recinto con una gran puerta, cuyo flujo de aire está equilibrado, cuando la puerta está cerrada y abierta. La temperatura ambiente en el interior del recinto es mayor que en el exterior.

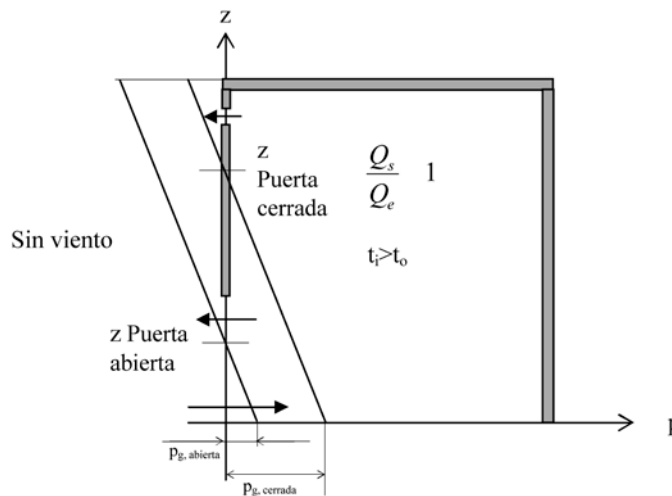


Fig. 16.14. Distribución típica de presión a través de la envolvente de un recinto⁷

De todos los métodos de dimensionamiento analizados, el del momento de la cantidad de movimiento, que permite considerar el punto de impacto del chorro, tiene ventajas frente al método más simple de balance de cantidad de movimiento en dirección normal a la puerta con el mismo ángulo de descarga e impacto.

Desde el punto de vista energético, el rendimiento térmico como factor de eficacia de la cortina de aire puede ser un concepto equívoco. Si el edificio tiene muchos escapes y la



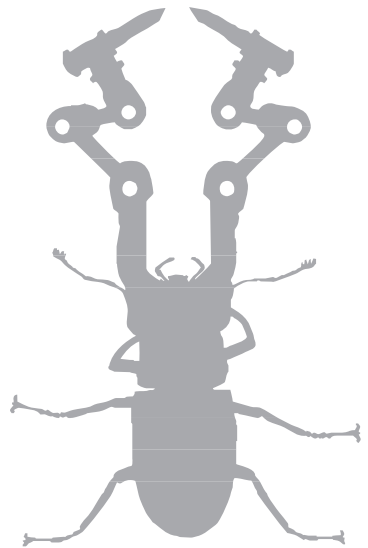
pérdida térmica a través de la puerta abierta es alta, el rendimiento térmico puede tener un valor relativamente alto, incluso con una cortina que no cierre bien.

La máxima eficacia de la cortina de aire se consigue cuando la cantidad de movimiento del chorro es lo bastante grande para asegurar que el chorro es estable y alcanza el extremo inferior o superior de la puerta según sea la dirección del chorro. En condiciones óptimas, una cortina de aire es capaz de lograr un rendimiento de hasta el 80 %.

La pérdida térmica a través de una cortina de aire eficaz se debe a la turbulencia generada en el proceso de arrastre-derrame, que, aparte del coeficiente de pérdida, es proporcional a la raíz cuadrada del flujo de cantidad de movimiento del chorro. En la pérdida, tienen una influencia destacada el punto de impacto del chorro, las dimensiones de la puerta y el nivel de presión neutra. Para cada configuración de cortina de aire, existe un valor del módulo de rotura que minimiza la tasa de transferencia de calor a través de la cortina.

A través de cortinas de aire con recirculación parcial del chorro, la transferencia de calor total es directamente proporcional a la velocidad inicial del chorro y a la diferencia de temperatura a través de la cortina; la influencia del nivel inicial de turbulencia es moderada. El parámetro de transferencia de calor $Nu / Re \cdot Pr$ muestra una buena correlación con el módulo de rotura de la cortina Dm .

En la publicación de Hayes y Stoecker,^{8 y 9} se halla información amplia sobre las características de la transferencia de calor en las cortinas de aire y su inclusión como datos de diseño.



→ 17



Eyectores

17.1 Introducción

Un eyector es un aparato que utiliza uno o varios chorros motores de un fluido (líquido, gas o vapor) inyectados a gran velocidad que, por la mezcla con otro adyacente de la misma o de distinta naturaleza, le transfieren parte de su energía a fin de aumentar su presión o su cantidad de movimiento (v. figura 17.1). El arrastre resulta del proceso de mezcla turbulenta que se produce en las fronteras entre corrientes y/o bajo el efecto de la succión por la depresión que ocurre en la expansión brusca del flujo primario, el cual, por la naturaleza de la temática de este libro, se trata de gas o de vapor recalentado.”

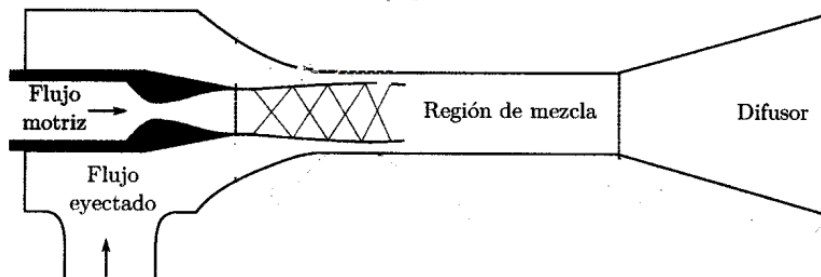


Fig. 17.1.
Configuración
básica de un
eyector

Se trata de dispositivos sumamente sencillos, que muestran una gran insensibilidad a los efectos del entorno, tales como la temperatura, las vibraciones, etc.; sin embargo, su rendimiento es bajo.

Tienen numerosas aplicaciones prácticas, tanto en la industria (eyectores de vapor, refrigeración, extractores, etc.) como en la tecnología aeroespacial (propulsores, etc.).

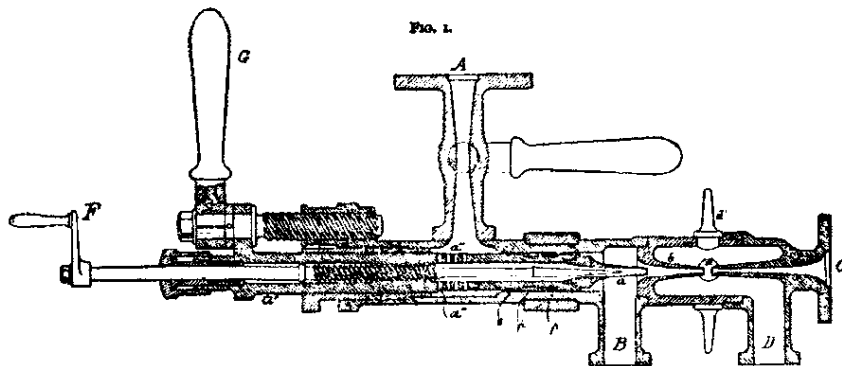
El eyector fue inventado en 1901 por Charles Parsons para la extracción de gases no condensables del condensador de una máquina de vapor.

Otro problema que impulsó el desarrollo del eyector fue la alimentación de agua para las calderas de vapor. El ingeniero francés Henry Giffard desarrolló un dispositivo, que él mismo denominó *inyector* (v. figura 17.2), cuyo funcionamiento se basaba, según él,



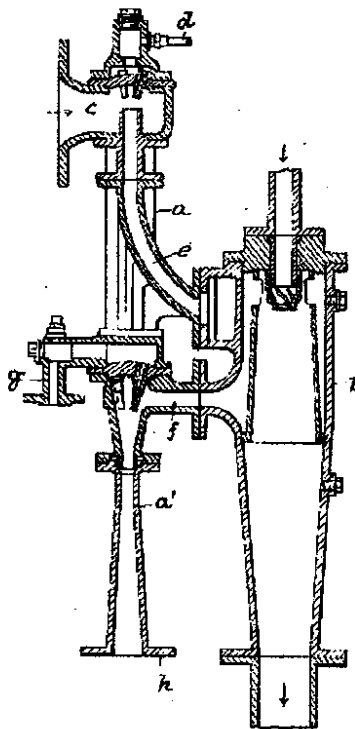
en “el poder de un chorro de vapor para arrastrar una masa de agua (a presión ambiente) muy superior a la del vapor, e introducirla en la caldera”.

Fig. 17.2.
Esquema del
inyector de Giffard



El trabajo de Giffard obtuvo una gran resonancia mundial y motivó muchos estudios y publicaciones posteriores. Hacia el año 1900, cuando LeBlanc y Parsons se dan cuenta de la capacidad del inyector de Giffard para crear vacío funcionando sin agua, crece el interés por resolver el problema de la extracción de gases no condensables en los condensadores de vapor. Como resultado de ello, en 1918 Maurice LeBlanc¹ patenta el eyector (v. figura 17.3).

Fig. 17.3.
Eyector de
LeBlanc



(Ver ref. 1 y 3)

17.2 Características

La configuración básica del eyector se muestra en la figura 17.4. Sus partes esenciales son el inyector, el mezclador y el difusor.

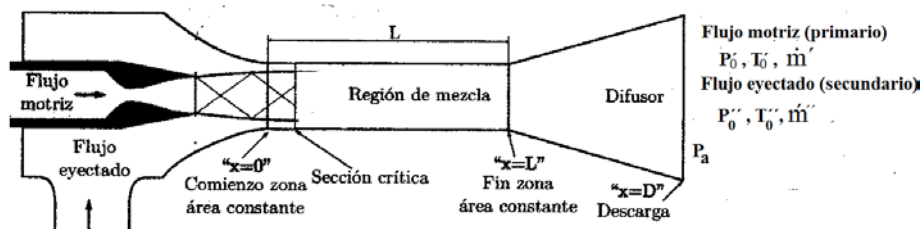


Fig. 17.4.
Esquema de un eyector con flujo primario supersónico

El fluido del chorro primario, a presión generatriz P_{00}' , temperatura generatriz T_{00}' y

flujo másico \dot{m}' , es aportado por una tobera denominada *inyector*. El chorro generado arrastra, en un canal de forma apropiada (el *mezclador*), el flujo secundario, cuyo estado de remanso se caracteriza por la temperatura T_{00}'' y la presión P_{00}'' , y el flujo másico producido es \dot{m}'' . Las transferencias energéticas se efectúan esencialmente en el mezclador.

Cuando el eyector funciona como extractor, el mezclador se prolonga por un difusor en que una parte de la energía cinética de las dos corrientes se convierte en presión (recompresión hasta el nivel P_a de la presión ambiente).

Fijada la geometría de un eyector, sus prestaciones dependen de tres parámetros aerodinámicos fundamentales:

$$\mu = \frac{\dot{m}''}{\dot{m}'} \cdot \frac{P_a}{P_{00}'} \cdot \frac{P_{00}''}{P_{00}'} \quad (17.1)$$

La figura 17.5 muestra la superficie que representa la relación entre dichos parámetros aerodinámicos, característica del funcionamiento de un eyector.

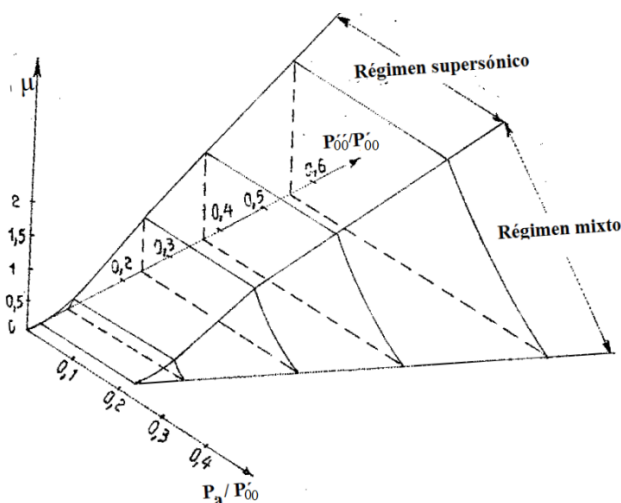


Fig. 17.5.
Superficie característica de funcionamiento de un eyector²



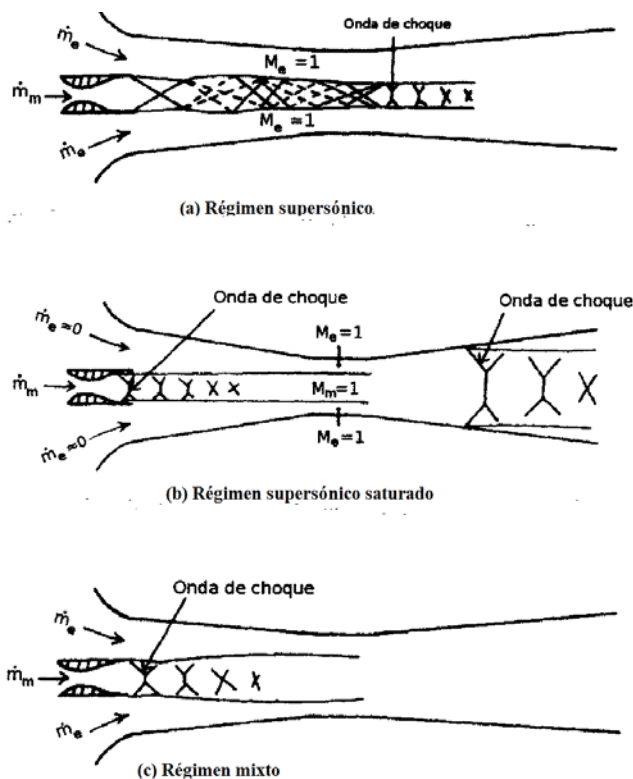
La superficie característica de funcionamiento de un eyector (v. figura 17.5) viene definida por la relación $F\left(\mu, \frac{P'_0}{P''_0}, \frac{P_a}{P'_0}\right)$, representativa de los diferentes regímenes de flujo posibles.

17.3 Modelos matemáticos

Los modelos matemáticos propuestos tienen como objetivo calcular el cociente de flujos másicos de las corrientes primaria y secundaria de un eyector, ya sea el tubo de mezcla de área variable o de área constante.

Los principales modelos referenciados en la literatura, comentados en la tesis doctoral de J. García del Valle,³ se pueden clasificar en tres grupos: termodinámicos, energéticos y cinemáticos. Por su adecuación a los contenidos de este libro, solo interesan los modelos cinemáticos que emplean el conjunto completo de ecuaciones de conservación: masa, cantidad de movimiento y energía, aplicados a un volumen de control. De ellos, el más instructivo es el modelo de Fabri y Sienstrunck,⁴ pues es el primero que describe, de forma exhaustiva, los modos de operación de un eyector de área constante. Dichos autores estudian el eyector aire-aire más sencillo posible, que consiste en una tobera que descarga el flujo primario en un tubo de área constante cuyo extremo está abierto a la atmósfera a través de un pequeño difusor. Tres son los regímenes de flujo que pueden encontrarse: el supersónico, el supersónico saturado y el mixto.

Fig. 17.6.
Esquema de los
regímenes de
funcionamiento.
Fuente: Matsuo⁵ y⁶



La principal limitación del modelo de Fabri y Sienstrunck es que concierne exclusivamente a eyectores con cámara de mezcla de área de sección recta constante. A principios de los ochenta, Matsuo⁵ y ⁶ y colaboradores realizan un estudio experimental similar al realizado por Fabri y Sienstrunck, pero sobre eyectores de cámara de mezcla de área de sección recta variable. El objetivo del estudio es identificar, mediante métodos ópticos y de medición de la presión, los distintos regímenes de funcionamiento del eyector de cámara de mezcla de sección variable (v figuras 17.6a, 17.6b y 17.6c).

El estudio de las prestaciones del eyector en los tres regímenes mencionados se detalla en los subapartados siguientes.

(Ver [Car71]) (Ver ref. 2 y 3)

17.4 Eyectores de flujo supersónico, supersónico saturado y mixto

17.4.1 Estudio experimental del funcionamiento de un eyector de mezclador cilíndrico

Es el caso más corriente en la práctica industrial. Permite una simplificación importante del cálculo de las prestaciones.

La figura 17.5 representa esquemáticamente una *superficie característica* experimental. Se constata que existen al menos dos dominios de funcionamiento distintos: primero, las prestaciones del eyector son independientes de P_a , lo cual justifica la denominación de *régimen de funcionamiento supersónico*; segundo, la presión a la salida del eyector tiene una importancia capital en la evolución de las prestaciones; es el *régimen mixto*.

17.4.2 Estudio experimental del régimen supersónico

Cuando el flujo másico secundario es nulo o muy pequeño, las condiciones de flujo son análogas a las que se encuentran en un problema de presión de culote. Las condiciones de readherencia del flujo primario sobre las paredes del mezclador vienen determinadas por el flujo másico \dot{m}'' .

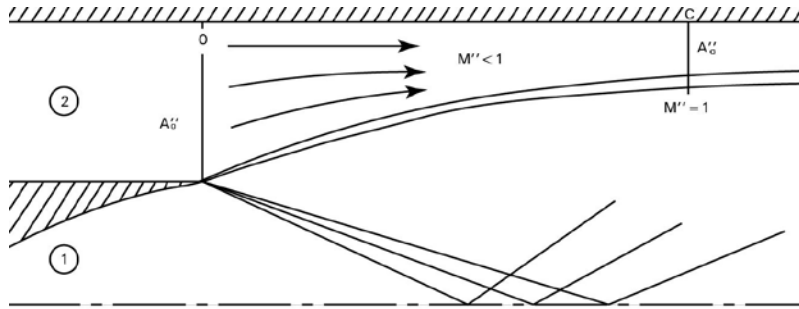
La presión P_{00}'' es insuficiente para que el flujo secundario supere la presión que reina en la región de readherencia, de modo que el flujo (2) se desprende, encerrando contra la pared un torbellino (v. figura 17.7).

La readherencia posterior en R está asegurada por el efecto de arrastre del chorro primario.

Cuando P_{00}'' aumenta, también lo hace \dot{m}'' y la expansión del flujo primario disminuye, así como su recompresión en R; el torbellino se reduce y acaba desapareciendo para un valor de P_{00}'' próximo al de la presión de readherencia.



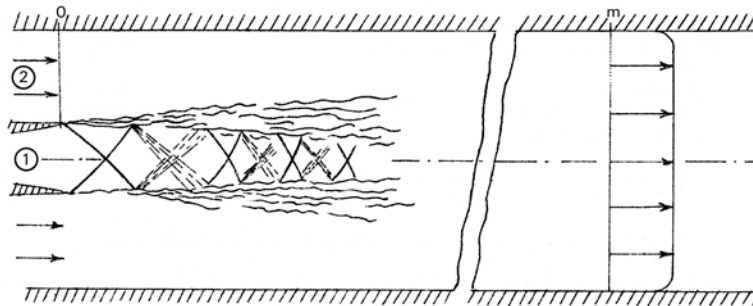
Fig. 17.7.
Separación de
corriente: torbellino
confinado²



A partir de esta situación, P_{00}'' y \dot{m}'' , siguen aumentando, y cada una de las corrientes primaria y secundaria conserva macroscópicamente su individualidad. Los fenómenos de interacción viscosa quedan reducidos básicamente a una zona de mezcla, relativamente delgada, establecida a ambas partes de su frontera común.

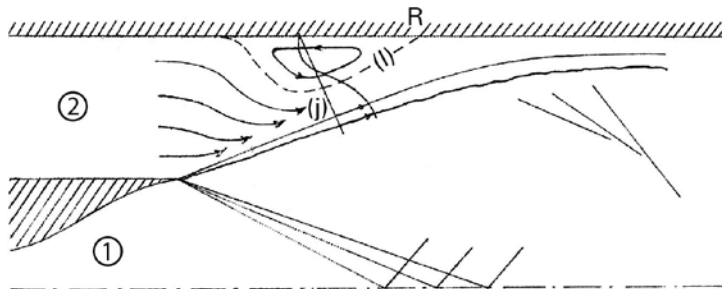
La independencia de estas condiciones de funcionamiento con respecto al nivel de presión P_a muestra, en particular, que el flujo secundario sub-sónico está bloqueado: corriente abajo de la sección A_0'' de entrada en el mezclador, se establece el análogo de una garganta sónica A_c'' (v. figura 17.8).

Fig. 17.8.
Establecimiento de una
garganta sónica²



Este bloqueo es provocado por la expansión del flujo primario, cuya frontera forma con la pared una sección crítica para el flujo secundario.

Fig. 17.9.
Régimen supersónico
saturado²



A medida que \dot{m}'' y P_{00}'' aumentan, lo hace también la sección del conducto secundario, que al final alcanza el valor límite A_0' (v. figura 17.9).

En esta situación, denominada *régimen supersónico saturado*, el caudal de extracción es el máximo compatible con la geometría del eyector.

17.4.3 Régimen mixto

En el supuesto de que P_a / P_{00} sea suficientemente pequeño, se establece un régimen supersónico corriente abajo de la sección crítica A''^* , hasta el extremo del difusor.

Los choques de recompresión progresan corriente arriba y, cuando alcanzan la sección crítica, se produce un descebado brutal, parecido al que surge en una toma de aire a compresión supersónica interna cuando la obstrucción corriente abajo es muy grande.

El análisis experimental del nuevo flujo (v. figura 17.10) muestra que el flujo secundario deviene totalmente subsónico, mientras que el flujo primario se recomprime a través de una estructura complicada de ondas de choque. Estas provocan un aumento considerable del espesor de la zona de mezcla, que ocupa rápidamente una parte importante de la sección de mezcla.

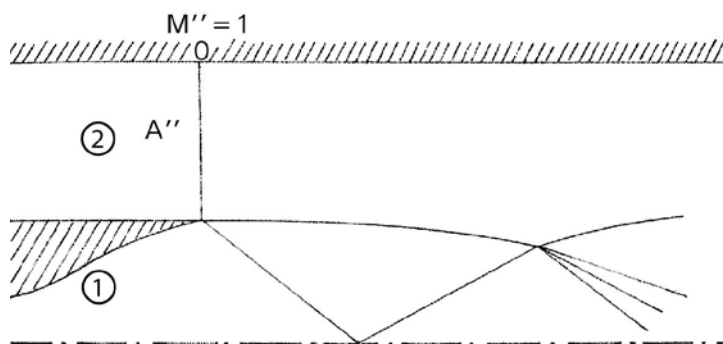


Fig. 17.10.
Régimen mixto²

Si esta es bastante larga, la mezcla enérgica que resulta de ello conduce a un flujo sensiblemente homogéneo de la reunión de los flujos 1 y 2. Este régimen se denomina *régimen mixto*.

17.5 Cálculo de un eyector de mezclador cilíndrico

17.5.1 Régimen supersónico

En este caso, el cálculo de las prestaciones a partir de elementos geométricos y aerodinámicos conocidos, tales como la sección del mezclador A , la sección A'_0 y el número de Mach de salida M'_0 del inyector, es independiente de la contrapresión P_a y se reduce a la determinación de la curva $\mu = f(P''_{00} / P'_{00})$.

Como ya se ha visto, la experiencia pone de manifiesto dos dominios de funcionamiento, el primero de los cuales corresponde a pequeños caudales de extracción y a una fuerte interacción viscosa.

Recuérdese únicamente que se necesita una determinación exacta de la línea límite que lleva al punto de readherencia para obtener una previsión de $\dot{m}''(P''_{00})$ que se ajuste bien a la experiencia.



Este apartado se limita, pues, a examinar las soluciones propuestas para calcular el segundo dominio, que corresponde a los fuertes caudales secundarios.

Se sabe que, en este caso, la capa de mezcla es pequeña frente a las dimensiones transversales de los flujos 1 y 2, lo cual permitirá despreciar los efectos viscosos, en una primera aproximación.

El tratamiento más sencillo, aplicable únicamente al caso del mezclador cilíndrico, es el propuesto por J. Fabri,⁴ que comporta las hipótesis siguientes:

- (i) Los fluidos de las corrientes 1 y 2 se pueden considerar gases perfectos.
- (ii) En la sección crítica C (v. figura 17.4), se supone que la estructura de cada una de las corrientes es casi uniforme.

Así, cabe considerar una evolución global unidimensional e isoentrópica de las dos corrientes entre las secciones (0) y (C), teniendo en cuenta que la continuidad local de las presiones sobre la superficie común de los dos chorros no entraña, evidentemente, la igualdad de las presiones medias $(P')_c$ y $(P'')_c$.

- (iii) El rozamiento y los intercambios de calor son despreciables entre (0) y (C).
- (iv) En estas condiciones, las ecuaciones del movimiento se escriben designando por A las áreas, por $\bar{\omega}$, Σ , φ las funciones habituales de los flujos unidimensionales y por T'_{00} y T''_{00} las temperaturas generadoras, considerando únicamente el caso de gases calóricamente perfectos.

1. Ecuación de continuidad

Sea
$$\mu = \frac{\dot{m}''}{\dot{m}'} , \sqrt{\theta_0} = \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{c_p T_{00}}$$

$$\mu \frac{P'_{00} A'_c}{\sqrt{\theta'_0}} = \frac{P''_{00} A''_0}{\sqrt{\theta''_0}}$$

Introduciendo la función $\Sigma(M) = \frac{A}{A_c} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$, tal que

$$A'_c = \frac{A'_0}{\Sigma'_0} \text{ y } A''_c = \frac{A''_0}{\Sigma''_0}, \text{ resulta:}$$

$$\frac{P''_{00}}{P'_{00}} = \mu \sqrt{\frac{\theta''_0}{\theta'_0}} \frac{\Sigma''_0}{\Sigma'_0} \frac{A'_0}{A''_0} \quad (17.2)$$

2. Ley de las áreas $A'_0 + A''_0 = A'_1 + A''_1$

Teniendo en cuenta el bloqueo sónico del flujo secundario (hipótesis $A''_c = A'_1$), la ley de las áreas se escribe, una vez dividida la ecuación por A'_0 , así:

$$1 + \frac{A_0''}{A_0'} \left[1 - \frac{1}{\Sigma(M_0'')} \right] = \frac{\Sigma(M_1')}{\Sigma(M_0')} \quad (17.3)$$

3. Conservación de las cantidades de movimiento

Las condiciones de conducto de sección recta constante y rozamiento fluidodinámico despreciable determinan que se satisfaga la invariancia de la impulsión, o sea, la conservación de:

$$P'' (1 + \gamma M^2) A'' + P' (1 + M'^2) A'$$

Introduciendo la función $\phi(M) = \bar{\omega}(M) \Sigma(M) (1 + \gamma M^2)$, resulta en una sección 1 cualquiera:

$$\phi_0'' P_{00}'' A_c'' + \phi_0' P_{00}' A_c' = \phi_1'' P_{00}'' A_c'' + \phi_1' P_{00}' A_c'$$

A partir de la ecuación 17.1, se obtiene:

$$\mu = \frac{\phi_1' - \phi_0'}{\phi_0'' - \phi_1''} \sqrt{\frac{\theta_{00}'}{\theta_{00}''}}$$

El cálculo de la característica supersónica de un eyector de geometría $(A_0'' / A_0') = \lambda$ y de un número de Mach primario M_0' dado, o sea:

$$\mu = f \left(\frac{P_{00}''}{P_{00}'}; M_0', \lambda \right) \quad (17.4)$$

se puede efectuar siguiendo el esquema siguiente:

- (a) Datos: $\lambda = A_0'' / A_0'$, $\theta_{00}' / \theta_{00}''$, $M_1' = 1$, M_0'
- (b) Parámetro: $M_0'' \leq 1 \rightarrow (2) \rightarrow M_1' \rightarrow (3) \rightarrow \mu \rightarrow (1) \rightarrow P_{00}'' / P_{00}'$
- (c) Variando M_0'' , se encuentra paso a paso la parte de la característica desde el empalme con la parte de débiles caudales hasta el caudal máximo, definido por $M_0'' = 1$ (régimen saturado).

17.5.2 Régimen supersónico saturado

En este caso particular ($M_0'' = 1$), la curva característica viene definida explícitamente por la relación 17.1, con la condición de que la garganta de área A_0'' sea sónica, de

manera que $\Sigma_0'' = 1$. Resulta, pues: $\mu = \frac{P_{00}''}{P_{00}'} \frac{A_0''}{A_0'} \Sigma_0' \sqrt{\frac{\theta_{00}'}{\theta_{00}''}}$



Para un eyector dado (λ, M'_0) y una relación de temperaturas generatrices determinada, se observa que esta parte de la característica es recta.

17.5.3 Régimen mixto

En este caso, las dos corrientes experimentan un proceso de mezcla muy intenso, que da lugar a una distribución de velocidades de la corriente resultante al final del mezclador, que es prácticamente uniforme. Despreciado el rozamiento fluidodinámico en la pared, el estado del fluido en la sección (m) corresponde rigurosamente al concepto de *flujo medio*.

El problema consiste ahora en determinar las magnitudes características de las dos corrientes, de modo que, después de la mezcla, en un conducto de sección recta constante, el flujo resultante pueda ser evacuado a la atmósfera, cuya presión es P_a , por un difusor de propiedades conocidas.

La condición de funcionamiento de este difusor se supone dada a priori, bajo la forma:

$$(P_m / P_a) = f(M_m) \quad (17.5)$$

Considérese el caso de un flujo primario supersónico y unos flujos secundarios y resultantes subsónicos. El procedimiento de cálculo es el siguiente.

Se conocen la geometría del *eyector* $(\lambda = A''_0 / A'_0)$ y número de Mach fijado de la corriente de salida de la tobera primaria, M'_0 , y las entalpías generatrices h'_0 y h''_0 de los dos flujos, de las cuales se obtiene θ''_0 / θ'_0 .

Se ha de determinar la característica del eyector $\mu = \mu(P'_{00} / P_a)$, donde $\mu = \dot{m}''_m / \dot{m}'_m$.

Las hipótesis de partida son: mezcla ideal en un conducto de sección recta constante, adiabática y sin rozamiento. En estas condiciones, la *ecuación de conservación de la energía* permite calcular la entalpía total de la mezcla:

$$\dot{m}_m h_{m0} = \dot{m}'_m h'_{00} + \dot{m}''_m h''_{00}$$

Aplicando el principio de conservación de la masa $\dot{m}_m = \dot{m}'_m + \dot{m}''_m = \dot{m}'_m (1 + \mu)$, resulta:

$$h_{m0} = \frac{h'_{00} + \mu h''_{00}}{1 + \mu} \quad (17.6)$$

de donde se deduce θ_{m0} .

Por otra parte, la ecuación de conservación de la masa se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_{m0}}} \frac{P_m A}{(\omega \Sigma)_m} = (1 + \mu) \frac{1}{\sqrt{\theta'_{00}}} \frac{P'_{00} A'_0}{(\omega \Sigma)_0}$$

O sea, introduciendo $\lambda = A''_0 / A'_0$ y la presión a la salida P_a , se obtiene:

$$\frac{P_m}{P_a} = \sqrt{\frac{\theta_{m0}}{\theta'_{00}}} \frac{(\overline{\omega\Sigma})_m}{(\overline{\omega\Sigma})'_0} \left(\frac{1 + \mu P'_{00}}{1 + \lambda P_a} \right) \quad (17.7)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la impulsión $PA(1 + \gamma M^2)$ se puede escribir de la forma $\dot{m}_n \sqrt{\theta_{n0}} \phi(M)$, el teorema de conservación de las cantidades de movimiento en un conducto de sección recta constante se escribe:

$$\dot{m}_n \sqrt{\theta_{n0}} \phi_n = \dot{m}'_n \sqrt{\theta'_{00}} \phi'_0 + \dot{m}''_n \sqrt{\theta''_{00}} \phi''_0$$

Introduciendo μ , se obtiene:

$$\phi(M_m) = \frac{1}{1 + \mu} \left[\sqrt{\theta'_{00}} \phi'_0 + \sqrt{\theta''_{00}} \phi''_0 \right] \quad (17.8)$$

Conocidos $h'_{00}, h''_{00}, \lambda, M'_0$, se da un valor a μ y un valor a M''_0 , y se procede del modo siguiente.

A partir de la ecuación 17.2, se obtiene h_{m0} y, por tanto, θ_{m0} ; la ecuación 17.4 aporta M_m ; la ecuación 17.1 da P_m / P_a , y la ecuación 17.3 da P'_0 / P_a . Entonces, se puede calcular P''_{00} / P'_{00} y P''_0 / P'_0 a partir de la relación de flujos másicos:

$$\mu = \frac{\dot{m}''_m}{\dot{m}'_m} = \alpha \frac{P''_{00}}{P'_{00}} \frac{\Sigma'_0}{\Sigma''_0} \sqrt{\frac{\theta''_{00}}{\theta'_{00}}} \quad (17.9)$$

donde la única incógnita es P''_{00} / P'_{00} .

A su vez:

$$\frac{P''_0}{P'_{00}} = \frac{P''_{00}}{P'_{00}} \frac{\bar{\omega}(M''_0)}{\bar{\omega}(M'_0)} \quad (17.10)$$

Finalmente, se hace que el grupo (μ, M''_0) se corresponda con un punto $\left(\mu, \frac{P'_{00}}{P_a}, \frac{P''_{00}}{P'_{00}} \right)$

de la superficie característica de eyección. A tal efecto, basta con variar M''_0 , a valor de μ constante, entre 0 y 1 para construir el corte $\mu = cte$ de esta superficie; después, se procede a variar μ para engendrar toda esta superficie.

Inversamente, conocida esta superficie, si se dan P'_{00} / P_a y P''_{00} / P_a , se deduce inmediatamente $\mu = \dot{m}''_m / \dot{m}'_m$ y, a partir de este valor, el flujo másico secundario extraído.

La práctica enseña que, para lograr un buen intercambio de cantidad de movimiento y, por tanto, una mezcla eficaz, la longitud del conducto de mezcla ha de ser del orden de



10 a 20 diámetros de conducto. Así, resulta que la consideración de rozamiento parietal despreciable deja de ser válida, de modo que es necesario efectuar una corrección.

La presión media corregida que se ha de considerar a la salida se tomará igual a:

$$P_{m,c} = P_m - \delta P_m, \text{ con } \frac{\delta P_m}{P_m} = \frac{2\gamma M_m^2 \delta^{**}}{R}$$

donde R es el radio de la sección recta del conducto de mezcla.

(Ver ref. 2)

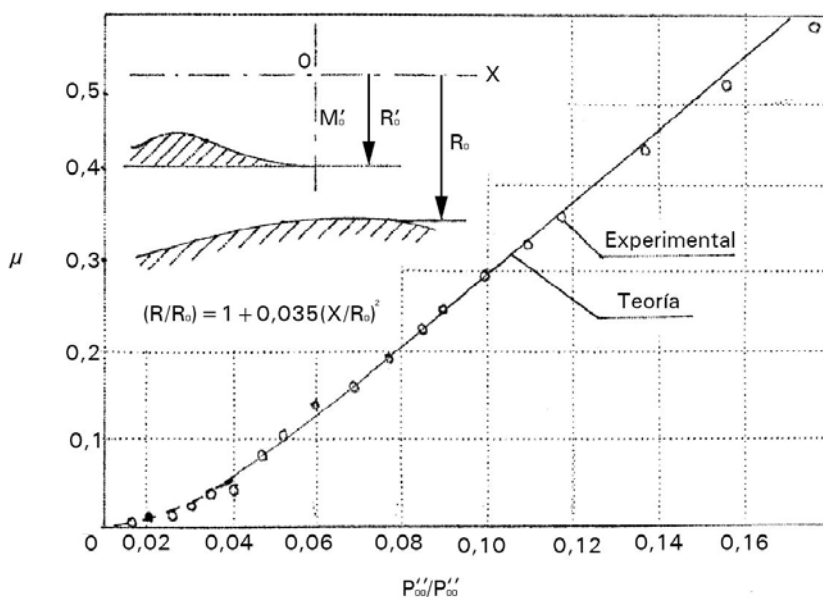
17.6 Influencia de los diversos parámetros de funcionamiento

Incrementando P'_{00} , aumenta el flujo másico primario y disminuye el valor de μ en los regímenes supersónico y supersónico saturado. Al mismo tiempo, la línea de régimen mixto se desplaza hacia la izquierda por recompresión del flujo secundario.

Los incrementos de valor de la presión de descarga provocan únicamente una disminución de μ en el caso de régimen mixto.

Incrementando la presión de remanso del flujo secundario, aumenta el valor de μ para los regímenes supersónico y supersónico saturado.

Fig. 17.11.
Régimen
supersónico²



La experiencia enseña que, particularmente en régimen supersónico, los resultados obtenidos por los anteriores métodos de cálculo se ajustan muy bien a la realidad (v. figura 17.11).

En régimen mixto, se consigue también un buen acuerdo, a condición de utilizar una longitud de mezclador suficientemente importante, del orden como mínimo de 7,5 veces el diámetro del conducto, y tener en cuenta la corrección de capa límite.

La influencia de un difusor final se manifiesta por una mejor prestación de extracción para un valor dado de (P'_{00} / P_a) y por el hecho de facilitar el establecimiento del régimen supersónico.

Entre los problemas planteados por la utilización de un eyector, cabe mencionar el acoplamiento entre el eyector y la fuente de alimentación de la corriente secundaria \dot{m}_m .

El funcionamiento de esta fuente está representado por una curva característica de la forma $P'_{00} = f_1(m''_m)$, función generalmente decreciente.

Conocidos el flujo másico y la presión generatriz del chorro primario, las condiciones de acoplamiento vienen dadas por la intersección de las curvas P'_{00} / P'_{00} y $\mu = m''_m / m_m$.

En general, se obtiene una solución única. Sin embargo, en determinadas circunstancias, para pequeños valores de μ y extracción de aire en una corriente no uniforme, puede ocurrir que las curvas F y $f_2(\mu)$ presenten dos puntos de intersección.

17.7 Caso de un mezclador de forma cualquiera

Sea, en particular, el dispositivo de doble flujo clásico representado esquemáticamente en la figura 17.12.

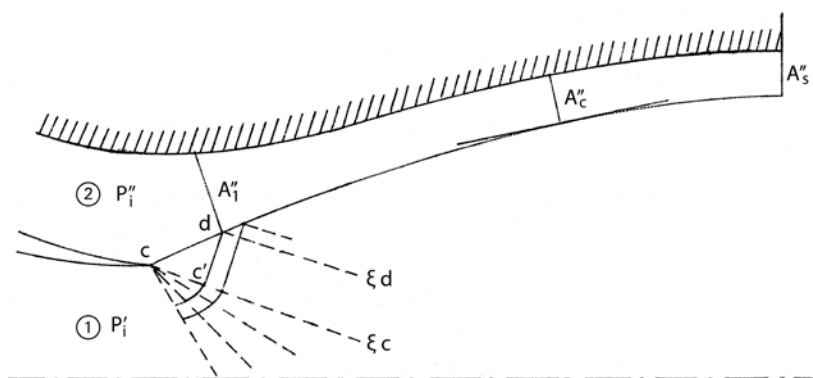


Fig. 17.12.
Configuración clásica de
doble flujo²

En caso de que la salida de los dos chorros ocurra en régimen supersónico, la presión ambiente P_a no desempeña, evidentemente, papel alguno. El cálculo que se lleva a cabo de este modo aporta unos resultados excelentes, que son ratificados experimentalmente (v. figura 17.13). Si la presión P'_{00} disminuye, la sección de bloqueo del flujo secundario se aproxima a la sección de salida y la alcanza. Si P'_{00} es entonces inferior a $P_a / 0,528$, el flujo de aire secundario deviene función de la relación P'_{00} / P_a (v. figura 17.14).



Fig. 17.13.
Régimen
supersónico²

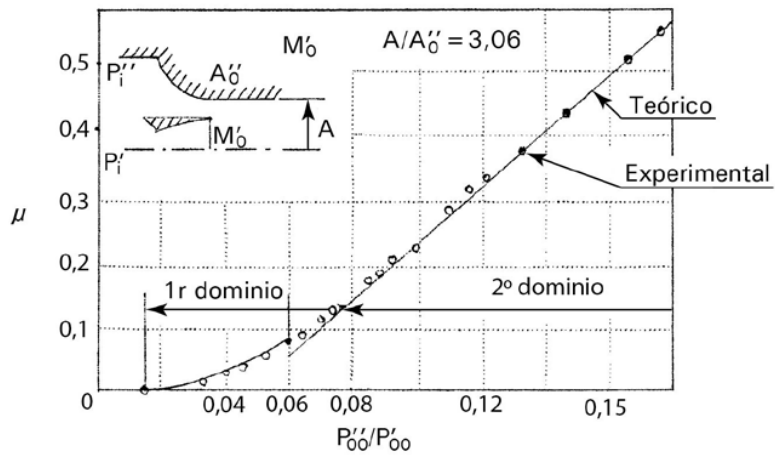
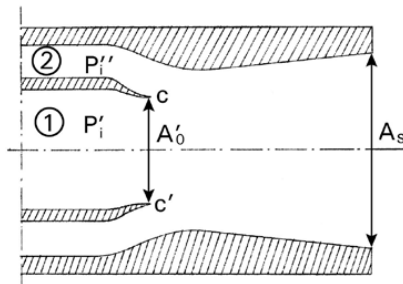
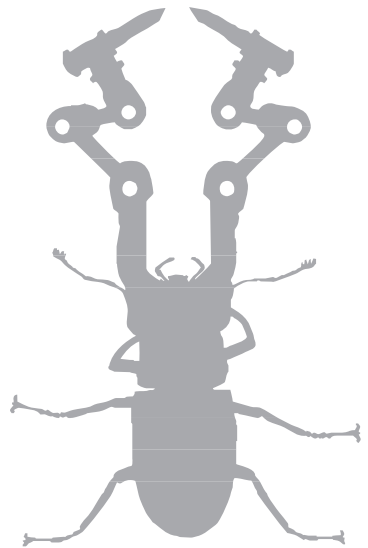


Fig. 17.14².





→ 18



Toberas

18.1 Introducción

Las toberas son extensamente utilizadas para resolver diversos problemas científicos y tecnológicos. Fueron utilizadas por primera vez en turbinas de vapor por el ingeniero sueco De Laval. Por otra parte, son absolutamente necesarias para generar flujos uniformes super -e hipersónicos que no pueden lograrse de otra manera.

Aparte de que las toberas son componentes esenciales de cualquier motor de propulsión a chorro, o como parte de un generador MGD, su campo de aplicación se extiende también, como aplicaciones más sofisticadas, a los “lasers gasdinámicos” 1 y “lentes gasdinámicas”. En toberas planas se consigue grandes gradientes longitudinales de densidad y nulos transversales que permiten desviar un haz de luz sin causar substancial divergencia.

Los procesos físicos que acompañan al flujo de gas en toberas exhiben una amplia variedad de fenómenos, que incluyen excitación fuera de equilibrio de grados de libertad vibracionales de molécula, procesos de intercambio de masa, de cantidad de movimiento y de energía entre fases gas y líquido/sólido, e interacción de partículas en movimiento con campos magnéticos y eléctricos.

No menos diversos son los métodos de resolución de las ecuaciones que describen el flujo en toberas. El problema es complicado, no sólo por el gran número de ecuaciones necesarias para describir los procesos de no equilibrio sino también como consecuencia de que estos difieren en las distintas partes de una tobera. En el caso de un flujo estacionario, el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es elíptico en la región subsónica, parabólico en la región transónica, e hiperbólico en la región supersónica.

En este capítulo se tratan los principales aspectos de la dinámica de gases en toberas desde un punto de vista general. La teoría moderna del flujo de gases y sus métodos de análisis, comprendidos los numéricos, se encuentran expuestos en tratados especializados tales como: “Gas Flow in Nozzles”.

(Ver [PR85])



18.2 Ecuaciones básicas

El estado de un gas con propiedades termodinámicas conocidas que fluye por una tobera está definido por medio de su velocidad, densidad y presión en función de posición y del tiempo. Las funciones básicas representan leyes generales de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía en forma diferencial. El sistema se cierra por medio de ecuaciones de estado térmica y calórica. No obstante, los flujos de gas en toberas están habitualmente acompañados por varios procesos de no equilibrio que pueden ser descritos por las correspondientes relaciones cinética y de relajación.

Sea una mezcla, homogénea o heterogénea, de N componentes cada uno de los cuales está caracterizado por su densidad media ρ_i , su velocidad \vec{V}_i , su energía interna u_i y su estado de tensión π_i .

Para cada componente, las ecuaciones básicas son:

$$\text{Conservación de masa} \quad \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \nabla \cdot \vec{V} = \sum_{k=1}^N R_{ik}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (18.1)$$

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \rho_i \frac{D\vec{V}_i}{Dt} = \nabla P_i + \rho_i \vec{f} + \sum_{k=1}^N \left(\vec{M}_{ik} - R_{ik} \vec{V}_i \right) \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{D}{Dt} \left(u_i + \frac{V_i^2}{2} \right) &= \nabla \cdot \left(\vec{L}_i - \vec{Q}_i \right) + \rho_i \vec{f}_i + \\ \text{Ecuación de la energía} \quad &\sum_{k=1}^N \left[E_{ik} - R_{ik} \left(u_i + \frac{V_i^2}{2} \right) \right], \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (18.3)$$

En las anteriores ecuaciones, R_{ik} es la variación de masa del componente (i) debido al componente (k) (por ejemplo, por reacción química, condensación, etc.) por unidad de volumen y por unidad de tiempo; M_{ik} es el cambio de la cantidad de movimiento del componente (i) debida al componente (k), por unidad de volumen y unidad de tiempo; \vec{L}_i caracteriza el trabajo realizado por las fuerzas superficiales exteriores; \vec{Q}_i es el vector flujo de calor y E_{ik} es el cambio de energía del componente (i) debido al componente (k), referido al volumen y tiempo unidad.

El sistema de ecuaciones 18.1 a 18.3 se cierra por medio de las ecuaciones de estado térmica y calórica que permiten expresar (si se supone equilibrio termodinámico local cuando la temperatura T_i está definida en todos los puntos) el estado de tensión π_i , y la energía interna, u_i , por otros parámetros de la mezcla y algunas variables fisico-químicas. Para resolver problemas particulares se necesita también algunas relaciones fenomenológicas mediante las cuales determinar los parámetros de interacción de masa, R_{ik} , de fuerza M_{ik} , y de energía, E_{ik} , entre fases. Si la desviación respecto al equilibrio es insignificante, las relaciones antes mencionadas se pueden obtener por medio del principio de Onsager y la postulación de relaciones lineales de flujos termodinámicos. Si tienen lugar reacciones químicas, entonces las relaciones necesarias para R_{ik} están definidas por la cinética química.



Las ecuaciones 18.1 a 18.3 son generales y su solución, sin considerar ciertos supuestos simplificadores, es una tarea sumamente difícil. Por otra parte, en la descripción del flujo de gas en tobera, es posible frecuentemente despreciar las fuerzas másicas, las fuentes externas de energía, la viscosidad del fluido, la conducción de calor y la difusión. La viscosidad y la conducción de calor, que tienen una gran importancia cerca de las paredes de la tobera, se las tiene en cuenta mediante la aproximación de capa límite. Sin embargo, viscosidad, conducción de calor y difusión se han de tener en cuenta cuando se considera la interacción de fases.

18.3 Formulación del problema

Para describir flujos de gas en tobera se formulan habitualmente algunas hipótesis. Actualmente, cuando se describen flujos multifase en toberas, los especialistas utilizan con frecuencia modelos de dos fluidos y medios multifluido en los que, en lugar de un flujo real de un gas sucio se considera un flujo interpenetrante de dos o más medios-gas limpio y “gas” de partículas. En este caso, todos los parámetros de flujo representan valores obtenidos tomando el promedio en un pequeño volumen que contiene un gran número de partículas extrañas.

Aparte de las hipótesis formuladas para gas limpio y gas de partículas, cuya enumeración se encuentra en tratados especializados, los casos especiales de flujo que más interesan son los siguientes:

Mezcla de N gases componentes no reactivos. Efectos de viscosidad, conducción de calor y difusión despreciables

Entonces
$$\vec{V} = \vec{V}_i \quad \rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad P = \sum_{i=1}^N P_i \quad (18.4)$$

donde \vec{V} , ρ y P son la velocidad, la densidad y la presión estática de la mezcla, respectivamente.

Las ecuaciones 18.1, 18.2 y 18.3 anteriores se escriben:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \quad (18.5)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla P = 0 \quad (18.6)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (18.7)$$

Mezcla de N gases no reactivos y partículas uniformes. Ausencia de evaporación y de condensación. Volumen ocupado por las partículas despreciable. “Gas” de partículas

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \quad (18.8)$$



$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla P + \rho_s \vec{f} = 0 \quad (18.9)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) + \rho_s \frac{D}{Dt} \left(u_s + \frac{V_s^2}{2} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (18.10)$$

$$\frac{D\rho_s}{Dt} + \rho \nabla \vec{V}_s = 0, \quad \frac{D\vec{V}_s}{Dt} = \vec{f}, \quad \frac{Du_s}{Dt} = q \quad (18.11)$$

donde \vec{f} es la fuerza de interacción del gas limpio y el “gas” de partículas, referida a la unidad de masa del “gas” de partículas, y q es el flujo de calor entre gas y partículas.

El sistema de ecuaciones se cierra por medio de ecuaciones de estado del gas limpio y el “gas” de partículas que, en este caso, son $h=h(P,T)$, $P=R\rho T$, $u_s = u_s(T)$

Evidentemente, si el flujo es estacionario las ecuaciones anteriores se simplifican todavía más suprimiendo todos los términos afectado por el operador $\frac{\partial}{\partial t}$. Además, si aceptamos el modelo de flujo unidimensional (uniformidad de estado del fluido y de su movimiento en cada sección de flujo) los operadores ∇ quedan reducidos a la derivada direccional siguiendo la del movimiento.

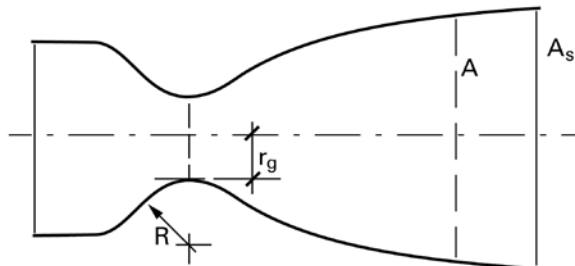
Dos casos límite de flujo isentrópico son de principal significado: un flujo de equilibrio y un flujo congelado. Para el primero, los tiempos característicos de los procesos de relajación son mucho más pequeños que los tiempos característicos de dinámica de gases; para un flujo congelado son mucho más largos. En este último caso, los parámetros que caracterizan los procesos de relajación se suponen constantes e iguales a sus valores en un punto característico del flujo.

18.4 Flujo homentrópico unidimensional en toberas De Laval

Se trata de una aproximación al flujo real en toberas cuyo estudio se justifica, entre otras razones, por la información que aporta acerca de los fenómenos de que puede verse acompañado, principalmente al considerar la influencia del valor de la presión en el medio ambiente receptor en el que ocurre la descarga del gas.

Sea una tobera convergente-divergente que comunica un depósito de grandes dimensiones, en el que el fluido se encuentra en reposo a la presión P_0 , con un medio ambiente exterior en el que la presión absoluta es P_a , figura 18.1

Fig. 18.1.
Configuración básica de
una tobera convergente-
divergente.





Tan pronto como $P_a < P_0$ se establece un movimiento del gas a lo largo del conducto con un flujo másico dado por

$$\dot{m} = (\rho VA)_s \quad (18.12)$$

donde el subíndice s indica la salida de tobera.

Como quiera que el movimiento es homoentrópico (aparte capas tangenciales de discontinuidad por regla general muy delgadas: capas límites), el estado del fluido y la velocidad con que se mueve en todo punto de la tobera están inequívocamente definidas en términos de las condiciones de remanso y de la presión de salida.

Así, por ejemplo, a la salida de la tobera se cumplen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{T_s}{T_0} = \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (18.13)$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{1/\gamma} \quad (18.14)$$

$$M_s^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{P_0}{P_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\} \quad (18.15)$$

$$\frac{a_s}{a_0} = \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_s^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (18.16)$$

El flujo másico está dado por:

$$\dot{m} = \rho_s V_s A_s = \rho_s a_s M_s A_s = \rho_0 a_0 A_s \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left[\frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{P_0}{P_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18.17)$$

Otra forma de expresión del flujo másico utiliza el *factor de flujo* ψ , definido en términos de la relación de presión (p_g / P_0) , donde p_g es la presión estática del fluido en la garganta y P_0 la presión de remanso.

$$\psi \equiv \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{p_g}{P_0} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_g}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18.18)$$

Cuyo valor crítico, correspondiente a



$$p_g = p^*, \text{ es } \psi^* = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} = \Gamma = 0,81019 \quad (\text{para el aire})$$

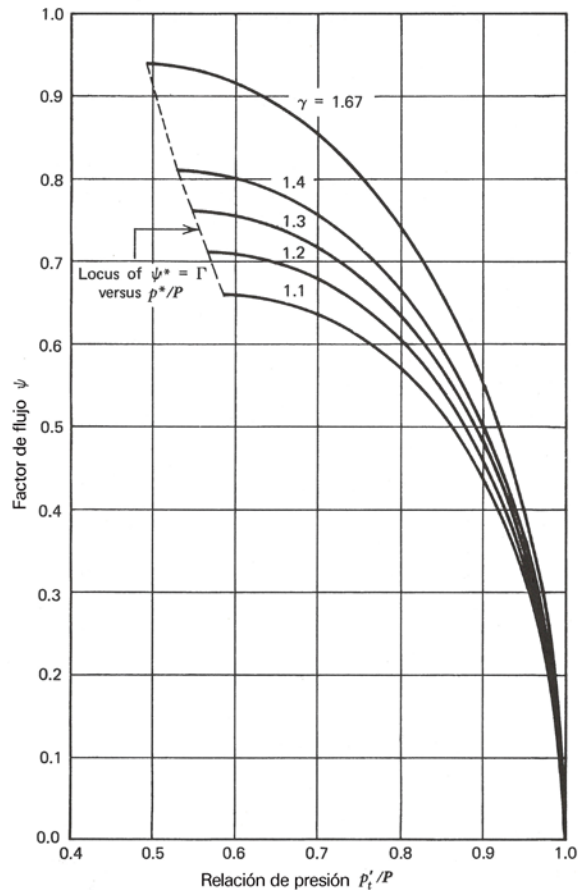
Las correspondientes ecuaciones del flujo másico son:

$$\dot{m} = \frac{\psi P_0 A_g}{\sqrt{\gamma R T_0}} = \frac{\gamma P_0 A_g}{a_0} \quad (18.19)$$

$$\dot{m}^* = \frac{\psi^* P_0 A_g}{\sqrt{\gamma R T_0}} = \frac{\Gamma P_0 A_g}{a_0} \quad (18.20)$$

En la figura 18.2 se ha representado el factor de flujo ψ en función de la relación de presión p_g / P_0 para diferentes valores de γ .

Fig. 18.2.
Factor de flujo ψ en función de la relación de presión p_g / P_0
[ZH76]



Conocido el flujo másico, el cálculo del valor de M y de las propiedades del fluido en cualquier sección de la tobera puede realizarse mediante las ecuaciones:



$$A = \frac{\dot{m}}{\rho_0 a_0} \cdot \frac{1}{M} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (18.21)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \quad (18.22)$$

$$\frac{P_0}{P} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (18.23)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (18.24)$$

Estos cálculos se pueden llevar a cabo determinando el valor de A^* a partir de M_s y A_s mediante la ecuación:

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M_s} \left\{ \frac{2}{(\gamma+1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (18.25)$$

Después, para cualquier otro valor de A se calcula el M correspondiente; o sea:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{2}{(\gamma+1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (18.26)$$

Ahora se puede obtener fácilmente la relación entre área y cualquier otro parámetro; por ejemplo, entre área y presión

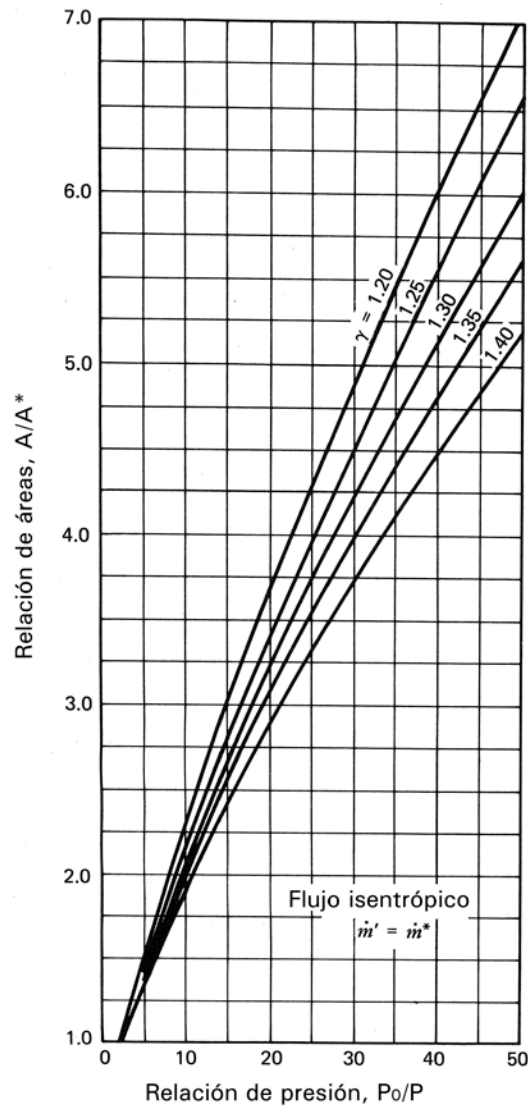
$$\frac{A}{A^*} = \frac{\left(\frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (18.27)$$

La ecuación 18.27 está representada en la figura 18.3.

Siempre que P_s sea más pequeño que P_0 se producirá un flujo másico en la tobera cuyo valor irá aumentando a medida que P_s/P_0 disminuya. Esto es así hasta que se llega a las condiciones sónicas en la garganta.



Fig. 18.3.
Relación de áreas vs
relación de presión
[ZH76]



Estas condiciones corresponden a un valor particular de la presión P_a del ambiente en que descarga la tobera. Este valor se denota por P_{sc} .

Se puede ver que para este valor de la presión, el flujo másico es máximo. La expresión del flujo másico en función de las condiciones en la garganta es:

$$\dot{m} = \rho_0 a_0 A_g \left(\frac{P_g}{P_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_0}{P_g} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18.28)$$



El valor máximo de \dot{m} corresponde al valor de P/P_0 que hace $d\dot{m}/d\left(\frac{P_g}{P_0}\right) = 0$

Esta condición se satisface para

$$\left(\frac{P_g}{P_0}\right) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \text{ o sea: } P_g = P^* \quad (18.29)$$

Resulta pues que cuando la presión en la garganta de la tobera es igual a la crítica, el número de Mach del flujo en ella es la unidad; o sea: se alcanza el estado crítico y el flujo másico es máximo:

$$\dot{m}_{\max} = \rho_0 a_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad A^* = A_{\min} \quad (18.30)$$

Cuando el depósito descarga por un conducto convergente cuya área mínima corresponde a su sección de descarga, las condiciones sónicas se presentan en la salida misma. Por lo tanto

$$P_{sc} = \left(2/(\gamma+1)\right)^{\gamma/(\gamma-1)} P_0 \quad (18.31)$$

El bloqueo sónico aparece tan pronto como la presión en el recinto de descarga deviene menor que P_{sc} . El fluido a la salida del conducto debe después expansionarse para adaptarse a la presión ambiente.

En la figura 18.4 se muestra el efecto de la relación de presión en una tobera De Laval. Consideremos que el flujo en la tobera se inicia en un punto de la rama subsónica (figura 18.1).

A medida que la sección del conducto se acerca al valor crítico, A^* , el número de Mach aumenta y la relación de presiones P/P_0 disminuye. Al llegar a la garganta, si el flujo deviene sónico su área es crítica y el flujo corriente abajo deviene supersónico.

Las características del flujo en el conducto de sección recta creciente corriente abajo de la garganta (divergencia) dependen de la presión en el recinto de descarga.

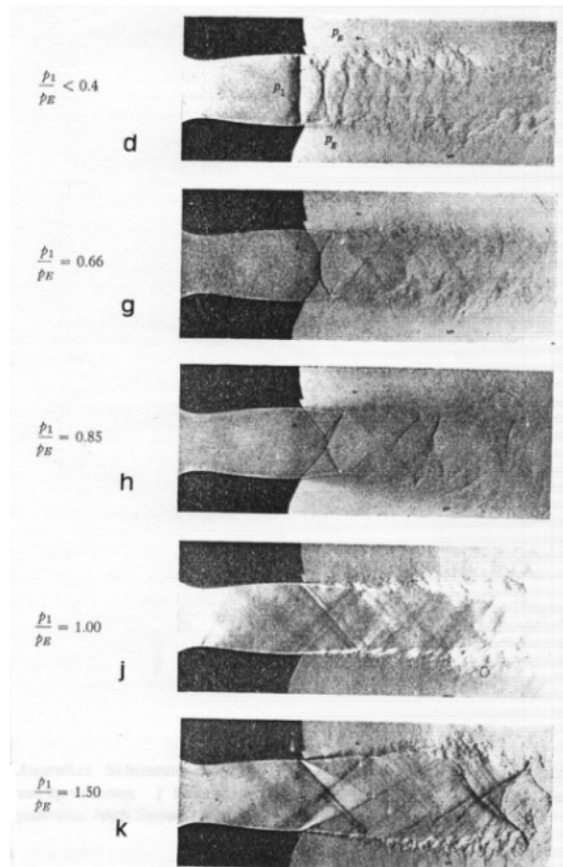
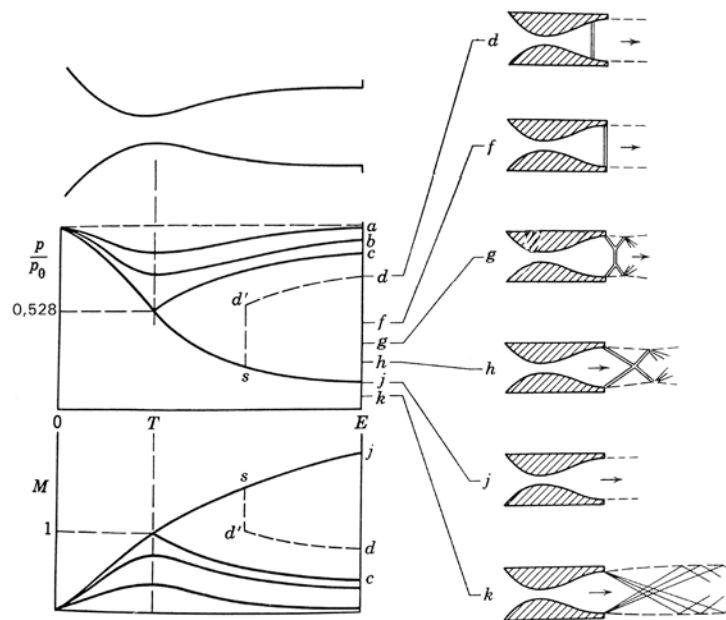
La figura 18.4 muestra la forma de las distribuciones teóricas de presión y las configuraciones de onda para varias presiones de salida. Para las presiones denotadas por a y b , la presión en la garganta es superior a la crítica por lo que el flujo es por todas partes subsónico, controlado por la presión de salida.

Para el valor de la presión exterior denotado por c el flujo en la garganta deviene sónico, siendo la presión en ella crítica. Entonces, la única solución isentrópica posible está representada por el flujo supersónico correspondiente a una presión en la descarga denotada por (j) .

Pero, para que este flujo exista, la presión en la salida P_j debe ser considerablemente menor que P_c . Entonces, ¿qué ocurre cuando la presión en la descarga tiene un valor comprendido entre P_c y P_j ? Evidentemente, para ellas no hay *soluciones isentrópicas*.



Fig. 18.4.
Efecto de la
relación de
presión sobre el flujo
en una
tobera De Laval^{3,4}





Por ejemplo, consideremos una presión de salida P_d algo menor que P_c . Podría ser alcanzada por un flujo subsónico, tal como se muestra por la línea de trazos $d'd$, a lo largo de la cual la relación de presiones P/P_{0d} satisface la relación de áreas definida por la ecuación 18.27, siempre y cuando P_{0d} sea menor que P_0 . Ello requiere que ocurra un proceso *no isentrópico* en alguna parte a lo largo del flujo.

Hay muchas posibilidades. La hipótesis más simple, sin introducir efectos viscosos, es que el aumento de entropía ocurre en un choque normal simple. La localización del choque en (s) debe ser a un número de Mach que dará justo el correcto P_{0d} para alcanzar el punto d . Para cada posición s del choque a lo largo de la rama supersónica hay una presión de salida correspondiente que puede ser alcanzada.

A medida que disminuye la presión de salida el choque se mueve corriente abajo, alcanzando finalmente la salida cuando la presión allí toma el valor P_f . Toda ulterior disminución de la presión de salida ya no afecta al flujo en la tobera; el ajuste de presión se lleva a cabo por sistema de ondas oblicuas, tal como se muestra en la figura 18.4 y en la fotografía adjunta.

18.4.1 Subexpansión en toberas De Laval

Cuando en la tobera se alcanza el flujo másico máximo m^* el gas se expande completamente, en régimen supersónico, hasta alcanzar al final de su parte divergente la presión de remanso ambiente. Por consiguiente, toda ulterior reducción de la presión ambiente no tiene efecto sobre las condiciones de flujo en el interior de la tobera. Más allá de la salida de la tobera, el flujo supersónico se expande casi de la misma manera que lo hace en una tobera convergente funcionando con una relación de presión supercrítica. Dado que el gas no se expande completamente dentro de la tobera, la energía cinética asociada con el chorro que atraviesa la sección de salida de la tobera es menor que la que corresponde a expansión isentrópica de gas desde P_0 hasta la presión ambiente. De esta tobera se dice que funciona en régimen sub-expandido (ver figura 18.5a).

Por consiguiente, si se utiliza la tobera como propulsor, el empuje obtenido cuando funciona sub-expandida será menor que el que corresponde a expansión completa.

18.4.2 Sobreexpansión en toberas De Laval

Sobreexpansión en tobera De Laval significa que los gases se expanden en el interior de la tobera hasta una presión inferior a la contrapresión ambiente para ser después comprimidos hasta el valor de contrapresión a través de una serie de ondas de choque oblicuas.

El resultado es la disminución del empuje. Si se aumenta suficientemente la contrapresión, el chorro se desprende de la pared del tramo divergente de la tobera, tal como se muestra en las figuras 18.5b, 18.5c y la figura 18.6.



La contrapresión, que no se puede propagar por el chorro, sí que lo hace corriente arriba a través de la capa límite que rodea al chorro, pues en ella la velocidad del fluido varía desde un valor supersónico, en la interfaz con el chorro, a cero en la pared de la tobera. Por consiguiente, dentro de la capa límite hay regiones donde las velocidades de gas son subsónicas. Así, si en el borde de salida de la tobera ocurre una onda de presión, puede propagarse corriente arriba a través de las regiones de la capa límite donde el flujo es subsónico.

Fig. 18.5.
Regímenes en una tobera ideal no adaptada⁵

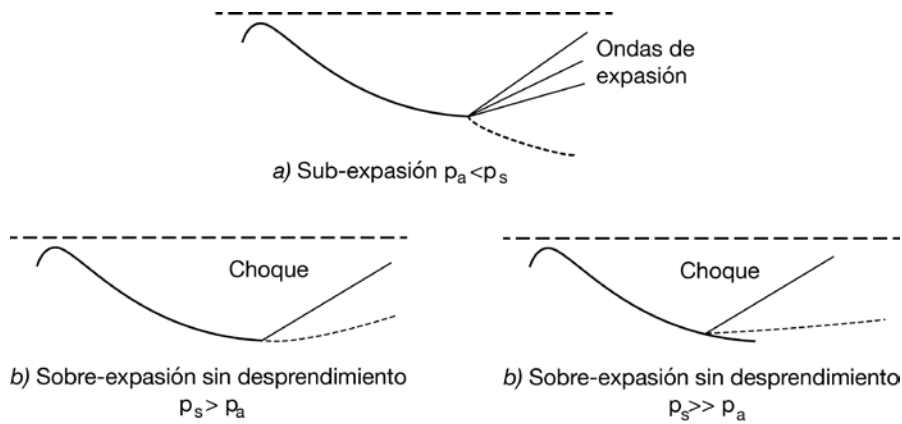
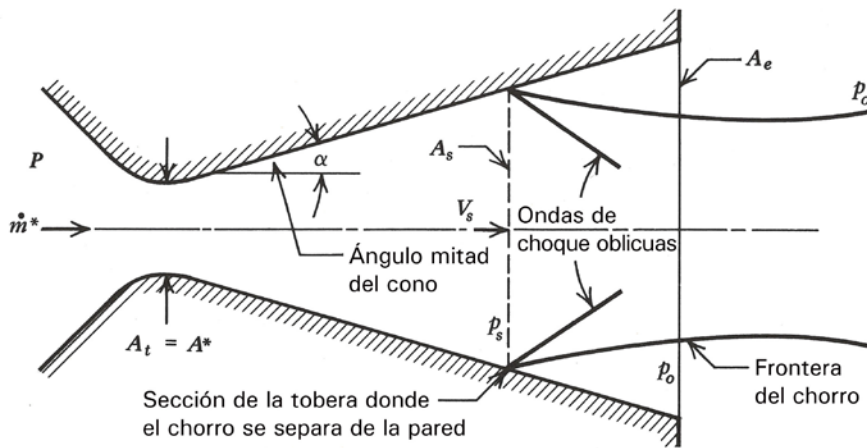


Fig. 18.6.
Desprendimiento de la corriente en una tobera De Laval [ZH76]



La figura 18.7 presenta los resultados obtenidos por A. Stodola ⁶ en los experimentos sobre el efecto de la contrapresión sobre la presión estática del fluido a lo largo del eje de una tobera convergente-divergente. Se constata que cuando la contrapresión es correcta, curva M , la presión estática a lo largo del eje de la tobera era la más baja obtenida en los experimentos, y es la condición límite para todos.

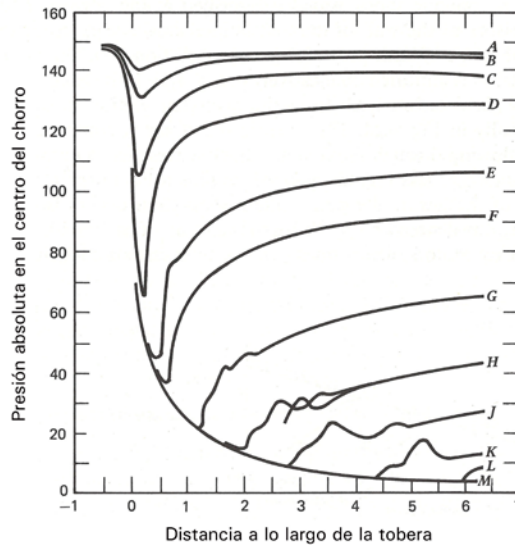


Fig. 18.7. Evolución de la presión a lo largo del eje de una tobera convergente-divergente en función de la relación de presión para varios valores de la contrapresión. [ZH76]

La presión de separación p_s es aproximadamente $0,40p_0$, pero, en las toberas cónicas, el valor exacto de la presión de separación está influenciado por el carácter de la capa límite y el ángulo mitad α de la divergencia cónica.

Los experimentos indican que, para un valor dado de α , la *relación de presión de separación* p_s/p_0 es una función de la relación de presión de tobera P_0/p_0 . La figura 18.8 muestra una correlación de los resultados obtenidos por diferentes investigadores con toberas de motor cohete que tenían un ángulo de divergencia $\alpha = 15^\circ$.

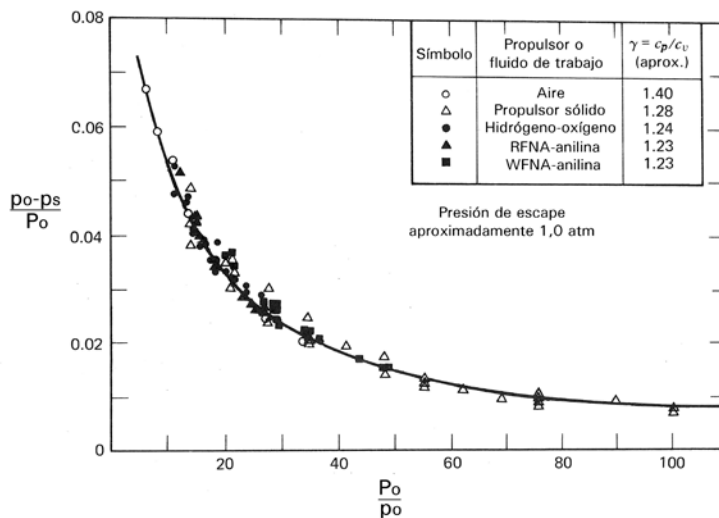


Fig. 18.8. Correlación de resultados sobre separación el flujo en toberas ⁷

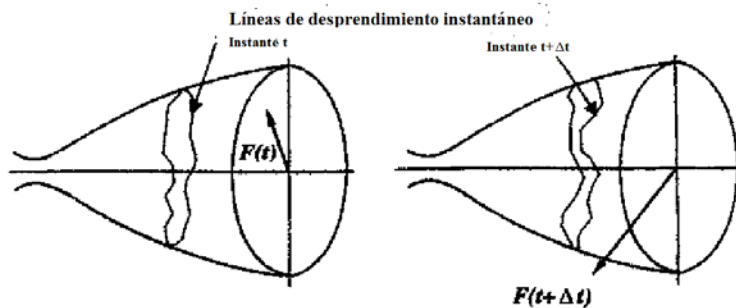
Durante el ascenso de un cohete-lanzadera, la tobera de un motor-cohete como el Vulcain funciona, en la plataforma de lanzamiento, con una contrapresión aproximadamente de 1 bar, hasta alcanzar un valor de $5 \cdot 10^{-4}$ Pa a una altitud de unos 150 Km.



A fin de reducir las pérdidas debidas a la sub-expansión, la tobera se diseña para la altitud de adaptación más alta pero de manera que se evite el desprendimiento del chorro en el momento de funcionamiento sobre la plataforma, pues el desprendimiento del chorro en régimen permanente conlleva riesgos de integridad mecánica de la tobera y su motor.

El desprendimiento del chorro tiene una naturaleza inestable y localmente tridimensional, lo que se traduce por la pérdida de simetría de revolución teórica de los campos de presión parietal instantáneos y, por consiguiente, por cargas laterales inestables sobre las paredes de la divergencia de la tobera (ver figura 18.9).

Fig. 18.9.
Esquema del
fenómeno de
cargas laterales
por desprendi-
miento del
chorro⁵



(Ver [ZH76]) (Ver ref. 2)

18.5 Comportamiento de una tobera en el vacío

En este apartado se estudian las propiedades intrínsecas de la tobera, particularmente el *flujo másico* y el *empuje*, a partir de la hipótesis de que la presión que reina a la salida de la tobera es lo suficientemente baja como para que no tenga influencia alguna sobre el comportamiento del flujo interno.

Conocidas la presión y la entalpía de remanso P_0 , h_0 del fluido en la entrada a la tobera, despreciando efectos de viscosidad y conductividad térmica del fluido y suponiendo que en cada sección recta de la tobera el flujo es uniforme, todo el proceso de expansión está determinado por la geometría. Este planteamiento del problema es una primera aproximación que está representada por la *teoría unidimensional del flujo*.

18.5.1 Teoría unidimensional en régimen estacionario: Fundamentos

La hipótesis de equilibrio permite representar las propiedades del fluido en un *diagrama de Mollier* (h , s) (ver figura 18.10). En un punto de este diagrama se cruzan tres curvas principales: isobara, isoterma e iso Z (Z , factor de compresibilidad) en las que se lee directamente los valores de las variables h , s , P , T , Z .

En la figura 18.11 se ha representado la conversión de entalpía en energía cinética por expansión isentrópica desde la presión crítica p^* en la garganta hasta la contrapresión p_o . La condición de conservación de entalpías se expresa:

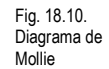
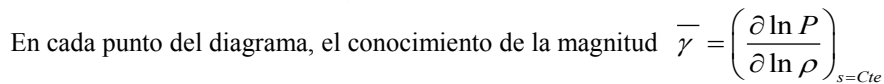


Fig. 18.11.
Conversión de
entalpía en
energía cinética
en una tobera De
Laval [ZH76]



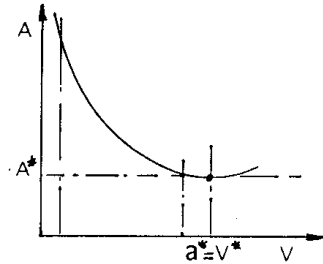
y el número de Mach $M = \frac{V}{a}$ (18.32)

En efecto

Variando el valor de h a partir del de h_0 se pueden calcular paso a paso las leyes $P(A)$, $\rho(A)$, $V(A)$, etc. Se encuentra entonces, de conformidad con el teorema de Hugoniot, que el área A pasa por un mínimo A^* para un valor particular de la velocidad del fluido, $V = a^*$, denominada *velocidad crítica* (ver figura 18.12).



Fig. 18.12.

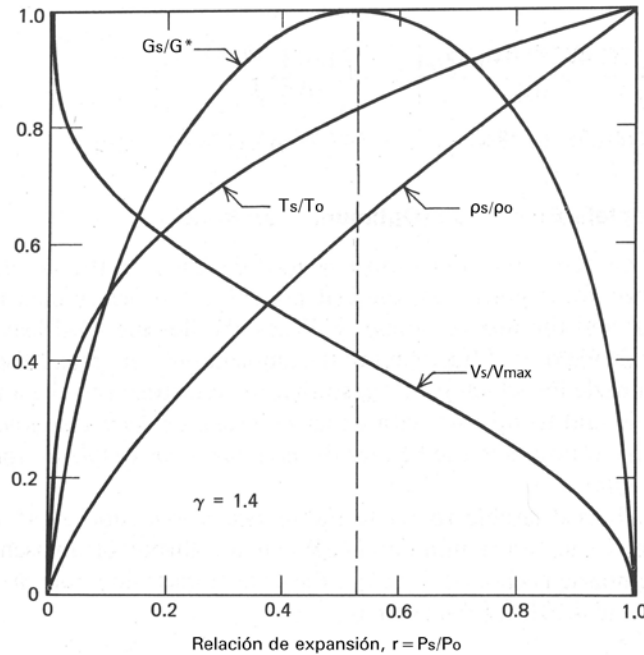


Otra magnitud importante es la *velocidad límite*

$$V_{\text{lim}} = \sqrt{2h_o} \quad (18.34)$$

Definida la *relación de expansión isentrópica* por $r = p_s / P_0$, el comportamiento de una tobera operando con gases perfectos cuya relación de calores específicos es $\gamma = 1,4$ se describe por relaciones tales como ρ_s / ρ_0 , T_s / T_0 , V_s / V_{max} , etc. (ver figura 18.13).

Fig. 18.13.
Relación de magnitudes de flujo en función de la relación de presión en una tobera De Laval [ZH76]



A su vez, dicho comportamiento puede también expresarse en términos del número de Mach mediante expresiones explícitas como, por ejemplo, las siguientes

$$\frac{P}{P_0} = \omega(M, \gamma) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (18.35)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (18.36)$$

$$\frac{A}{A^*} = \sum(M, \gamma) = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (18.37)$$

$$\gamma = 1,4$$

Estas fórmulas se encuentran tabuladas para diferentes valores de γ .

18.5.2 Flujo másico unidimensional

Sea A^* el área de la garganta de la tobera, donde $M=1$, de manera que el flujo másico está dado por $\dot{m} = \rho^* a^* A^*$; o bien, en términos de ρ_0, a_0 , sustituyendo ρ_0 por $\gamma(P_0 / a_0)$, resulta

$$\dot{m} = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{c_p T_0}} P_0 A^* \quad (18.38)$$

donde $\delta(\gamma)$ es una función de γ ,

$$\delta = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (18.39)$$

cuyos valores son los siguientes

γ	1,25	1,30	1,35	1,40
$\delta(\gamma)$	1,4714	1,3890	1,3279	1,2810

Se constata que:

- En un flujo estacionario adiabático ($T_0 = Cte$), de gas caloríficamente perfecto, el producto $P_0 A^*$ es invariante.
- Si las pérdidas de carga reducen la presión de remanso a $P'_0 < P_0$, la sección crítica corriente abajo de estas pérdidas de carga será $A'^* = A^* \frac{P_0}{P'_0} > A^*$
- El flujo másico reducido $\dot{m} \frac{\sqrt{T_0}}{P_0}$ se utiliza frecuentemente en propulsión como parámetro de funcionamiento del motor pues, para un gas caloríficamente perfecto, esta magnitud es proporcional a la sección crítica local A^* o, en una sección de área dada, función del número de Mach local, definido por $\sum(M) = A/A^*$

18.6 Comportamiento de una tobera en la atmósfera

En las aplicaciones de propulsión, en particular, se considera que una tobera está *adaptada* a las condiciones de vuelo dadas cuando la presión del chorro en la salida es igual a la presión ambiente no perturbada. De hecho, en estas condiciones el empuje de la tobera es máximo.

Sea P_a la presión atmosférica que actúa fuera del chorro, P_s la presión del fluido en la sección de descarga de la tobera cuya área es A_s y en la que la velocidad media de escape del fluido es V_s . Se sabe que el empuje total es

$$F = (P_s - P_a) A_s + \dot{m} V_s \quad (18.40)$$

Se demuestra fácilmente que esta expresión es máxima para $P_s = P_a$ (tobera adaptada). Sin embargo, la noción de adaptación no es tan simple como pueda parecer.

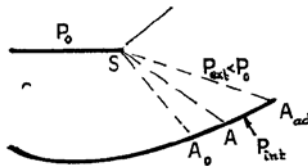
Cuando la tobera forma parte de una estructura que se desplaza en el medio exterior con una determinada velocidad, caso por ejemplo del fuselaje de un reactor, aparecen efectos de interacción que modifican el empuje. Uno de los efectos más importantes es el desprendimiento de la corriente en la tobera sobre-expandida.

Aparte cuanto se ha expuesto en un punto anterior sobre el fenómeno de desprendimiento en una tobera, conviene ahora añadir algunas consideraciones suplementarias dado el indudable interés en relación no solo con las medidas efectuadas en un banco de ensayo, sino también a los fines de la determinación del empuje.

Considérese una tobera de revolución perfilada, alimentada en condiciones generatrices determinadas e invariables y sea $P(x)$ la curva de expansión completa para una presión ambiente de salida bastante baja. Si ahora se eleva progresivamente esta presión, se constata que poco después de la formación del choque oblicuo de salida aparece un desprendimiento que ocurre cada vez más al interior de la tobera a medida que P_a aumenta (ver figura 18.5c).

Ahora, supongamos, por ejemplo, que el flujo exterior es supersónico y que la presión generatriz de la tobera P_0 es tal que la sección de salida A_0 , figura 18.14, adaptada en el sentido clásico, no alcanza el nivel de acoplamiento al flujo definido por el punto S de extremo del fuselaje.

Fig. 18.14.
[Car71]



Es evidente que si hubiera, por ejemplo, una pared plana que estableciese un cierre enlazando los puntos S y A_0 , estaría sometida, por el hecho de la expansión en S, a una presión tal que $P_{ext} < P < P_\infty$, y que el empuje global será inferior al de la misma tobera adaptada. Si se va alargando la tobera, es evidente que la presión exterior sobre



la pared irá aumentando mientras que las presiones internas sobre $\overline{A_0A}$ irán disminuyendo (ver figura 18.14).

Habrà verdadera adaptación cuando las dos presiones en A sean iguales. En este caso se ve que la buena adaptación ocurre para un área A_{ad} a la que corresponde una presión de salida inferior a P_∞ ; o sea, a una tobera sobreexpandida (ver figura 18.15).

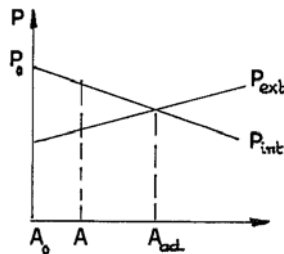


Fig. 18.15.
[Car71]

18.6.1 Desprendimiento de una tobera sobreexpandida en la atmósfera en reposo

Considérese, de nuevo, una tobera de revolución perfilada, y sea $P(x)$ la evolución de la presión del gas en una expansión completa para una contrapresión bastante baja. Sea S , figura 18.16, el punto origen de un desprendimiento simétrico para una cierta presión P_a . Corriente abajo del punto S se encuentra a menudo los cuatro tipos de curvas de presión que se muestran en la figura. Las curvas del tipo *I*, *II* y *III* interesan sobre todo en relación con los ensayos efectuados a pequeña escala, a números de Reynolds demasiado bajos. A la escala de los motores de reacción reales, los números de Reynolds son siempre lo bastante elevados como para que se observen únicamente desprendimientos del tipo *IV*.

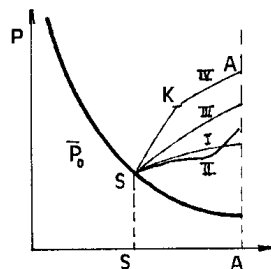


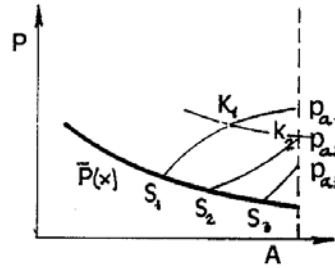
Fig. 18.16.
[Car71]

La curva de presión correspondiente comporta dos partes bien diferenciadas:

- La rama SK , denominada por Chapman zona de desprendimiento libre ya que su forma es independiente de las condiciones que reinan corriente abajo del punto K (rama invariante)
- La rama KA que, por el contrario, depende muy acusadamente de las condiciones corriente abajo y muy en particular de la forma del perfil de la tobera



Fig. 18.17.
[Car71]



Si en una tobera dada disminuimos P_a el punto S se acerca al punto A de salida por fenómenos que tienen idéntica manifestación hasta que se alcanza la evolución S_2K_2 (ver figura 18.17). A partir de esta posición, si P_a continúa disminuyendo la forma de SK evoluciona y tiende a una discontinuidad (onda de choque oblicuo).

Como ya se ha avanzado, el resultado es una pérdida de empuje de la tobera convencional De Laval. A fin de disponer del máximo empuje cualquiera que sea la contrapresión (presión exterior), es necesario, mantenida constante la presión generatriz, que una tobera pueda regular su relación de expansión a través de la variabilidad de su relación de secciones, lo que es inviable en el caso de toberas de revolución.

La solución de una tobera auto-adaptable se encuentra vía la recuperación del efecto propulsor de la expansión de los gases sobre un cuerpo central encerrado en la tobera propiamente dicha: la tobera auto-adaptativa de cuerpo central. De sus características, se tratará más adelante

18.7 Pérdidas en toberas

Como es sabido, la función de una tobera sea en una turbina de vapor o bien una turbina de gas, un motor de propulsión a chorro y otras varias aplicaciones, es convertir energía térmica, o potencial de presión, en la máxima cantidad de energía cinética de chorro que corresponde a las condiciones operativas de entrada y salida de la misma.

En un principio, parece razonable suponer que si bien la expansión del fluido en la tobera es adiabática, el proceso nunca es isentrópico pues los efectos de fricción y turbulencia en el flujo no pueden evitarse, manifestándose como pérdidas de tobera. Como un resultado, la energía cinética del chorro desarrollado por una tobera real es siempre menor que el calculado para un proceso de expansión isentrópico entre idénticas presiones de entrada y de descarga (contrapresión)

El efecto de fricción sobre el funcionamiento de una tobera se puede tener en cuenta por la relación de presión de estancamiento, por el rendimiento de energía cinética η o bien por el coeficiente de velocidad ϕ de la tobera. Ahora bien, hay otras muchas causas de pérdida de eficacia de las toberas, como son:

- Flujo transitorio, no estacionario, y flujo multifase
- No uniformidad del flujo a la salida de la tobera
- Capa límite. Espesor de desplazamiento e interacción capa límite-onda de choque

- 547



Habida cuenta que dicha relación para el área circular es distinta, inferior, a la del casquete esférico pues $A_c < A_e$, también son distintas las propiedades de los correspondientes flujos.

Ello comporta afectar los resultados de la teoría unidimensional de un factor corrector para ajustarlos a los valores reales.

18.7.3 Capa límite. Espesor de desplazamiento e interacción capa límite-onda de choque

Las tensiones de cortadura sobre las paredes de una tobera debidas a la viscosidad del fluido retardan el flujo en una capa, la capa límite, y disminuyen la presión del fluido.

Habitualmente, el efecto sobre el valor el empuje axial producido por la tobera es pequeño, a no ser que la tobera sea muy larga. Por ejemplo, para una tobera campana truncada, la pérdida de impulso es menor que un 1,5%.

El espesor de desplazamiento de la capa límite δ^* da lugar a un área menor disponible para la corriente libre. Un área efectiva menor que el área geométrica conlleva una caída de \dot{m} , representada por el valor del coeficiente de descarga de la tobera bloqueada

$$C_D = \frac{\dot{m}_{real}}{\dot{m}_{ideal}} = \frac{A_{efectiva}}{A_g} = \left(\frac{R_g - \delta^*}{R_g} \right)^2 \quad (18.42)$$

$$\text{Para } \delta^* / R_g \ll 1 \rightarrow C_D \cong \left(\frac{R_g^2 - 2R_g \delta^*}{R_g} \right),$$

$$C_D = 1 - \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{3/4} \left[3,266 - \frac{2,128}{\gamma + 1} \right] Re^{-1/2} + 0,9428 \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 2)}{(\gamma + 1)^2} Re^{-1} \quad (18.43)$$

Donde $Re = Re_g \sqrt{\frac{R_g}{R_c}}$, $R_c \equiv$ radio de curvatura de la garganta

Para $\delta^* < 0,002R_g$ (capa límite delgada en la garganta), $P \uparrow$, $R_g \downarrow$, incluso si $Re \div 20$.

Las interacciones capa límite-onda de choque pueden conducir a inestabilidad y separación del flujo: separación de la capa límite inducida por la onda de choque lo que permite propagación de la presión ambiente a través de la capa límite subsónica.

Por otra parte, puede mejorar el coeficiente de empuje de las toberas campana sobre-expandidas al incrementar la presión sobre las paredes de la tobera (ver figura 18.19).

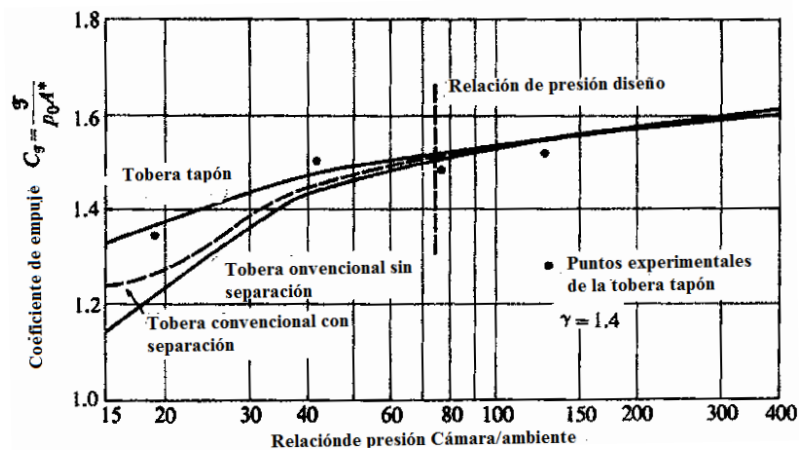


Fig. 18.19.
Variación del
coeficiente de
empuje en función de
la relación de presión
cámara/ambiente
[HP92]

18.7.4 Inadecuada relación de áreas cámara de combustión/garganta de tobera

Un Parámetro importante de los motores de propulsión a chorro es la relación de área de su cámara de combustión $\varepsilon_{cc} \equiv A_{cc} / A_g$

Si $\varepsilon_{cc} < 3-4$, entonces el número de Mach en la cámara de combustión es demasiado alto y puede resultar en una pérdida significativa de la presión de remanso (flujo de Rayleigh). Por ejemplo, para un gas de $\gamma = 1,2$ y número de Mach 0,5, la pérdida de presión es aproximadamente un 15% del incremento de temperatura conforme a la ecuación

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma}{2} M^2 \frac{dT_0}{T_0}$$

Menor presión de remanso significa menor impulso y menos flujo másico

18.7.5 Pérdida de calor y erosión

La pérdida de calor procedente de la tobera significa menor entalpía disponible para convertirla en energía cinética lo que se traduce en disminución de la velocidad del fluido en el chorro y de su impulso.

Las elevadas temperaturas del gas y sus efectos químicos corrosivos son causa de erosión de las paredes de la tobera, en particular cerca de su garganta donde puede ser lo suficientemente importante como para dar lugar a incremento del flujo másico y disminución del valor de ε_g

18.7.6 Efectos de gas real, etc.

Estos efectos se explican en el apartado que trata del *coeficiente de caudal*.

(Ver [ZH76]) (Ver ref. 8)



18.8 Flujo másico real de una tobera

De acuerdo con la teoría unidimensional el flujo másico teórico de una tobera se expresa:

$$\dot{m}_t = P_0 A^* \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{c_p T_0}} \quad (18.44)$$

donde el coeficiente $\delta(\gamma)$ se puede calcular explícitamente para un gas calóricamente perfecto, en función de γ (ecuación 18.39).

En realidad, la ecuación 18.41 requiere un factor de corrección que tenga en cuenta no sólo la curvatura del perfil de la garganta de la tobera sino también fundamentalmente el efecto de desplazamiento de la capa límite. A tal fin, se introduce el coeficiente de caudal que aplicado al flujo másico teórico anterior da el real:

$$\dot{m} = C_D \dot{m}_t \quad (18.45)$$

El coeficiente de caudal, C_D , en general de valor próximo a la unidad, se puede escribir en la forma:

$$C_D = C_{Dk} \cdot C_{D\delta} \cdot C_{Dv} \cdot C_{D\gamma}$$

donde C_{Dk} representa el efecto de curvatura de la garganta, $C_{D\delta}$ representa el efecto de desplazamiento de la capa límite, C_{Dv} representa la influencia del efecto de virial y $C_{D\gamma}$ representa el efecto de temperaturas elevadas sobre las propiedades del gas

Habida cuenta que cada uno de estos factores tiene un valor próximo de la unidad, cabe admitir que puede ser evaluado independientemente de los otros.

18.8.1 Efecto de la curvatura del perfil en la garganta

Como está comprobado, la línea sónica no es normal al eje de la tobera, lo que permite suponer que el flujo másico real debe depender del radio de curvatura relativo R/h del perfil de la garganta. En tal caso, el flujo másico debe calcularse así:

$$\dot{m} = \int_e^p 2\pi \rho u y dy \quad (18.46)$$

integral cuyos límites son la pared, p , y el eje e . Resulta pues que el cálculo del flujo másico requiere conocer el campo de velocidades y la densidad ρ del fluido en la garganta

En el caso que la curvatura relativa h/R sea pequeña ($<0,5$) puede evaluarse $u(x, y)$ y $\rho(x, y)$ se deduce de $M(x, y)$. Para $\gamma=1,4$ los cálculos aportan los resultados representados en la figura 18.20, en la que se han trazado las curvas representativas de c_{Dk} en función de $(d/R)_g$ tomando como parámetro $Re(d)$ y bajo las condiciones



de pared adiabática, tobera de revolución con garganta de pequeña curvatura y gas perfecto. Por ello, las curvas están limitadas a la abscisa $(d/R)_g = 1$.

En dicha figura, $Re(d) = \infty$ indica que se trata de un flujo no viscoso. Si bien las curvas se han establecido para $\gamma = 1,4$, los valores de c_{Dk} son utilizables para otros valores de γ pues los cálculos muestran que para $(d/R)_g = 1$, por ejemplo, el error para $\gamma = 1,2$ es despreciable.

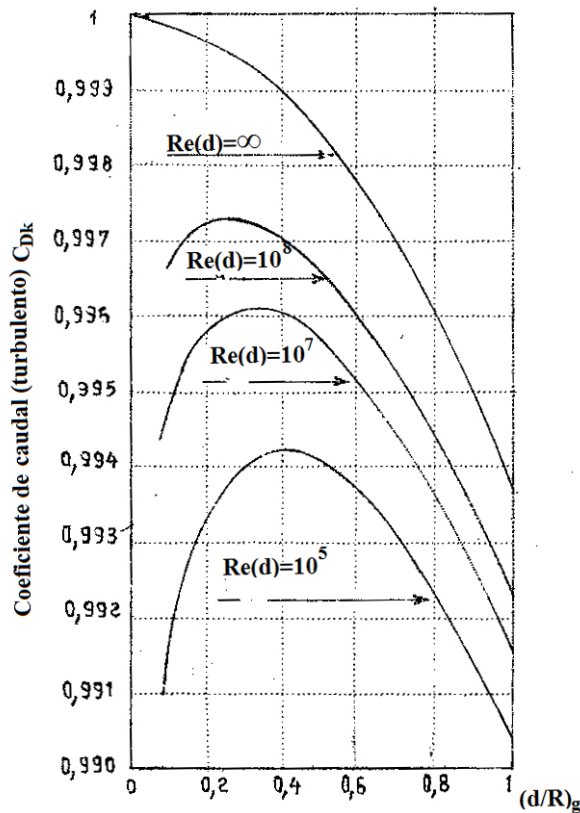


Fig. 18.20.
Coeficiente de caudal de toberas de revolución con pequeña curvatura en la garganta, pared adiabática y gas perfecto.

$$Re(d)_0 = (\rho a / \mu)_0 (d_g / 2)$$

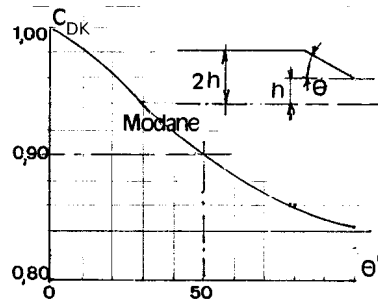
[Car71]

A partir de valores de $(d/R)_g$ mayores que 0,6, la influencia de la curvatura de la pared en la garganta R_g impone correcciones del flujo másico dado por la teoría unidimensional del orden de 0,2 a 0,5 %.

En el caso de toberas con convergencia troncocónica terminadas por un perfil de fuerte curvatura hacia dentro, dejan de ser válidos los resultados derivados de la teoría unidimensional. La figura 18.21 muestra los resultados experimentales obtenidos en Modane (ONERA). En el caso límite de tobera puramente troncocónica, $R/h = 0$, se constatan desviaciones muy importantes respecto de los resultados de la teoría unidimensional.



Fig. 18.21.
Coeficiente de
caudal de toberas
puramente
tronco-cónicas
(fluido perfecto)
[Car71]



Para $\theta = 20^\circ$, por ej., $C_{D\infty} = 0,964$

La figura 18.22 generaliza los resultados en el caso en que la tobera comporta una garganta poco redondeada. La figura 18.23 muestra la influencia del número de Mach a la entrada de la convergencia sobre el coeficiente de caudal: si el número de Mach deviene demasiado elevado (mayor que 0.4 en el caso examinado, $\theta = 20^\circ$), el coeficiente de caudal se aproxima al dado por la teoría unidimensional.

Figura 22. Coeficiente de caudal de toberas con convergencia tronco cónica de revolución (fluido perfecto) [Car71]

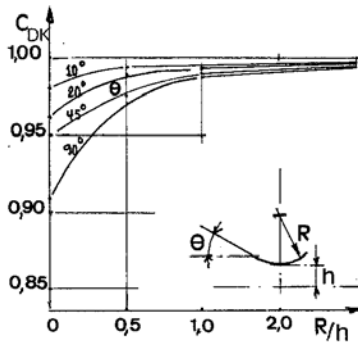
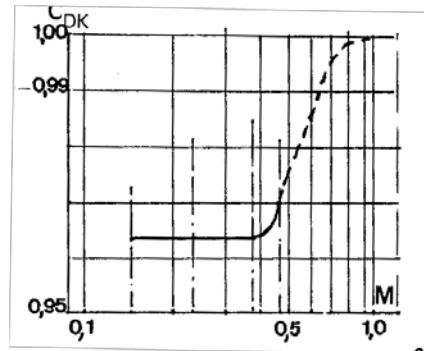


Fig. 18.23.
Efecto del número
de Mach corriente
arriba (resultados
experimentales
Modane-ONERA)
[Car71]



Todos estos resultados subrayan la importancia de los métodos basados en cálculo numérico para la evaluación precisa, en cada caso, de $C_{D\infty}$.

Si el contorno de la tobera cerca de la garganta es un arco circular, entonces la línea sónica es curvilínea y el coeficiente de caudal es menor que la unidad lo que se debe a que la no uniformidad del campo de flujo aumenta a medida que disminuye $R_2 = R/r^*$.

Si la parte transónica tiene semejante forma, entonces el coeficiente de caudal depende principalmente de R_2 y solo muy poco de θ_0 y γ .

La dependencia de C_D respecto de θ_0 es evidente únicamente si $\overline{R_2}$ es pequeño, menor que 0,5 (ver figura 18.24).

En una tobera convergente con un punto esquina en la garganta, la línea sónica tiene un punto de inflexión con la consiguiente no uniformidad del flujo que puede ser sustancial y aumentar a medida que lo hace el ángulo θ_0 .

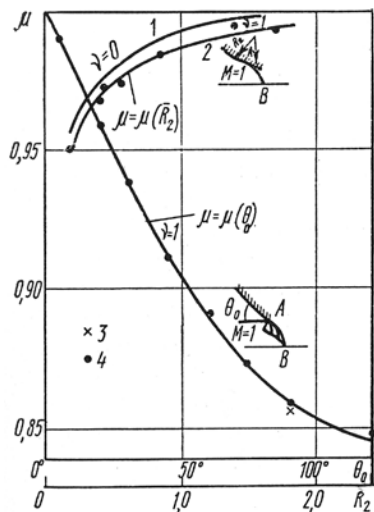


Fig. 18.24.
Coeficiente de caudal en función de θ y de R_2
[PR85]

Los datos de coeficiente de caudal representados en la figura 18.24 se refieren al caso de tobera bloqueada plana $\nu=0$ y axisimétrica $\nu=1$, cuando no es así, los datos ya no son válidos.

Si el número de Reynolds característico

$$(Re_0 = \rho_0 W_{max} r^* \eta_0^{-1})$$

es pequeño y la capa viscosa ocupa una parte considerable de la sección transversal de la tobera, entonces el cambio de valor del coeficiente de caudal debido al cambio del número de Reynolds puede ser significativo. Según Rothe⁹, el valor del coeficiente de caudal pasa de 0,6 a 0,9 con el cambio de valor del número de Reynolds de 100 a 1000

18.8.2 Efectos de desplazamiento

La presencia de la capa límite produce un efecto de desplazamiento sobre el flujo no viscoso, de manera que todo ocurre desde el punto de vista del flujo másico como si la altura de la garganta $h = d_g/2$ fuera reducida por el espesor de la capa límite en ella, δ^* .

La reducción de flujo másico que resulta es: $\frac{\delta \dot{m}}{\dot{m}} = -\frac{2\pi h \delta_g^*}{\pi h^2} = -4 \frac{\delta_g^*}{d_g}$ y, por consiguiente, el coeficiente de caudal deviene:

$$C_D = C_{DK} \left[1 - 4 \frac{\delta_g^*}{d_g} \right] = C_{DK} \cdot C_{D\delta}, \quad \text{con} \quad C_{D\delta} = 1 - 4 \left(\frac{\delta^*}{d} \right)_g$$

El factor C_{DK} tiene en cuenta únicamente los efectos de curvatura, y $C_{D\delta}$ traduce los efectos de viscosidad. En principio, δ^* debe ser calculado por integración de la ecuación de Karman a partir de las condiciones iniciales δ_0^{**} , en principio difíciles de precisar en la práctica.



Recuérdese que entre δ^{**} y δ^* hay una relación de semejanza $\frac{\delta^*}{d_g} = Re_{g,0}^{-1/G} \cdot F_1\left(\frac{x}{d_g}\right)$ donde F_1 es una función universal para una familia de toberas dada y condiciones térmicas $(T_p/T_0)f(x/d_g)$ dadas.

De hecho, en una pared adiabática, $T_p = T_f$, el valor de δ^* en la garganta (δ_g^*) no depende prácticamente más que del gradiente de presión en la región sónica, es decir del parámetro d_g/R_g , y es poco sensible tanto a δ_0^{**} como a la longitud de la convergencia. En estas condiciones $F_{1,g}$ se puede expresar en función de $d_g/R_g = 2h/R_g$. De esta manera, el coeficiente de caudal adopta la forma:

$$C_{D\delta} = 1 - 4 \cdot Re_{g,0}^{-1/G} \cdot F_{1,g} \quad (18.47)$$

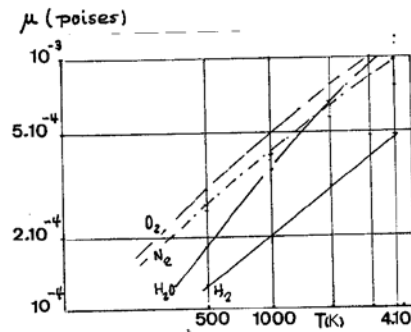
La figura 18.25 da los valores del coeficiente de viscosidad μ_0 para diversas especies químicas que son necesarios para el cálculo de $Re_{g,0}$.

Los resultados se muestran en la tabla 18.1

Tabla 18.1

d_g/R_g	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{1 - C_{D\gamma}}{Re_{g,0}^{-1/G}}$	0,089	0,068	0,056	0,050	0,042	0,037	0,034

Fig. 18.25.
Variación de la viscosidad de varios gases de combustión en función de la temperatura [PR85]



A la vista de la figura 18.20 se constata que para toberas de paredes en la garganta casi adiabáticas, continuas, el coeficiente de caudal es máximo para valores de $(d/R)_g$ del orden de 0,3 a 0,4, lo que lleva a elegir tal valor para una tobera patrón.

Habida cuenta que los valores usuales de $Re_{g,0}$ se sitúan entre 10^6 y 10^7 a escala real, el efecto de la viscosidad sobre el caudal se traducirá como mínimo por una reducción del orden de 0,5%.

Pirumov y Roslyakov^[PR85] proponen para el cálculo del cambio del coeficiente de caudal en términos del espesor de desplazamiento δ^* y del espesor de cantidad de movimiento δ^{**} de la capa límite, la siguiente expresión



$$\Delta C_D = 2\delta^{**} (r^*)^{-1} H, \quad H = \delta^* / \delta^{**}$$

Para una capa límite turbulenta en una superficie lisa, H se define mediante la expresión

$$H = \frac{9}{7} \left\{ \left[\overline{T}_w \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) + \frac{7}{9} \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right] - (1 - \overline{T}_w) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \overline{T}_w (1 + \overline{T}_w) \right] \right\}$$

18.8.3 Efectos de virial

En condiciones de presiones de remanso muy elevadas (del orden de 10 bar o superiores) y temperaturas (del orden de 50°C) el aire deja de comportarse como gas perfecto. Por ello, la ecuación de estado que debe aplicarse es: $P = Z(P, \rho) \cdot \rho RT$

El estudio de la expansión debe efectuarse entonces teniendo en cuenta los *coeficientes de virial* que intervienen en el desarrollo del coeficiente de compresibilidad Z en función de ρ

Los cálculos efectuados por Masure¹⁰, cuyos resultados se muestran en la figura 18.26, evidencian que el efecto de virial está lejos de ser despreciable. Si, por ejemplo, se ensaya una tobera en las condiciones $P_0 = 20 \text{ bar}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, se ve que la influencia sobre C_D es $\Delta C_D = +0,008$

A temperaturas elevadas y presiones moderadas, estos efectos desaparecen. Sólo cuando las medidas de C_D se llevan a cabo en un banco de ensayo en las condiciones habituales del aire comprimido ($T_0 < 100^\circ \text{C}$) es importante corregirlos para tener en cuenta los efectos de virial.

El conjunto de resultados numéricos representados en la figura 18.26 está bien ajustado por la fórmula:

$$C_{Dv} = 1 + 0,035 \cdot \frac{P_0 (\text{atm})}{T_0 - 210} \quad (18.48)$$

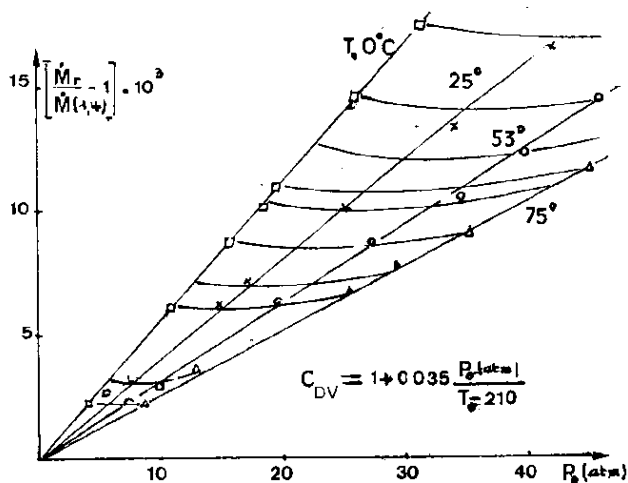


Fig. 18.26.
Efecto de virial
sobre el cálculo
del caudal de aire
de una tobera
[Car71]



18.8.4 Efectos de gas real sobre el coeficiente de caudal

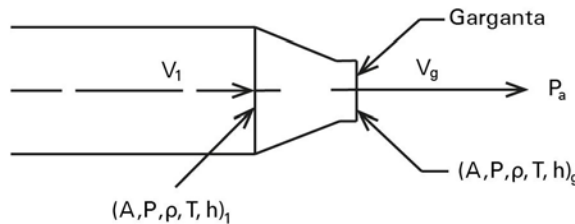
La fórmula (18.44) sólo se aplica si el gas que se expansiona es calóricamente perfecto. Un error de un 1% en γ entraña un error del mismo orden sobre; por consiguiente, sobre el caudal. El cálculo preciso exige conocer γ con una precisión de 0,001.

Si el gas es térmicamente perfecto, es decir si, puede ser suficiente tomar para el cálculo del caudal por la fórmula 18.38 el valor medio.

18.8.5 Efecto de disminución de la contrapresión sobre el flujo descargado por una tobera convergente con presión de entrada constante

Sea la tobera convergente representada en la figura 18.27. Cuando la contrapresión es igual o bien menor que la presión crítica, la tobera descarga el máximo flujo másico, el crítico.

Fig. 18.27.
Tobera
convergente



Ello se debe al hecho de que cualquier perturbación en el flujo después de la garganta de la tobera no puede propagarse corriente arriba; el flujo se comporta como si no hubiera ocurrido ulterior reducción de la contrapresión.

Por otra parte, los experimentos muestran que la forma del chorro que descarga de una tobera convergente es diferente dependiendo de si la contrapresión es superior o inferior a la presión crítica; cuando es igual o superior, el chorro sale como una corriente paralela cilíndrica; cuando es menor, el chorro se expansiona a medida que descarga de la tobera. En este caso la presión del gas en el chorro que deja la tobera es la crítica, mayor que la contrapresión, de suerte que la brusca disminución de presión causa la expansión del chorro de gas de forma explosiva (formación periódica de ondas estacionarias que ondulan la superficie del chorro).

18.8.6 Efecto del incremento de la presión de entrada en una tobera convergente con contrapresión constante

A medida que la presión de remanso de entrada P_0 supera el valor de la contrapresión, el flujo es inicialmente subsónico y la presión en la sección de descarga es igual a la contrapresión (presión ambiente). Cuando el valor de la presión de remanso de entrada es tal que la presión de descarga es la crítica, todo aumento de la presión de entrada no tiene efecto sobre la relación de presión. Entonces, la presión del gas en la sección de descarga (garganta) es igual a $0,5828P_0$. En estas condiciones, el caudal crítico está dado por

$$\dot{V}^* = \dot{m}^* / \rho^* = A_g \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} (\gamma R T_0)^{1/2} \quad (18.49)$$

18.8.7 Efectos del flujo multidimensional

En realidad, el supuesto de flujo unidimensional considerado en los anteriores subapartados es una idealización; las propiedades del flujo real no son uniformes en toda la sección recta normal a la dirección del vector velocidad del gas en la línea central de la tobera, especialmente si la pared de la tobera forma un gran ángulo con su plano meridional.

Por otra parte, la cantidad de movimiento radial, hacia el interior de la corriente, debida a la convergencia del contorno de la tobera, causa la formación de una *vena contracta* corriente abajo de la sección de descarga, cuya área de sección recta puede llegar a ser considerablemente menor que el área de salida de la tobera. Como resultado de este y el anterior efecto, el flujo másico de la tobera es menor que el definido por el modelo de flujo unidimensional. El efecto de la no uniformidad del flujo sobre el flujo másico de la tobera se tiene en cuenta mediante un coeficiente de descarga definido por

$$C_{D,nu} \equiv \dot{m}_{real} / \dot{m}_{unidimensional}$$

18.8.8 Efectos térmicos sobre las paredes

Aquí se considera únicamente el caso de paredes refrigeradas a las que se impone una temperatura T_f . El problema es entonces evaluar el flujo de calor en cada punto de la tobera a fin de poder dimensionar el sistema de refrigeración.

Conocidos $T(x)$ y las características del flujo en la frontera de la capa límite, se calcula $\delta^{**}(x)$ y $C_f(x)$. En virtud de la analogía de Reynolds, se tiene $C_h(x) = (1/2)C_f f(Pr)$. Entonces, el flujo de convección se obtiene mediante la expresión $q_p = (\rho u)_e C_h (h_f - h_p)$ donde h_f es la entalpía de recuperación, función de la temperatura del fluido, y h_p la entalpía de los gases en la pared.

Por otra parte, el flujo de radiación de los gases calientes es $\varepsilon_g \sigma T_e^4$ y el de radiación desde la pared al gas $\varepsilon_p \sigma T_p^4$, luego el flujo de calor que recibe la pared es

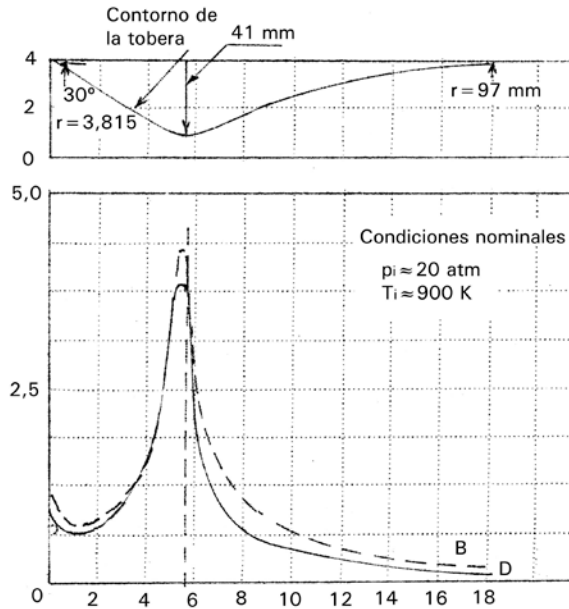
$$q_p = (\rho u)_e C_h (h_f - h_p) + \sigma (\varepsilon_g T_e^4 - \varepsilon_p T_p^4) \quad (18.50)$$

En general, los flujos de calor por radiación son despreciables hasta una temperatura de 2000 K y, dado h_p , el producto $C_h (h_f - h_p)$ varía muy poco a lo largo de la tobera. Así pues, la variación del flujo está gobernada por el producto $(\rho u)_e$ cuyo máximo corresponde a la garganta, tanto mayor cuanto menor es su radio de curvatura.

La figura 18.28 muestra los resultados de cálculo, por el método de Eckert, del flujo de calor en una tobera de turborreactor y los valores medidos por Bartz¹¹. El método de Eckert consiste en considerar la capa límite de flujo compresible igual a la del flujo incompresible para una temperatura T media uniforme, función de T_p, T_f y T_e .



Fig. 18.28.
Cálculo de la
medida de flujo
dentro de una
tobera de
turborreactor según
B. Bartz, D. Ecker
[Car71]



(Ver [Ca66])

18.9 Tipos de tobera

Entre las muchas y diversas aplicaciones de las toberas aquella que merece particular atención es la que forma parte muy importante de cualquier motor de propulsión por chorro. Tanto en la aplicación aeronáutica como en astronáutica, su grado de perfección influye mucho en las prestaciones de aviones y de cohetes. En el caso, p. ej., de lanzaderas de satélites, un aumento del empuje específico significa sea una altitud orbital mayor, sea una mayor capacidad de carga transferida a una órbita fijada.

El diseño de toberas mediante aproximaciones de flujo unidimensional permite calcular el impulso y el flujo másico de tobera con una precisión del orden del 5%.

Sin embargo, por razones económicas, entre otras, se debe asegurar una precisión de orden de magnitud mayor: las características integrales de flujo deben ser definidas con un precisión de 0,1%, y las características locales con una exactitud no menor que 0,5%.

A los efectos de lograr óptimas prestaciones de una tobera, el correcto diseño de todas sus partes, subsónica, transónica y supersónica (difusor) es fundamental, pero quizá sean las partes subsónica y transónica las más críticas. Para su análisis se las caracteriza por la longitud de la parte subsónica l_0 , los radios de curvatura R_2 y R_2^0 del contorno cerca de la garganta en sus lados sub y supersónico respectivamente, el ángulo de inclinación de su parte cónica θ_0 , el radio de acuerdo de las partes cónica y cilíndrica R_1 , el radio de la garganta r_g y el radio de la sección transversal inicial r_0 fig.(ver figura 18.29).

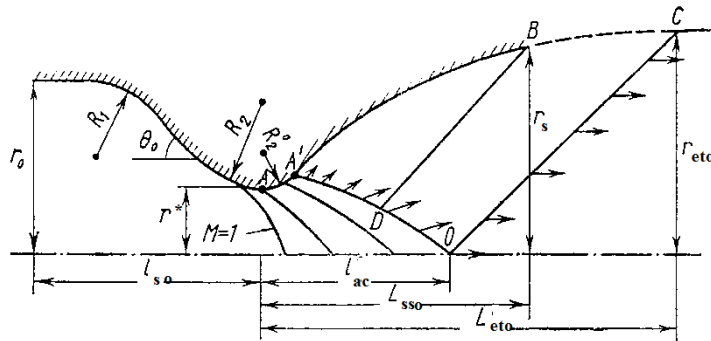


Fig. 18.29.
Esquema de
media tobera De Laval.
AA' O y A' OC son las
partes de
aceleración y de endere-
zamiento del flujo,
respectivamente
[PR85]

Por su considerable importancia, se comentan a continuación las peculiaridades geométricas y de flujo de la zona de transición.

18.9.1 Tobera con superficie de transición rectilínea

Este tipo de tobera encuentra su principal aplicación en túneles de viento y motores de propulsión por chorro, aunque en este caso no es conveniente cuando la parte subsónica de la tobera es más bien larga. En estos casos, el perfilado de la parte supersónica de la tobera no depende del de la parte subsónica, dado que una línea sónica recta es simultáneamente una característica de las familias primera y segunda (véase Anexo). Especificar a priori el contorno de una tobera que asegure una línea sónica recta es prácticamente imposible pues tanto el contorno de tobera como todas las líneas de corriente en la misma deben tener primera, segunda y tercera derivadas nulas.

Para calcular la línea de transición en el caso de flujos planos y axisimétricos, es necesario y suficiente especificar en el eje de simetría una distribución de velocidad con una primera derivada nula en el punto sónico

Pirmov y Roslyakov^[PR85] analizan el flujo en tobera con línea sónica rectilínea por resolución del problema inverso con la velocidad especificada en el eje de la tobera en la forma

$$W = W_{\infty} + (1 - W_{\infty})(1 + Ax^2)^{-1} \quad (18.51)$$

donde W es el valor absoluto de la velocidad del gas referida a la velocidad crítica del sonido a^* , y W_{∞} es el valor asintótico de la velocidad en el infinito, en la zona subsónica.

De los resultados obtenidos se desprenden varias conclusiones, entre ellas:

- El flujo en la región $W > 0,2$ y $\psi > 0,02$ se desvía considerablemente del calculado por el método unidimensional.

(ψ , función de corriente definida por la ecuación $d\psi = \rho W y^v (dy \cos \theta - dx \sin \theta)$)

donde v es igual a cero en flujos planos e igual a uno en flujos axisimétricos, y θ es el ángulo del vector velocidad respecto al eje x)

- Las líneas de corriente cerca de la línea sónica son casi paralelas al eje
- A pesar de la presencia de un gran gradiente positivo de presión en la región transónica, la capa límite no se separa.



Por otra parte, si la velocidad en el eje de simetría está especificada por la ecuación

$$W = W_{\infty} + (1 - W_{\infty}) \left(1 + A|x|^3\right)^{-1} \quad (18.52)$$

se forma una zona local supersónica en el campo de flujo.

18.9.2 Tobera con una superficie curvilínea de transición

Si la derivada dW/dx no es cero en el centro de tobera, entonces la superficie de transición es curvilínea y las partes subsónica y supersónica de la tobera se deben calcular simultáneamente.

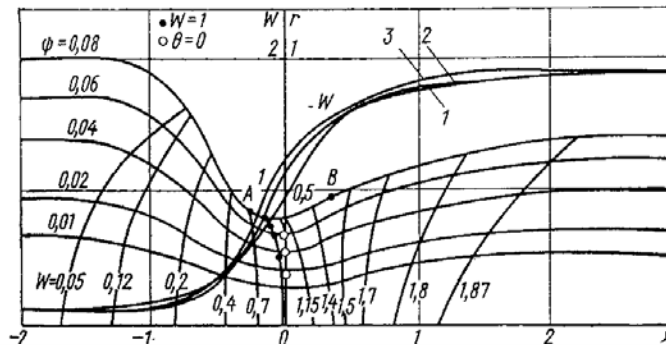
Sea una tobera en la que la distribución de velocidad a lo largo de su eje de simetría está dada por la ecuación

$$W = 1 + \frac{(1 - W_{\infty})(\overline{W}_{\infty} - 1)(e^{bx} - 1)}{(1 - W_{\infty})e^{bx} + (\overline{W}_{\infty} - 1)} \quad (18.53)$$

donde W_{∞} , \overline{W}_{∞} son los valores asintóticos de la velocidad del gas en el infinito en las regiones subsónica y supersónica, y el parámetro b es proporcional a la derivada de la velocidad en el centro de tobera

La figura 18.30 muestra el flujo típico en una tobera De Laval con una superficie de transición curvilínea. Se observa que para $\Psi > 0,01$ el flujo difiere sustancialmente del unidimensional, tanto en la región subsónica como en la supersónica, y las dos líneas, sónica y $\theta = 0$, se encuentran desplazadas corriente arriba del centro de tobera de tal manera que el punto sónico en el contorno se desplaza corriente arriba a partir de la garganta. La configuración de las líneas $W = cte$ está definida por la curvatura de las líneas de corriente y, en particular, del contorno de tobera. La inclinación de estas líneas cambia cerca de los puntos donde la curvatura de la línea de corriente cambia (puntos A y B en la figura 18.30).

Fig. 18.30.
Campo de flujo en
una tobera con
línea sónica curvi-
línea [PR85]



Se ha encontrado que el parámetro que tiene mayor influencia sobre el flujo en la región transónica es el radio R_2 (ver figura 18.29). El valor del exponente adiabático también tiene influencia sobre el valor del parámetro P/P^* , no sobre W , del flujo en las regiones subsónica y supersónica.



La dependencia de algunos parámetros de dinámica de gases respecto de R_2 y γ está representada en la figura 18.31.

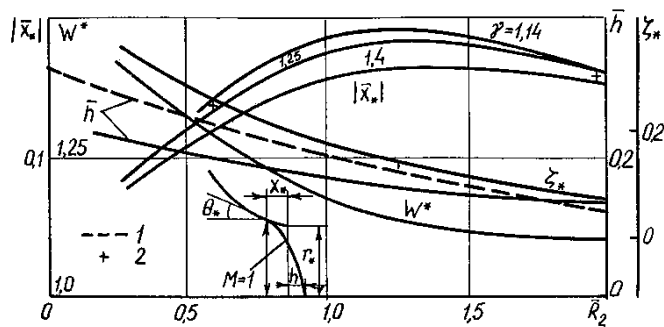


Fig. 18.31.
Efectos de \bar{R}_2 y γ sobre las abscisas en el eje y en el contorno, y el valor de la velocidad W^* en el contorno de la garganta, el ángulo de pared en el punto sónico ($\zeta^* = \tan \theta^*$)

La figura 18.32 muestra la forma de línea sónica para toberas con diferente valor de $\bar{R}_2 = R_2 / r^*$.

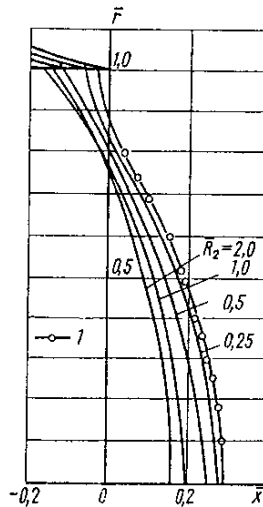


Fig. 18.32.
Líneas sónicas en una tobera con diferente \bar{R}_2

Las partes subsónica y supersónica de una tobera de motor de propulsión por chorro se perfilan de tal manera que esté asegurada la ausencia de separación en todo el campo de flujo y tengan mínima pérdida total de impulso en una longitud mínima de tobera. A partir de los estudios realizados se concluye que siempre que $\bar{R}_2 > 0,5$ no aparecen zonas de deceleración y, por ello, no ocurre ninguna zona de separación en la parte transónica de toberas axisimétricas.

Por otra parte, la ausencia de separación cerca del punto de acuerdo de las partes cilíndrica y convergente en el tramo subsónico de una tobera está asegurada si $R_1 > r_0$ y $\theta_0 \leq 40^\circ$, a pesar de la existencia de zonas locales de deceleración.

El valor óptimo de \bar{R}_2 de una tobera moderna se encuentra en el intervalo 0,8-1,2.

(Ver [PR85] y [Ca71])

18.10 Toberas no convencionales

Las toberas convergentes- divergentes de perfil continuo presentan pérdidas de empuje considerables si funcionan sobreexpandidas. En muchos turborreactores este modo de funcionamiento se realiza siempre, en virtud de la relación de compresión disponible, al principio de la fase de aceleración para franquear el dominio transónico. Par evitarlo, se han investigado otras formas de tobera, entre ellas las de cuerpo central y las toberas ventiladas.

Otra imposición de los turborreactores de última generación es la necesidad de poder adaptar la tobera a diferentes regímenes de vuelo, así como permitir la introducción momentánea de un recalentamiento; es decir: disponer de un cuello de salida regulable. La solución generalmente adoptada consiste en constituir dicho cuello mediante aletas articuladas. Estas permiten crear, cuando son maniobradas, una discontinuidad de perfil entre su borde de fuga y la entrada de la divergencia. Además, cuando se dispone de un flujo secundario importante, puede convenir evacuarlo en la tobera principal, justo corriente abajo de las aletas móviles. Entonces, la confluencia y la mezcla de los dos flujos en la divergencia plantea algunos problemas de principio.

A continuación se describen someramente algunas toberas especiales.

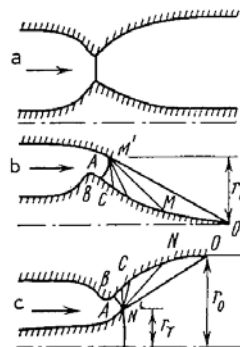
18.10.1 Toberas anulares

Las toberas anulares presentan las ventajas de ser más cortas que las circulares axisimétricas y permitir obtener grandes empujes en condiciones operativas distintas de las de diseño.

Por otra parte, modificando elementos de una tobera anular se pueden obtener varios tipos de toberas axisimétricas con garganta anular; por ejemplo, las denominadas “tipo disco” y también toberas con cuerpo central, toberas con una pared superior rectilínea, etc.

Las toberas anulares difieren en la inclinación de la garganta, que puede ser cero, negativa o positiva (ver figuras 18.33a, 18.33b y 18.33c). Las no inclinadas se subdividen, a su vez, en tres grupos: de expansión externa, interna y doble expansión.

Fig. 18.33 a,b y c.
Tres tipos de
tobera anulares Vista
de media tobera. Línea
de trazos: eje de tobera
[PR85]



El diseño de toberas anulares que generan el máximo empuje con mínima longitud se basa en los mismos fundamentos del diseño de toberas circulares axisimétricas. A título de ejemplo, se describe someramente el método de cálculo de toberas anulares con doble expansión y puntos esquina (ver figura 18.34).

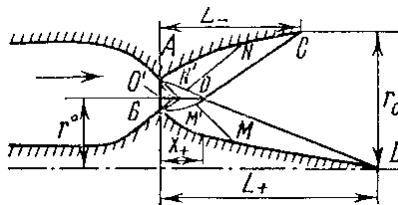


Fig. 18.34.
Tobera anular de doble
expansión y puntos es-
quina [PR85]

En primer lugar, para calcular el flujo de rarefacción axisimétrico se utiliza el método de las características (Véase el Anexo). El cálculo prosigue a lo largo de características de la primera familia en la región de la onda $O'BO$ y a lo largo de las características de la segunda familia en la región de la onda $O'AO$. Cada característica termina en el punto donde el ángulo de inclinación del vector velocidad es cero. El cálculo da las coordenadas de la línea de corriente, la línea en la que $\theta=0$ y los parámetros de dinámica de gas a lo largo de las líneas. Entonces, se traza otra característica uniforme OC a partir del punto O que satisface, como en las anteriores, la condición de igualdad de flujo a través de OC y de AO . A continuación, se resuelve el problema de Goursat en el espacio entre las características OD, OB y OC, AO y se obtiene la familia de líneas de corriente, en particular los contornos superior e inferior de la tobera.

Los cálculos exactos del flujo en toberas anulares confirma el carácter plano del flujo en ellas. En las regiones AOC y BOD de toberas anulares el flujo es próximo al tipo de Prandtl-Meyer. Las características NN' y MM' son casi líneas rectas de modo que los parámetros de dinámica de gases a lo largo de ellas solo cambian ligeramente.

Acreditado el carácter plano del flujo en una tobera anular está permitida la aplicación del método aproximado de características rectilíneas por el que los parámetros de flujo en las características que pertenecen a ambas familias se suponen constantes mientras que la naturaleza axisimétrica del flujo se tiene en cuenta por medio de la ecuación del caudal por unidad de longitud ψ . En particular, las coordenadas del contorno superior de la tobera están definidas, p. ej. para el punto N , por

$$r_N^2 = r_{N'}^2 + \frac{(\psi^* - \psi_{N'}) \sin(\alpha_{N'} + \theta_{N'})}{q(M_{N'}) \sin \alpha_{N'}} \quad (18.54)$$

$$x_N = x_{N'} + (r_N - r_{N'}) \cotan(\alpha_{N'} + \theta_{N'}) \quad (18.55)$$

mientras que las coordenadas del contorno inferior, p. ej. del punto M , están definidas por

$$r_M^2 = r_{M'}^2 - \frac{\psi_{M'} \sin(\alpha_{M'} - \theta_{M'})}{q(M_{M'}) \sin \alpha_{M'}} \quad (18.56)$$

$$x_M = x_{M'} - (r_M - r_{M'}) \cot g(\alpha_{M'} - \theta_{M'}) \quad (18.57)$$

En estas ecuaciones ψ es el flujo de gas a través de la garganta, y $\psi_{N'}, \psi_{M'}$ son los flujos de gas a través de los segmentos de característica AN' y BN' . Los valores de α y de θ en los puntos M y N se suponen iguales a los correspondientes valores en los puntos M' y N' .



La especificación del número de Mach M_0 y de los radios r_0 y r_T facilita la determinación de las coordenadas de los contornos de las toberas de los tipos b y c. El flujo se calcula corriente arriba de la característica AO hasta que se alcanza la velocidad sónica en el punto esquina. El contorno de tobera se determina como línea de corriente con caudal igual al que atraviesa la característica AO .

Para determinar aproximadamente las coordenadas de un contorno se pueden utilizar las ecuaciones 18.54 a 18.57 suponiendo que los puntos N' y M' corresponden al punto A en el que los valores de α y de θ están relacionados por las ecuaciones:

$$d\theta \pm \frac{\cotg \alpha}{\rho W^2} dp = 0; \quad d\theta \mp \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} dM = 0 \quad (18.58)$$

El valor de $\Psi^* - \Psi_N$ en la ecuación 18.54 puede ser sustituido por $(r_0^2 - r_T^2)q(M_0)$ y el valor de Ψ_M en la ecuación 18.56 por $r_0^2 q(M_0)$, donde

$$q(M_0) = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{1/(\gamma - 1)} M_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (18.59)$$

Ahora, variando el valor de α entre los límites $\alpha_0 = \arcsen M_0^{-1}$ y $\alpha = \pi/2$ se pueden determinar las coordenadas del contorno y los valores de los parámetros en él. En la figura 18.35 se comparan los resultados obtenidos por el método exacto de las características y los que resultan del método aproximado de características rectilíneas.

Fig. 18.35.
Toberas anulares con
puntos
esquina
desplazados [PR85]

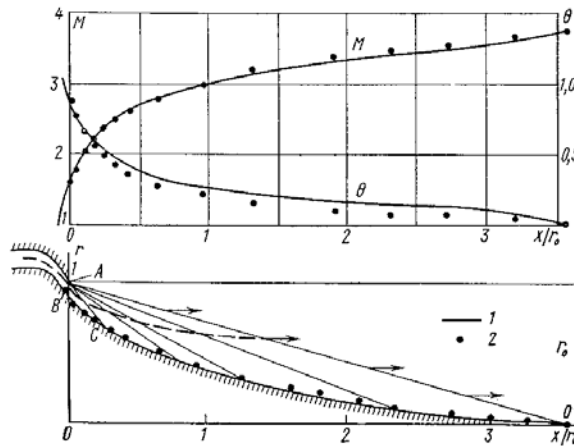
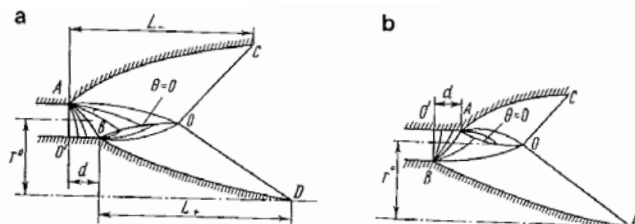


Fig. 18.36.
Contorno del
cuerpo central de
una tobera anular
y distribución de
M y de θ a lo
largo del contorno
[PR85]





Las longitudes de los contornos superior e inferior L_- y L_+ de la tobera, figura 18.36a, están definidas en función del número de Mach de estancamiento M_0 , que en este caso corresponde a la garganta, por las ecuaciones siguientes:

$$L_+ = r^0 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - q(M_0)}}{q(M_0)} + \sqrt{M_0^2 - 1} \right] \quad (18.60)$$

$$L_- = r^0 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - q(M_0)}}{q(M_0)} + \left(\frac{r_0}{r^0} - 1 \right) \sqrt{M_0^2 - 1} \right] \quad (18.61)$$

En las ecuaciones anteriores r^0 es el radio de una sección isobárica en la que el número de Mach de estancamiento es M_0 .

Ahora se puede calcular la relación r_0 / r^0 mediante la ecuación del caudal en la mitad superior de una tobera circular. Su valor es:

$$\frac{r_0}{r^0} = \left\{ 1 + \frac{2}{q(M_0)} \left[1 - \sqrt{1 - q(M_0)} \right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - q(M_0)} \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (18.62)$$

En $M_0 \rightarrow \infty$ se tiene $(r_0 / r^0) \rightarrow \sqrt{2}$

Comparando longitudes de toberas distintas pero con idéntica área de garganta y mismo número de Mach M_0 resulta que una tobera anular con dos puntos esquina que están situados en el mismo plano y que generan un flujo paralelo uniforme en la salida permite acortar una tobera central en comparación a una convencional axisimétrica con un punto esquina, al menos $\sqrt{2}$ veces. Al mismo tiempo, la longitud del contorno superior de una tobera anular se acorta en comparación al de una tobera convencional axisimétrica aproximadamente de 3 a 3,5 veces.

Por otra parte, el desplazamiento de los puntos esquina una distancia d permite que se puedan obtener diferentes valores de M_0 en un lugar fijado de la abertura circular.

A partir de simples consideraciones teóricas se deduce que el máximo acortamiento de la longitud de una tobera anular en comparación al de una tobera axisimétrica convencional se alcanza en $L_+ = L_-$. En este caso, la longitud de una tobera anular es aproximadamente dos veces más corta que la correspondiente de una tobera axisimétrica convencional, y el radio medio de la sección crítica es dos veces menor que el radio de la sección de salida.

18.10.2 Toberas de cuerpo central

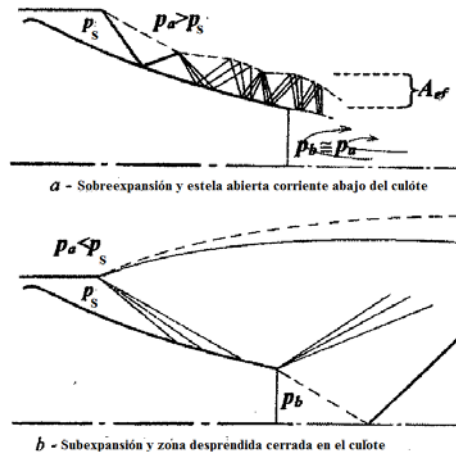
A fin de disponer del máximo empuje cualquiera que sea la presión exterior, es necesario, fijada la presión de cámara, que una tobera pueda regular su relación de expansión a través de la variabilidad de su relación de secciones. Como quiera que una variación mecánica continua de la relación A_s / A_g es inviable en el caso de las toberas axisimétricas, se concibió el tipo de tobera auto-adaptable. El principio de una tobera auto-adaptable es recuperar el efecto propulsor de la expansión de los gases sobre



un cuerpo central incrustado en la tobera propiamente dicha. La auto-adaptación resulta del hecho que la frontera externa del chorro se ajusta en función de la presión exterior P_a . El beneficio de las toberas de cuerpo central respecto a las toberas clásicas aparece en los regímenes de sobreexpansión. En condiciones de fuerte sobreexpansión, figura 18.37a, por el hecho de la adaptación de la frontera externa, el chorro es canalizado a través de una sección eficaz A_{ef} variable según la presión exterior. Una tobera de cuerpo central funciona pues con una relación de secciones eficaz A_{ef} / A_g que se adapta en función de la presión exterior. De ello resulta una expansión auto-controlada de los gases propulsores, lo que explica el hecho de que no hay desprendimiento del chorro sobre el cuerpo central.

Por razones de optimización de la relación empuje/peso (aviones, lanzaderas, etc.) el cuerpo central es truncado lo que da lugar a la existencia de una región de culote interna que es preciso analizar para estimar la contribución en términos de arrastre. Según sea la presión exterior o la relación de expansión, dos son los regímenes de flujo que pueden aparecer en la región de culote de las toberas de cuerpo central truncado. Si la presión exterior es relativamente alta o bien la expansión en la tobera es grande, el flujo corriente abajo del culote no se puede recoger sobre sí mismo, lo que crea una estela abierta en conexión con el exterior a la presión P_a . Si la presión exterior es baja, el flujo se recoge sobre sí mismo, creando una zona cerrada donde reina una presión P_b diferente de P_a (ver figura 18.37b).

Fig. 18.37 a y b.
Regímenes no adaptados de una tobera de cuerpo central truncado⁵



Herbert¹² puso a punto la aplicación de este tipo de tobera a un avión supersónico. El principio de funcionamiento es el siguiente:

En vuelo de crucero

La expansión se efectúa entre un cuerpo central y un carenado externo, por ej, cilíndrico (ver figura 18.38). El labio L del carenado se coloca de manera que la presión de salida del chorro sea allí justo igual a la presión P_∞ del flujo externo. El punto P del cuerpo central está situado de tal manera que LP sea una línea de Mach de la corriente



saliente. El perfil del cuerpo central puede ser calculado por el método de las características con la condición de que el chorro sea uniforme y paralelo al eje corriente abajo de LP .

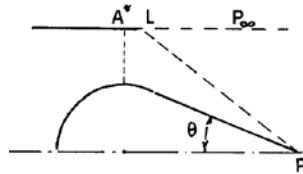


Fig. 18.38.
[Car71]

En la práctica basta con tomar un perfil cónico de ángulo θ . Si este ángulo es suficientemente pequeño, la corriente saliente es sensiblemente paralela y en estas condiciones el empuje es muy próximo del de una tobera clásica adaptada.

En régimen intermedio

El carenado es retirado hacia atrás de manera que en el labio L la presión del chorro permanezca igual a la presión P_∞ con lo que el chorro se acopla continuamente con la corriente exterior (ver figura 18.39).

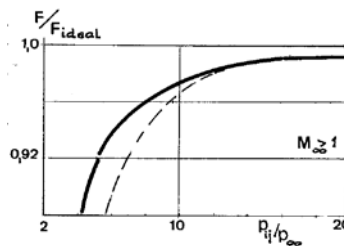


Fig. 18.39.
[Car71]

Las ondas de expansión salidas del cuerpo central y que encuentran la línea del chorro se reflejan en ondas de compresión: el chorro se curva primero hacia el eje y después tiende a devenir paralelo al eje al nivel de P .

En vuelo supersónico

En vuelo supersónico por debajo del número de Mach de adaptación el flujo de revolución exterior se expande a partir de L , de manera que la presión media que se establece sobre la punta exterior del cuerpo central es inferior a P_∞ ; de ello resulta una cierta pérdida de empuje, netamente menos considerable que en una tobera clásica.

Las figuras 18.40 y 18.41 muestran la relación F/F_{ideal} , o sea el cociente entre el empuje efectivo y el empuje de una tobera isentrópica adaptada, en función de la relación de presiones P_{ij}/P_∞ , donde P_{ij} es la presión de remanso de aquella tobera.

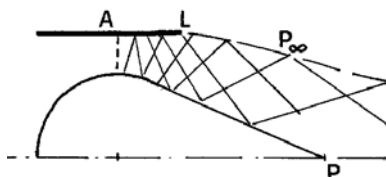


Fig. 18.40.



El dimensionamiento de la tobera se realizó para una relación de presión de 20 y un ángulo de 15° . En la figura 18.41 se muestra a título de comparación la misma relación para una tobera cónica clásica ($\theta = 10^\circ$).

Se constata que la tobera de cuerpo central es considerablemente más ventajosa que la tobera clásica para los valores de la relación de presiones menores que en régimen de adaptación.

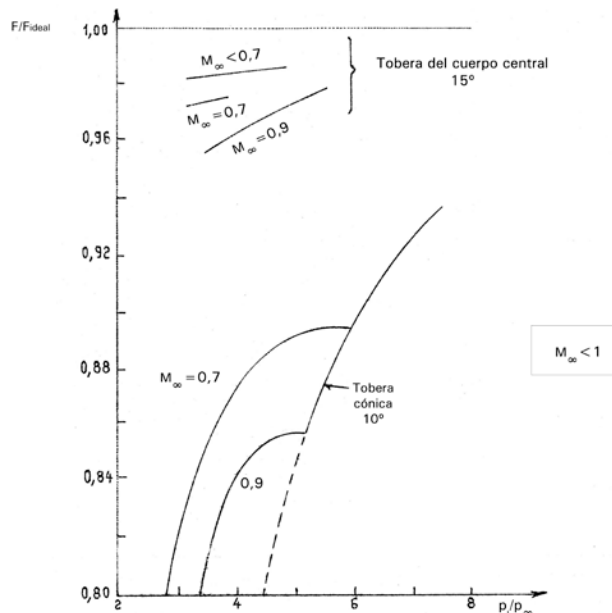
En vuelo subsónico esta ventaja es todavía más acentuada, ya que los valores de P_{01}/P_∞ son mucho menores que en vuelo supersónico. En las curvas de la figura 18.41 se muestra que entonces la tobera de cuerpo central presenta ganancias del orden del 10% respecto de la tobera clásica, lo que es muy considerable.

Se ve pues que sobre bases teóricas la tobera de cuerpo central aporta una solución favorable a los problemas de adaptación a regímenes de vuelo variados.

Las dificultades prácticas de este sistema provienen:

- del montaje del cuerpo central, que impone soportes que atraviesan toda la corriente arriba del cuello, lo que implica pérdidas de carga y, por lo tanto, pérdidas de empuje
- del enfriamiento del cuerpo central, que impone engrandecer los soportes para que sirvan a manera de conductos de ventilación. Este aire de ventilación debe ser distribuido después en el cuerpo central y evacuado. Las pérdidas de carga de este circuito secundario complicado son a la fuerza muy elevadas, por lo que el balance de propulsión de este aire secundario es desfavorable
- de la complicación del sistema de adaptación dimensional del cuello, a cuyo fin se necesita ubicar en el interior o en el exterior del carenado los mecanismos de accionamiento de las aletas

Fig. 18.41.
[Car71]



En un avión supersónico, el empleo de un cuello ajustable por aletas móviles crea al nivel del mismo una discontinuidad del perfil que parece natural aprovechar para inyectar el aire que proviene sea de una trampa en la capa límite, sea de una derivación, sea de enfriamiento del motor.

Considérese una tobera cuya configuración básica es la representada en la figura 18.42.

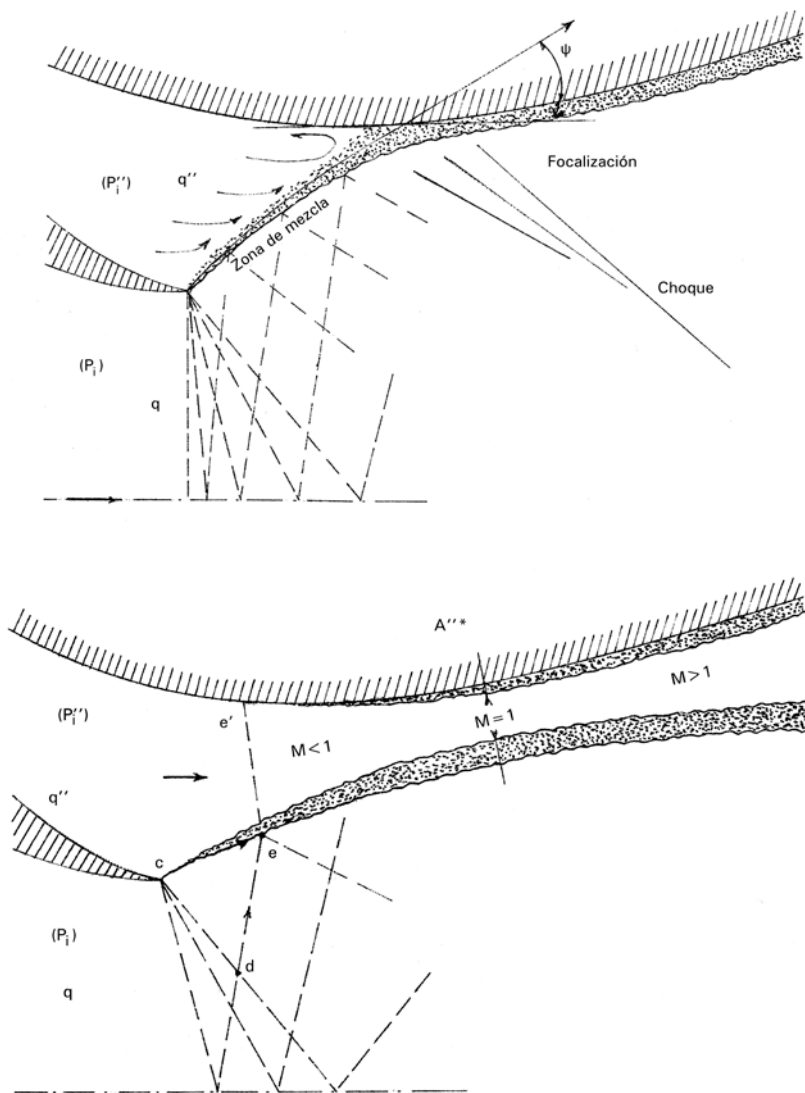


Fig. 18.42.
Toberas de doble
flujo [Car71]



A priori son posibles dos modos de funcionamiento:

- a. El flujo secundario inyectado es bastante débil por lo que su velocidad se puede despreciar fuera de la zona de mezcla con el chorro principal. Para el análisis del proceso de arrastre basta adoptar una presión P'' para el aire secundario a fin de que la línea de chorro isobara que sale del borde de fuga de las aletas sea determinada y calculada por el método de las características. Esta línea encuentra la pared de la divergencia en R bajo un ángulo ψ .

El criterio de re-adherencia aporta el coeficiente C_m y, a partir de él, el flujo másico de aire secundario arrastrado, m_m'' , por la zona de mezcla.

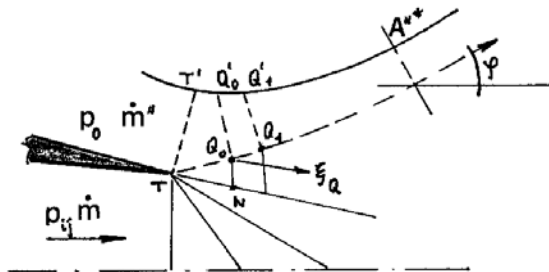
Se puede así trazar para valores crecientes de P'' la característica (P'', m_m'') de arrastre del aire secundario.

- b. En este caso, las velocidades del aire secundario dejan de ser despreciables con lo que el proceso de arrastre viscoso pierde su importancia. El método de cálculo consiste entonces en la determinación simultánea, paso a paso, de la línea de chorro, por el método de las características, y de la expansión isentrópica unidimensional del aire secundario entre la pared y la línea de chorro. (ver figura 18.43).

A tal fin, supuestas a priori la presión generatriz P_0'' y el flujo másico m_m'' de aire secundario, se deduce, conocida el área de la sección atravesada por la corriente de aire secundaria de generatriz TT' , la presión P'' en el punto T , lo que determina la expansión inicial del aire primario de presión de remanso dada P_{ij} y, en particular, la dirección inicial ϕ_T de la línea de chorro en T . Se construye entonces aproximadamente el triángulo característico TQ_0N

y la condición característica $(k\eta)_N^{Q_0}$ da una relación entre ϕ_{Q_0} y P_{Q_0} . La presión P_{Q_0}' , impuesta por la corriente de aire secundario, determina la distancia Q_0Q_0' del chorro a la pared en cuyo extremo se deduce ϕ_{Q_0} lo que permite mejorar la posición de Q_0 . Este cálculo se repite hasta que se alcanza la convergencia. Hecho esto, se construye por el método general la característica ξ_{Q_0} que sale de Q_0 y se repite el proceso para encontrar un nuevo punto Q_1 de la línea de chorro.

Fig. 18.43.
[Car71]





Este proceso se prosigue hasta la sección A'' , donde el aire secundario alcanza la velocidad sónica. Simultáneamente, es necesario que el ángulo ϕ de la línea del chorro sea el de la pared. En general no es esto así, lo que significa que los valores de P_0'' , \dot{m}_m'' elegidos a priori son incompatibles.

Dos son los casos posibles. En el primer caso, el valor de P_0'' ha sido elegido demasiado pequeño y la expansión inicial supuesta ha resultado excesiva para el valor dado de \dot{m}_m'' .

En el segundo, \dot{m}_m'' ha sido elegido demasiado grande.

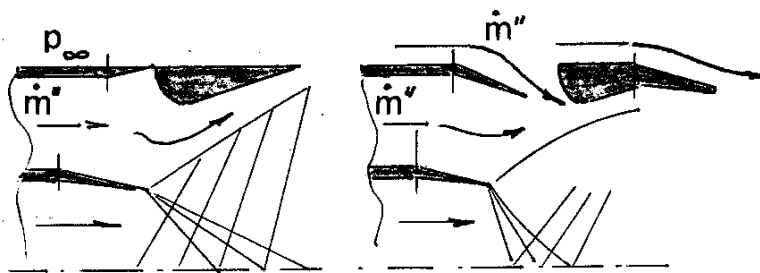
Se puede proseguir el cálculo más allá de A'' , donde el flujo secundario ha devenido supersónico, hasta la salida de la tobera.

En estos cálculos se ha despreciado por completo la viscosidad. Para tener en cuenta sus efectos, se ha de evaluar el espesor de desplazamiento de la capa límite de la corriente de aire secundario en contacto con la pared y sobre la línea de mezcla, y tener en cuenta de todo ello por un desplazamiento δ_c^* de la pared. El valor de dicho desplazamiento obtenido en A'' se utiliza para corregir el flujo másico \dot{m}_m'' de aire secundario, calculado sin efectos de viscosidad, asociado a la presión

18.10.4 Toberas ventiladas

El procedimiento consiste simplemente en habilitar al nivel de la garganta de la tobera, sobre el carenado exterior, puertas libremente articuladas hacia el interior (ver figuras 18.44a y 18.44b). En vuelo de crucero, la presión interna del aire secundario P'' es superior a la presión externa P_∞ y las puertas permanecen cerradas.

Fig. 18.44 a y b.



A partir del momento que disminuye la presión como consecuencia de la sobreexpansión - lo que ocurre a baja velocidad - las puertas se abren y el aire exterior se engolfa en la divergencia, lo que obliga al desprendimiento del chorro, evitando la sobreexpansión.

Se puede acentuar el efecto de soplado virando ligeramente hacia el interior las aletas de borde de fuga de la divergencia, lo que, a baja velocidad, aumenta la presión externa sobre la aleta.

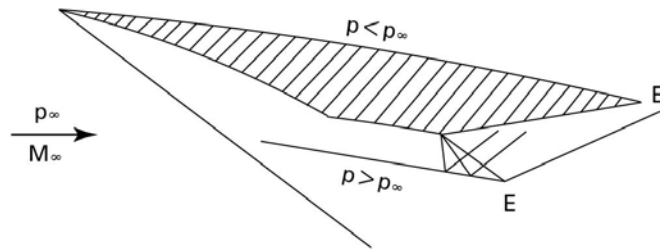


18.10.5 Toberas disimétricas para estatorreactores hipersónicos

La tobera de un estatorreactor para vuelo hipersónico está caracterizada por una sección de salida de dimensión muy grande que conviene integrar correctamente en el conjunto de la sección central del avión.

El lugar natural del motor bajo el intrados nos lleva a pensar en la disposición general representada por el esquema de la figura 18.45.

Fig. 18.45.

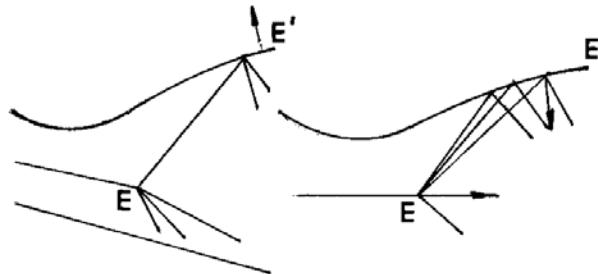


La tobera desemboca en E' sobre el extrados del ala y en E sobre el intrados por lo que la presión externa local será normalmente mucho más elevada en E que en E' . La adaptación conducirá pues a una tobera disimétrica más corta del lado del intrados.

Si el cono de Mach de E ocurre bastante corriente abajo de E' , los pequeños movimientos de cabeceo de la tobera no tienen efecto sobre el empuje interno.

En caso contrario, las variaciones de presión externa en E , crearán ondas de compresión y de expansión cuya reflexión sobre la pared superior corriente arriba de E' producirá dos fuerzas transversales, favorables o no según los casos (ver figuras 18.46a y 18.46b).

Fig. 18.46 a y b.



El cálculo de estas toberas por el método de las características no presenta dificultades particulares si es de tipo bidimensional o axisimétrica.

Tanto en un caso como en el otro se la puede deducir de una tobera normal por simple truncamiento.

Según el tipo de truncamiento, el empuje puede tomar direcciones muy variadas¹³ (ver figura 18.47).

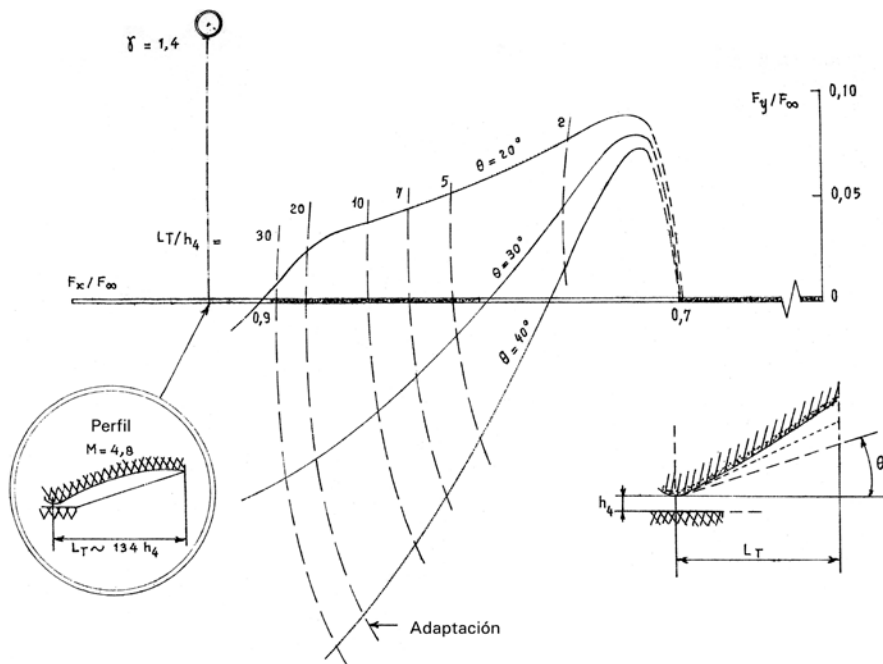


Fig. 18.47.
Tobera
axisimétrica.
Influencia de la abertura
y de la longitud sobre el
vector empuje
absoluto [Car71]

(Ver [Ca71])

18.11 Empuje de tobera

18.11.1 Empuje unidimensional intrínseco

Considérese un flujo, supuesto unidimensional y estacionario, por una canalización en la dirección x (ver figura 18.48). Suponiendo despreciables las fuerzas de gravedad y las viscosas, las únicas fuerzas que actúan sobre la masa de fluido contenida en un volumen de control elemental son las de presión y la de inercia, esta última dada por la expresión general: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

La condición de equilibrio se expresa:

$$dF + PA - [p \cdot A + dP \cdot A] = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \alpha_x \quad (18.63)$$

donde dF representa la fuerza axial ejercida por las paredes del conducto sobre el fluido y α_x es la aceleración del fluido en la dirección x .

Habida cuenta que $\alpha_x = \frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{dx}$ resulta $dF = \rho AV dV + d(PA)$ y como quiera que $\dot{m} = \rho AV$, se obtiene:

$$F_x \left(\frac{2}{1} \right) = (P_2 A_2 + \dot{m} V_2) - (P_1 A_1 + \dot{m} V_1) \quad (18.64)$$



En la ecuación 18.64, $F_x \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ representa la proyección sobre la dirección x del empuje de las paredes sobre el flujo entre las secciones 1 y 2 del conducto; es pues también el *empuje de la corriente sobre las paredes*, considerado positivo en la dirección opuesta a la del movimiento del fluido.

Las magnitudes entre paréntesis en la ec. 18.63 se pueden escribir así:

$$A(P + \rho V^2) = AI$$

donde la magnitud I recibe el nombre de *impulsión*.

Se concluye pues que el empuje de una corriente unidimensional estacionaria sobre un elemento de conducto de eje rectilíneo es igual y opuesto a la diferencia de flujo de impulsión saliente y entrante.

La fórmula 18.63 es válida incluso si hay rozamiento parietal, en virtud de como ha sido definido dF .

Otras expresiones de impulsión y empuje son las siguientes:

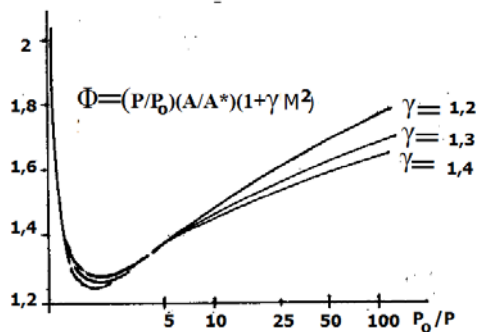
$$\text{Impulsión} \quad I = P(1 + \gamma M^2) \quad (18.65)$$

$$\text{Flujo de impulsión} \quad AI = P_0 A \left[\frac{P}{P_0} \cdot \frac{A}{A^*} (1 + \gamma M^2) \right] \quad (18.66)$$

$$\text{Función de empuje} \quad \varphi(M) = \varpi(M) \cdot \sum(M) (1 + \gamma M^2) \quad (18.67)$$

La función de empuje, que depende del valor de γ , sólo es aplicable con todo rigor a gases caloríficamente perfectos. La figura 18.49 muestra el valor de Φ en función de la relación de presión P_0 / P para varios valores de γ .

Fig. 18.49.
Función de empuje vs P_0/P



Por otra parte cuando M aumenta indefinidamente, Φ tiene un límite definido por $F_{\text{lim}} = \dot{m} V_{\text{lim}}$; o sea:

$$P_0 A^* \Phi_{\infty} = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{c_p T_0}} P_0 A^* V_{\text{lim}} \quad (18.68)$$

Luego
$$\Phi_{\infty} = \delta(\gamma)\sqrt{2}$$

Algunos valores de Φ_{∞} en función de γ son los siguientes;

γ	1,25	1,30	1,35	1,40
Φ_{∞}	2,0808	1,9644	1,878	1,8117

En principio, tanto el aire tomado por la tobera como los gases de combustión (en el caso de toberas para motor de propulsión a chorro) a la salida de la misma se pueden considerar como gases caloricamente perfectos; por lo tanto, la ecuación 18.63 se puede escribir en la forma:

$$F\left(\frac{2}{1}\right) = \left(P_0 A^*\right)_s \Phi\left(M_s, \gamma_s\right) - \left(P_0 A^*\right)_1 \Phi\left(M_1, \gamma_1\right) \quad (18.69)$$

En la ecuación 18.69, el primer término del segundo miembro representa la *resistencia de captación*, y el segundo término del mismo miembro es denominado impropriamente *empuje de tobera*.

El empuje definido recibe el nombre de *empuje intrínseco* o empuje que resulta de la única acción del flujo interno sobre las paredes de la tobera cualquiera que sean las condiciones exteriores siempre que no tengan influencia sobre el flujo: caso, p. ej., de una tobera supersónica que descarga en un ambiente a presión muy baja.

18.11.2 Empuje convencional

Cuando se haya de tener en cuenta el efecto de la presión P_a del ambiente en que descarga es necesario definir el *empuje convencional a la presión P_a* , que se expresa así:

$$F = A_s (P_s - P_a) + \dot{m}_s V_s \quad (18.70)$$

donde el subíndice s denota condiciones en la sección de descarga de la tobera.

Si la tobera está adaptada, es decir: $P_s = P_a$, entonces

$$F_{ad} = \dot{m}_s V_s \quad (18.71)$$

Esta última magnitud recibe el nombre de empuje convencional adaptado a la presión P_a .

18.11.3 Eficacia y coeficiente de empuje intrínseco

La eficacia de empuje intrínseco se define como la relación del empuje intrínseco efectivo al empuje intrínseco de una tobera ideal (es decir, perfectamente isotrópica) de idéntica relación de expansión y mismo flujo másico; o sea:



$$\eta_F = \frac{F_{ef}}{C_D P_0 A^* \Phi(M_s)} \quad (18.72)$$

El *coeficiente de empuje intrínseco* se define como la relación del empuje intrínseco al producto $C_D P_0 A^*$ o sea:

$$K_T = \frac{F}{C_D P_0 A^*} \quad (18.73)$$

de manera que:

$$\eta_F = \frac{K_{T,ef}}{K_{T,id}} \quad (18.74)$$

El *coeficiente de empuje convencional* se define como $C_T = \frac{F}{C_D P_0 A^*}$ (18.75)

En todas las fórmulas anteriores C_D denota el coeficiente de derrame, o de caudal, de la tobera. Todos estos coeficientes sin dimensiones son sumamente útiles a los efectos de comparación de toberas.

Para la correlación de capacidad de las toberas propulsoras, tanto de los motores que respiran aire como de los motores cohete, se utilizan habitualmente dos criterios: el impulso específico $I_{sp} = F / \dot{m}$ y el coeficiente de empuje C_F definido por

$$C_F = \frac{F}{P_0 A_g} = \frac{\dot{m} V_s}{P_0 A_g} + \frac{A_s}{A_g} \left(\frac{P_s}{P_0} - \frac{P_a}{P_0} \right) \quad (18.76)$$

donde P_0 es la presión de estancamiento de la tobera, P_s en la sección de descarga y P_a la presión ambiente, o contrapresión.

Como quiera que las toberas De Laval se utilizan habitualmente para obtener flujo bloqueado, es conveniente expresar C_F en términos de la velocidad de escape en expansión isentrópica y del flujo másico máximo \dot{m}^* . Resulta:

$$C_F = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2} + \frac{A_s}{A_g} \left(\frac{P_s}{P_0} - \frac{P_a}{P_0} \right) \quad (18.77)$$

Para un gas dado, la relación de expansión $r_e = P_s / P_0$ depende únicamente de la relación de áreas $\varepsilon_e = A_s / A_g$; por ello, el coeficiente de empuje de tobera depende solo de la relación de calores específicos γ , de la relación de presión P_a / P_0 y de la relación de áreas ε_e .

La figura 18.50 presenta C_F en función de ε_e para gases de $\gamma = 1, 2$.

Es evidente que, para un valor dado de P_a / P_0 , hay una relación de áreas única ε_e que produce el empuje máximo; pero si el valor de dicha relación supera al óptimo, la presión de salida P_s deviene menor que la contrapresión P_a por lo que eventualmente



se produce separación del flujo en la divergencia de la tobera y la ecuación 18.77 deja de ser válida.

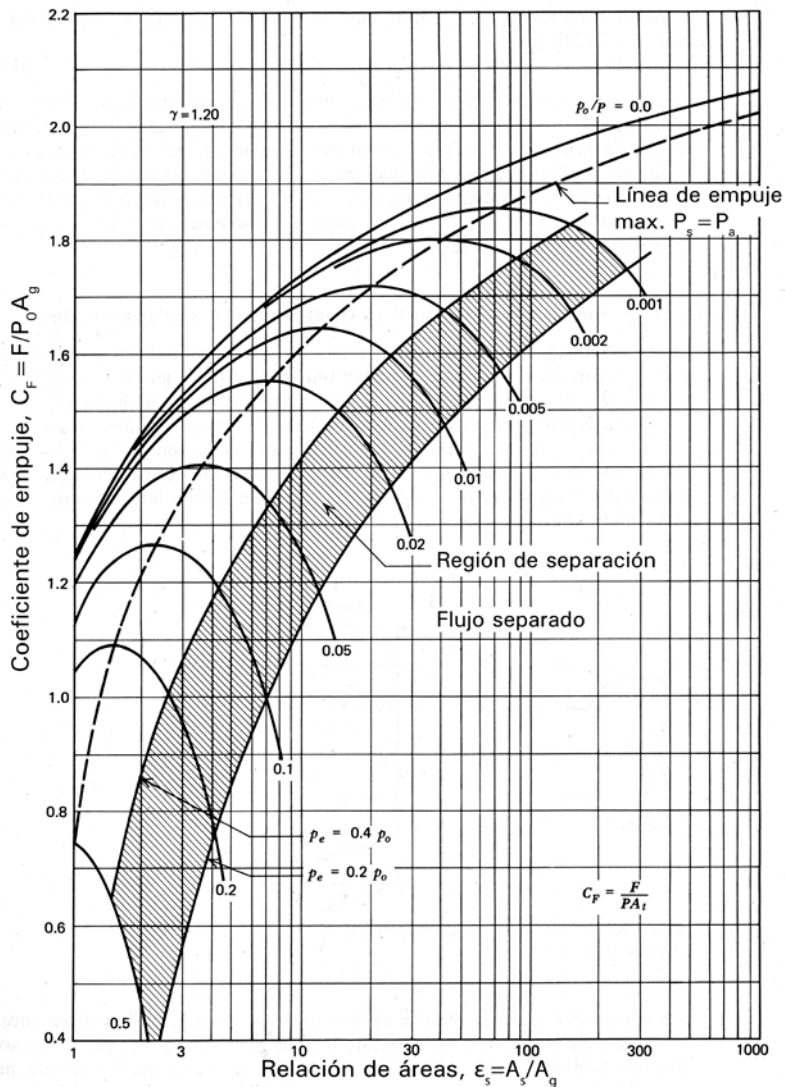


Fig. 18.50.
Coeficiente de
empuje en función
de la relación de
áreas
[ZH76]

18.11.4 Límites de aplicación de la teoría unidimensional y de la hipótesis de fluido calóricamente perfecto

La teoría unidimensional y la hipótesis de fluido calóricamente perfecto simplifican mucho los cálculos, lo cual incita a aplicarlos siempre en primera aproximación. Sin embargo, en una tobera de perfil dado, generalmente establecido en función de condiciones tecnológicas, es raro que el flujo en la salida satisfaga las condiciones de la teoría unidimensional.



Varias son las causas por las que las prestaciones reales de las toberas difieren de las calculadas bajo los supuestos a los que antes se ha hecho referencia; en particular: la curvatura del perfil en la garganta de la tobera; la viscosidad del fluido y la capa límite asociada; la naturaleza del fluido en tanto que gas real, etc. Así, como se verá más adelante, el cálculo preciso del flujo másico y del empuje de una tobera requerirá la aplicación del método de las características teniendo en cuenta los efectos de la capa límite.

18.12 Cálculo del empuje real de tobera

Las condiciones de funcionamiento de una tobera en la práctica difieren sustancialmente de las consideradas por el modelo unidimensional de fluido calóricamente perfecto no viscoso que se ha utilizado en el análisis anterior del empuje de tobera. Por consiguiente, aquellos resultados se han de entender como una aproximación. El cálculo el empuje real de tobera requiere tener en cuenta los siguientes efectos:

- No uniformidad de la distribución de velocidad en la sección de descarga de la tobera
- Fluido viscoso en capa límite
- Gas real
- Flujo de calor

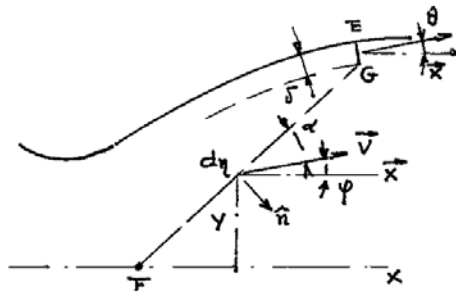
Como quiera que los efectos de no uniformidad del flujo en la sección de descarga de la tobera y del flujo de calor en ella ya se han expuesto en otros apartados de este capítulo, aquí se analiza con más detalle los efectos de viscosidad y de gas real.

18.12.1 Influencia de la viscosidad

La viscosidad del fluido es causa de la formación de una capa límite en la pared de la tobera, de espesor δ , en la que la velocidad del fluido no es uniforme. En la figura 18.51 se muestra dicha capa en el extremo de salida de una tobera.

Supuesto que el flujo fuera de la capa límite es unidimensional, cabe desarrollar un método para el cálculo el empuje real de tobera a partir del flujo unidimensional determinando previamente el término sustractivo que representa el efecto de la capa límite.

Fig. 18.51.
[Car71]





Para el cálculo de la impulsión se toma como contorno de integración la superficie de revolución engendrada por la línea de Mach FG y la porción GE de normal a la pared representativa del espesor de la capa límite allí.

A lo largo de la superficie de revolución de generatriz FGE , el valor de las fuerzas de presión es:

$$F_p = \int_F^G 2\pi y P \sin(\alpha + \beta) d\eta + 2\pi y_E P_s \delta \cos\theta$$

A lo largo de la misma superficie de revolución, el término de fuerza que resulta del balance de flujo de cantidad de movimiento axial es:

$$F_{cm} = \int_F^G 2\pi y \rho a V \cos\varphi d\eta + \rho_s u_s^2 2\pi y_E \delta \cos\theta - 2\pi y_E \rho_s u_s^2 \cos\theta (\delta^* + \delta^{**})$$

donde a es la velocidad del sonido, normal a la línea de Mach

En definitiva, la fuerza total es:

$$F = F_p + F_{cm} = \left[\int_F^G 2\pi y (\rho a V \cos\varphi + P \sin\{\alpha + \varphi\}) d\eta + 2\pi y_E \delta \cos\theta (P_s + \rho_s u_s^2) \right] - 2\pi y_E \rho_s u_s^2 \cos\theta (\delta^* + \delta^{**}) \quad (18.78)$$

El término entre corchetes corresponde al empuje desarrollado por el fluido perfecto corregidos los efectos de desplazamiento y extrapolado hasta la pared, y el término sustractivo tiene en cuenta la capa límite.

18.12.2 Cálculo del empuje por el modelo de flujo unidimensional con capa límite

Se parte del supuesto de que en cada sección A del flujo los valores de las variables fuera de la capa límite son uniformes. El área de la sección recta que se ha de considerar para el cálculo del flujo no viscoso corregido es $A'_E = A_E - 2\pi y_E \delta^*$

Considerado perfecto el fluido, el número de Mach M'_E corregido del efecto de desplazamiento en la sección considerada, está dado por $\Sigma(M'_E) = A'_E / C_D A^*$ y la presión corregida por $P'_E = P_0 \varpi(M'_E)$. En el caso de un gas real, (P', ρ', M') son determinadas a partir del diagrama de Mollier y de la relación $A'_E / C_D A^*$

Aplicando el método de cálculo clásico, el empuje corregido resulta

$$F' = P'_E A'_E + \dot{m} V'_E \left(1 - \frac{\delta^{**}}{y_E} \right) \quad (18.79)$$

Comparando este resultado con el ideal, resulta



$$F_{cor} = F_{id} - \dot{m} V_E \frac{2\delta^{**}}{y_E} \quad (18.80)$$

En el caso particular de una tobera cónica de semiángulo θ resulta:

$$F = \frac{1 + \cos\theta}{2} A_s (P_s + \rho_s V_s^2) = \frac{1 + \cos\theta}{2} P_0 C_D A^* \Phi(M_s) \quad (18.81)$$

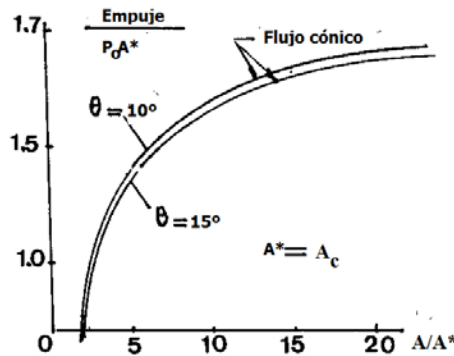
donde $M_s \equiv M_E$, calculado este último por la teoría unidimensional en la sección de descarga EE .

Así pues, el empuje de una tobera cónica es igual al empuje calculado por la teoría unidimensional multiplicado por un coeficiente de divergencia. El efecto de esta divergencia se traduce por una pérdida de empuje no despreciable a partir de $\theta = 5^\circ$.

El cálculo exacto del empuje de una tobera por el método de las características permite calcular el error que corresponde a la aplicación de la ecuación $F = A_s (P_s + \rho_s V_s^2)$ en función de θ y de $A_E / C_D A^*$

La figura 18.52 muestra la comparación de resultados de cálculo, aproximado y exacto, del empuje de una tobera cónica considerando el fluido perfecto.

Fig. 18.52.
Empuje de una
tobera cónica. Com-
paración
entre cálculo exacto y
aproximado
[Car71]



Se ha de tener también en cuenta la corrección que impone la viscosidad del fluido. Siguiendo un procedimiento idéntico al expuesto anteriormente, se llega a la ecuación

$$F' - F = -\dot{m} V'_s \cos\theta \frac{2\delta_E^{**}}{y_E} \quad (18.82)$$

Introduciendo el parámetro de alargamiento $\xi = (L / \cos\theta) / (d_g / 2)$, donde L es la longitud del difusor de la tobera y d_g el diámetro de su garganta, se puede encontrar la ecuación que da el valor de la corrección $|g| = F - F'$ para todo valor de θ , que se escribe

$$\frac{gF}{\dot{m} V_E} \cdot \frac{1}{\xi} Re_{c,o}^{1/6} = f(M_E)$$



Como en la práctica $Re_{c,o}$ es del orden de 10^6 y ξ es del orden de algunas unidades (caso de un turborreactor), resulta $\Delta F / F$ del orden de 0,5 a 1%

18.12.3 Influencia de la naturaleza y estado del gas: Gases reales en equilibrio

En el Capítulo 1 se expuso cómo varía el valor de γ con el estado termodinámico del gas: presión y temperatura. La variación puede ser significativa, en el sentido de que deban ser revisados los cálculos de empuje efectuados a partir de la hipótesis de γ constante.

A título de ejemplo, el valor del error que se comete $\Delta F / F$ si las condiciones operativas son 1500 K y relación de presión P_0 / P_s de 10 es 0,316%, mientras que a 2500 K y una relación de presión de 600, el valor llega a ser del 1,235%

Hasta 2000 K los resultados son independientes del nivel de presión, pues no intervienen las disociaciones del gas; sin embargo, por encima de dicha temperatura es necesario tener en cuenta la relación de presiones pues la tasa de disociación depende también de ella.



Aplicación del método de características al proyecto y al análisis del flujo en toberas

19.1 Introducción

En este apartado, se presentan los conocimientos básicos elementales que se requieren para iniciarse en el proyecto de toberas axisimétricas y en el análisis del flujo supersónico isentrópico bidimensional en ellas mediante el método de las características.

Cuatro son los temas que se abordan:

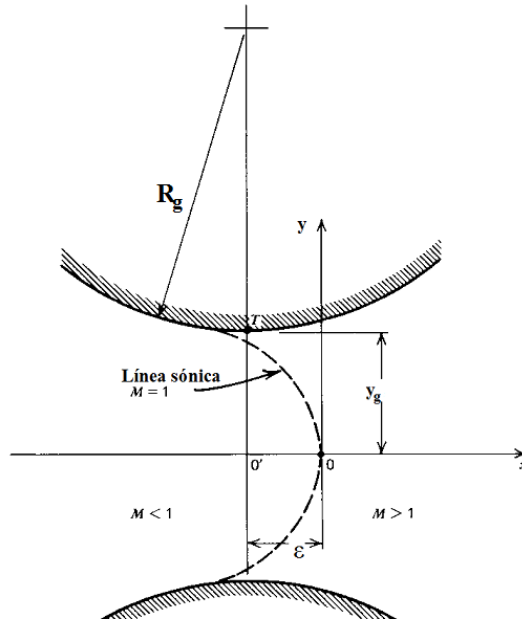
- 1) El método de Sauer para el proyecto de la garganta de una tobera como fase previa esencial para la aplicación del método de las características al proyecto y al análisis de toberas.
- 2) El análisis del flujo en una tobera dada.
- 3) El cálculo de un perfil de tobera que asegure una distribución de presión determinada.
- 4) Un ejemplo de aplicación del método de Sauer¹ a la determinación de la línea sónica y la línea de $\nu = 0$ en la garganta de una tobera axisimétrica.

19.2 El método de Sauer para la determinación del campo de flujo en la región de la garganta de una tobera convergente-divergente bloqueada

La determinación del patrón de flujo en la región de la garganta de una tobera convergente-divergente bidimensional en estado de bloqueo se puede llevar a cabo aplicando las técnicas de pequeñas perturbaciones a las ecuaciones que gobiernan el flujo en ella.

Una de las principales causas de error en la determinación de las propiedades del campo de flujo en la parte divergente de la tobera se puede atribuir a la aproximación adoptada para determinar las propiedades del campo de flujo en la garganta de la misma. La figura 19.1 ilustra esquemáticamente la geometría de la región de la garganta.

Fig. 19.1.1

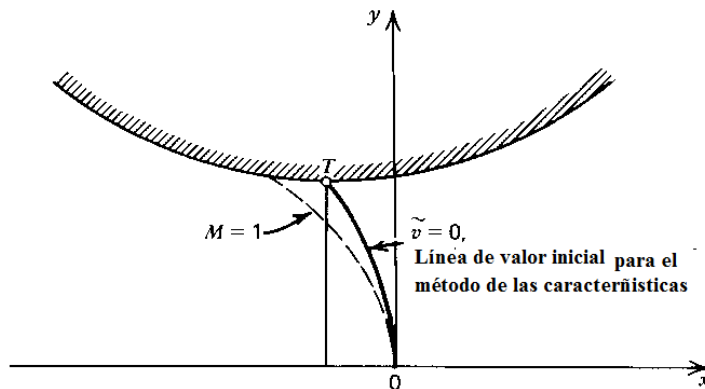


De los varios métodos que se han propuesto para analizar el campo de flujo en la región de la garganta, el desarrollado por Sauer es el más simple, aunque no el más preciso; no obstante, para toberas con garganta de gran radio de curvatura, el método de Sauer da resultados razonablemente precisos.

Como se observa en la figura 19.1, la línea sónica se inicia en un punto del contorno de la tobera que se encuentra ligeramente corriente arriba de la sección de la garganta. Esta línea cruza el eje de la tobera en un punto O, que se encuentra a la distancia ϵ de la sección mínima de la garganta. Este punto es el origen del sistema de coordenadas que utiliza Sauer en su análisis.

El análisis de Sauer lleva a la determinación de esta distancia, que es fundamental para identificar la línea de $v = 0$ como lugar geométrico de las condiciones iniciales para la aplicación del método de las características. La figura 19.2 muestra esta línea.

Fig. 19.2.2





El análisis del flujo axisimétrico irrotacional en la garganta de la tobera parte de la ecuación de perturbación:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = M_\infty^2 (\gamma + 1) \left(\frac{u}{U_\infty} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (19.1)$$

Después de varias transformaciones, se obtienen las siguientes velocidades de perturbación para una distribución de velocidad de perturbación axial lineal:

$$u'(x, y) = \alpha x + \frac{(\gamma + 1) \alpha^2 y^2}{4} \quad (19.2)$$

$$v'(x, y) = \frac{(\gamma + 1) \alpha^2}{2} xy + \frac{(\gamma + 1)^2}{16} \alpha^3 y^3 \quad (19.3)$$

donde α es una constante denominada *coeficiente de la velocidad de perturbación axial adimensional lineal*.

La curva crítica en que $M = 1$ se establece imponiendo u' igual a cero en la ecuación 19.2. Así, se obtiene la ecuación que la define:

$$x = -\frac{(\gamma + 1) \alpha y^2}{4} \quad (19.4)$$

Ahora falta encontrar la localización del origen del sistema de coordenadas relativo a la garganta de la tobera. Su valor a lo largo del eje x se obtiene con la condición $v' = 0$ para $x = \varepsilon$ e $y = y_g$ en la ecuación 19.3. Así, resulta:

$$\varepsilon = -\frac{(\gamma + 1) \alpha y_g^2}{8} \quad (19.5)$$

19.2.1 Determinación del contorno de la tobera

En principio, la condición de contorno determina el perfil de pared requerido para generar el campo de flujo especificado por las ecuaciones 19.2 y 19.3.

La figura 19.3 ilustra el modelo geométrico empleado para determinar la curvatura k de la pared de la tobera allí donde la sección transversal es mínima, eso es, en la garganta.

Por definición de curvatura, se tiene:

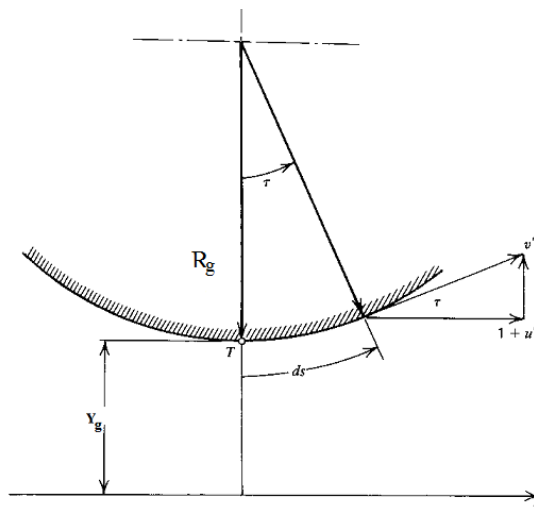
$$\tan \tau = \frac{1}{(1 + u')} \cong v'$$

Y, en el punto T, la curvatura viene dada por:

$$k = \frac{1}{R_g} = \left[\frac{d(\tan \tau)}{ds} \right]_T = \left(\frac{dv'}{ds} \right)_T \quad (19.6)$$



Fig. 19.3.



Habida cuenta de que $\left(\frac{dv'}{ds}\right)_T = \left(\frac{dv'}{dx}\right)_T \left(\frac{dx}{ds}\right)$, pues la otra derivada es nula, y admitiendo que $(ds/dx) \cong 1$, resulta:

$$\left(\frac{dv'}{ds}\right)_T = \left(\frac{dv'}{dx}\right)_T \quad (19.7)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 19.6, se obtiene:

$$R_g = \frac{1}{\left[\frac{\partial v'}{\partial x}(x, y) \right]_T} = \frac{1}{\frac{\partial v'}{\partial x}(x, y_g)}$$

Y, sustituyendo en esta ecuación el valor de $\partial v'(x, y_g)/\partial x$ obtenido por derivación de

la ecuación 19.3, o sea, por $\frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{(\gamma+1)\alpha^2 y_g}{2}$, se obtiene:

$$R_g = \frac{2}{(\gamma+1)\alpha^2 y_g} \quad (19.8)$$

A partir de la ecuación 19.8, se deriva el valor de α dado por la ecuación:

$$\alpha = \left[\frac{2}{(\gamma + 1) R_g y_g} \right]^{1/2} \quad (19.9)$$

Sustituyendo el valor de α en la ecuación 19.5, se obtiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{y_g}{8} \left[\frac{2(\gamma+1)}{(R_g/y_g)} \right]^{1/2} \quad (19.10)$$



Las ecuaciones 19.2, 19.3 y 19.10, junto con la condición $u' = 0$, determinan el campo de velocidad de perturbación cerca de la línea sónica de una tobera. La relación entre u, v y y y sus correspondientes velocidades de perturbación adimensionales es:

$$u(x, y) = a^* (1 + u') \quad ; \quad v(x, y) = a^* v' \quad (19.11)$$

19.2.2 Inicio de la aplicación del método de las características a partir de la línea de valor inicial $v = 0$

Las componentes de velocidad u, v pueden determinarse a lo largo de la línea $v = 0$ en cualquier punto de las coordenadas x, y . Puesto que el flujo es isoentrópico, la velocidad del sonido $a = a^*$ es la función conocida de a_0 y γ ($a^* = a_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2}$). Conocidos

$V = (u^2 + v^2)^{1/2}$ y a , se calcula M . A partir de M y de los valores de las propiedades termodinámicas de remanso P_0, T_0, ρ_0 , se calculan, o se leen en las tablas de flujo isoentrópico, las propiedades termodinámicas estáticas del fluido T, P, ρ ; en consecuencia, se obtiene el conjunto de valores iniciales del problema para determinar el campo de flujo supersónico en la divergencia de la tobera aplicando el método de las características.

El flujo másico se obtiene integrando, a través de la línea generada en la región de la garganta (con frecuencia, la línea $v = 0$), el campo de velocidad; por ejemplo:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{y_g} \rho u y dy \cong 2\pi \left(\frac{\Delta y}{3} \right) \sum_{i=1}^n C_i (\rho u y)_i \quad (\text{regla de Simpson}) \quad (19.12)$$

19.3 Procedimiento de aplicación del método de las características a las toberas

En este apartado, se expone el procedimiento de aplicación del método de las características a la resolución de dos problemas típicos de toberas:

- 1) Cálculo del flujo en la divergencia de una tobera de forma conocida
- 2) Cálculo del perfil de la parte divergente de una tobera para que se satisfaga una distribución de presión dada

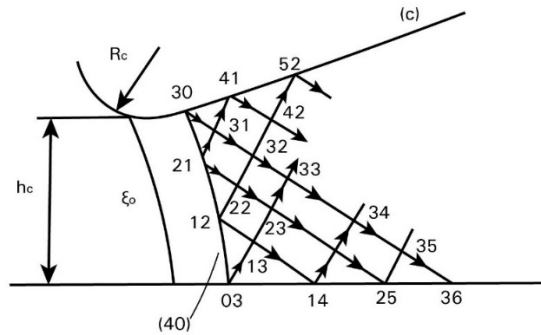
19.3.1 Cálculo del flujo en la divergencia de una tobera de forma conocida

Sea C el contorno de la parte divergente de una tobera cuyas propiedades termodinámicas de remanso, P_0, T_0, ρ_0 , son conocidas. Sea $L_0(x, y)$ una línea elegida corriente abajo de la línea de Mach ξ_0 y que sale el punto sónico sobre el eje (v. figura 19.4).

El procedimiento de aplicación del método de las características adoptado por Carriere con la nomenclatura de Lipmann-Roshko es, a grandes rasgos, el siguiente:



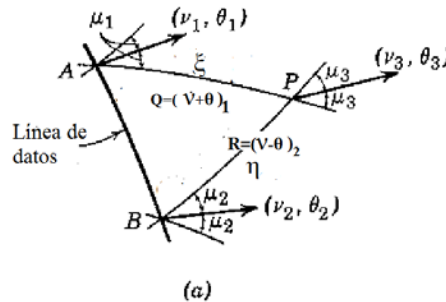
Fig. 19.4.
[Car71]



Conocido el valor del parámetro R_g / h_g , el estudio en cualquier punto (03, 12, 21, etc.) del dominio sónico permite determinar los valores de P , θ (ángulo del vector velocidad con respecto al eje x) en los mismos.

La determinación de los puntos interiores se realiza aplicando la operación que se ilustra en la figura 19.5.

Fig. 19.5.
Operación (N)



Por ejemplo, el punto P(31), a partir de los puntos A(30) y B(21), resulta:

$$v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \quad (19.13)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (19.14)$$

E igualmente para los otros puntos.

Por otra parte, para un desplazamiento $\delta\xi$ de la característica ξ entre los puntos 30 y 31, se obtiene:

$$\frac{\delta P}{P} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - \delta\theta = -\frac{\text{sen}\theta}{My} \delta\xi \quad (19.15)$$

y, a lo largo de la característica η :



$$\frac{\delta P}{P} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} + \delta\theta = -\frac{\sin\theta}{My} \delta\eta \quad (19.16)$$

Conocidos P y θ en los puntos 30 y 21, se deducen primero los valores de $h(P, s)$ de la entalpía que permite calcular la velocidad del fluido $V = (h_0 - h)^{1/2}$ y la del sonido a , de las cuales se deduce $M = V/a$ y $\mu = \arcsen\left(\frac{1}{M}\right)$ en ambos puntos, 30 y 21.

La determinación de P y θ en un punto del contorno C de la tobera se lleva a cabo aplicando la operación representada en la figura 19.6.

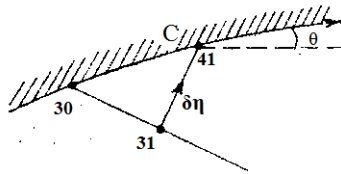


Fig. 19.6.
Operación (C)
[Car71]

Se calcula μ en el punto 31 como antes y se prolonga la línea de Mach hasta que corta al contorno C en el punto 41. Se calcula $\delta\eta$ y se determina θ a partir de la ecuación que define el contorno. Se obtiene: $\delta\theta = \theta(41) - \theta(31)$.

Sustituyendo los valores calculados de $\delta\eta$ y $\delta\theta$ en la ecuación 19.16, se obtiene: $\delta P = P(41) - P(31)$, que da el valor de P en el punto (41).

Este procedimiento se aplica también a todos los otros puntos del contorno de la tobera.

Para los puntos situados en el eje de la tobera, se aplica el método que se esquematiza en la figura 19.7.

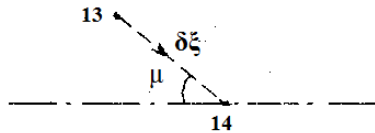


Fig. 19.7.
Operación (A)
[Car71]

Una vez determinado el valor de M en el punto (13), se traza una recta de pendiente μ que corta el eje de la tobera en el punto 14. A lo largo de esta característica, se tiene:

$$\delta y = -\sin\mu \delta\xi = -\delta\xi / M$$

Por otra parte, si bien en el punto (14) $\sin\theta/y$ es indeterminado, se le puede sustituir por $(\partial\theta/\partial y)_\xi$ como equivalente.

Aplicando esta condición a la ecuación 19.15, se obtiene:

$$\frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - \delta\theta = -\frac{1}{M} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)_\xi d\xi = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \right)_\xi d\xi = \delta\theta$$



O sea:

$$\frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - 2\delta\theta = 0 \quad (19.17)$$

La solución de la ecuación 19.17 es:

$$\ln P(14) = \ln P(13) - \frac{2\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \theta(13) \quad (19.18)$$

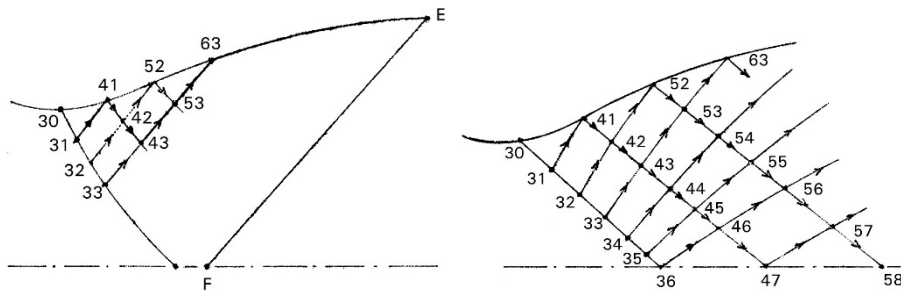
Para la construcción geométrica, se realizan los cálculos por iteración utilizando en cada paso los valores medios de $(\mu + \theta)$ y $(\mu - \theta)$, y, para el cálculo de P y θ , los valores de

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2}.$$

A partir de los procedimientos descritos, se prosiguen los cálculos metódicamente a lo largo de las direcciones características ξ y η (v. figuras 19.8 y 19.9).

Fig. 19.8.
[Car71]

Fig. 19.9.
[Car71]



Por ejemplo, a lo largo de ξ :

31 \rightarrow 41 Operación C; 41... \rightarrow 46 Operación N; 46 \rightarrow 47 Operación A

A lo largo de η :

31 \rightarrow 41 Operación C; 32... \rightarrow 52 Operación N, etc.

El cálculo termina al llegar a la línea de Mach FE , en que E representa el borde de tobera. Se obtiene así una distribución $P(x)$ a lo largo del contorno de la tobera para un flujo supersónico bidimensional irrotacional. En realidad, el fluido es viscoso, por lo cual es necesario tener en cuenta la existencia de una capa límite.

A tal efecto, se ha de realizar una corrección de los resultados anteriores, lo cual conlleva desplazar el contorno, calculado teóricamente, hacia el eje de la tobera en un recorrido definido por el espesor de desplazamiento de la capa límite δ^* .



De esta manera, se obtiene un nuevo contorno y se procede a repetir los cálculos antes explicados para llegar al resultado definitivo.

El cálculo del espesor de desplazamiento de la capa límite se lleva a cabo mediante la ecuación de Karman, partiendo de la garganta, donde se toma δ^*/H como valor inicial de δ^{**} .

El valor de δ^* en la garganta se calcula mediante la ecuación:

$$\frac{\delta^*}{d_g/2} = Re_{g,0}^{-1/6} F_1 \left(\frac{x}{d_g/2} \right) \quad (19.19)$$

donde F_1 es una función sin dimensiones válida para la familia de toberas considerada, que está relacionada con el coeficiente de descarga de la tobera por la ecuación:

$$F_{1,g} = \frac{1 - C_{D,\delta}}{4 \cdot Re_{g,0}^{-1/6}} \quad (19.20)$$

donde $Re_{g,0} = \rho_0 a_0 \frac{d_g}{2} / \mu_0$ (el subíndice 0 indica las condiciones generadoras, de remanso).

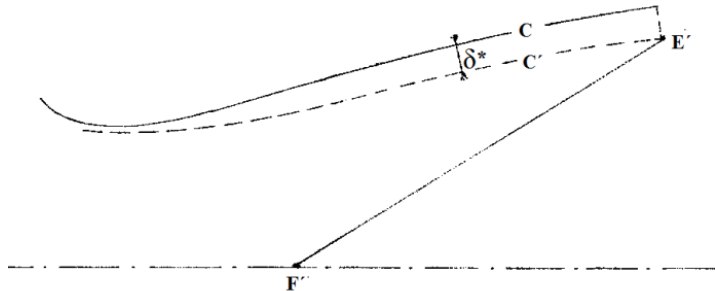


Fig. 19.10.
[Car71]

La tabla 19.1 muestra algunos valores de $F_{1,g}$ afectados por el factor 4.

d_g / R_g	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1
$(1 - c_D \delta) / Re_{g,0}^{-1/6}$	0,089	0,068	0,056	0,05	0,042	0,037	0,034

La ecuación de Karman se escribe así:

$$\frac{\tau_p}{(\rho V)_{ex}} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left[\frac{H+1}{V_{ex}} \cdot \frac{dV_{ex}}{dx} + \frac{1}{dx} \ln y (\rho V)_{ex} \right] \quad (19.21)$$

donde el subíndice $_{ex}$ indica “fuera de la capa límite” y $H = \delta^* / \delta^{**}$.



19.3.2 Cálculo de la parte divergente de una tobera para que se satisfaga una distribución de presión determinada

Se impone, por ejemplo, una expansión continua que conduce a una distribución uniforme de la velocidad en la salida.

En la figura 19.11, se ilustra el procedimiento que se describe a continuación:

- 1) Se impone, en el origen, una curvatura en la garganta R_g / h_g , lo cual determina una línea de partida L_0 en el dominio sónico.
- 2) A partir del punto I , pie de la línea L_0 sobre el eje x , se impone una distribución continua de presión $P(x)$ hasta el punto F , al cual corresponde el valor de la presión P_E determinada por el valor del número de Mach M_E del flujo en la salida.
- 3) A partir de los datos a lo largo de la línea L_0 , del eje y y de FE , se procede a determinar el punto γ desde los puntos α y β aplicando la operación (A).
- 4) Una vez construida la red, se ha de determinar la línea de corriente que prolonga el contorno C desde la garganta. A tal efecto, se calcula el flujo másico a través de L_0

$$\text{dado por } \dot{m} = \int_0^{L_0} 2\pi y \rho u dy.$$

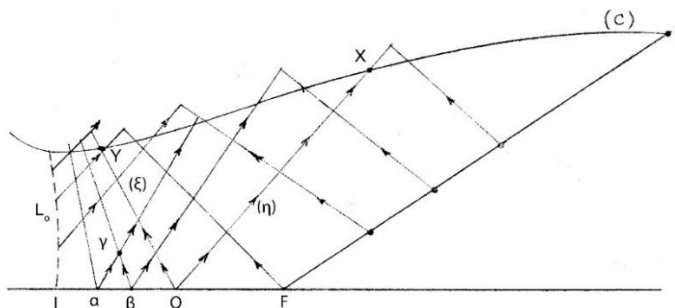
Sea un punto cualquiera sobre el eje, por ejemplo, el Q , pie de una línea de Mach η . El flujo másico que la atraviesa es igual a \dot{m} ; ahora bien, la velocidad normal a esta línea es la del sonido a ; por consiguiente, el flujo másico se expresa ahora de la forma:

$$\dot{m} = \int_Q^x 2\pi y \rho a d\eta$$

Como quiera que ρ y a son conocidos a lo largo de η , la ecuación anterior da X . El punto Y se determina siguiendo el mismo procedimiento, trazando la línea característica ξ a partir del punto Q .

- 5) Una vez determinada punto a punto la línea de contorno C , se procede, como en el caso anterior, a calcular el espesor de desplazamiento de la capa límite para corregir el contorno y obtener uno nuevo, y se repiten los cálculos.

Fig. 19.11.
[Car71]





Ejemplo

Sea una tobera convergente-divergente axisimétrica, que tiene un radio de garganta y_g de 0,025 m y un contorno de garganta que es un arco circular, con un radio de curvatura ρ_g corriente arriba de 0,05 m. Por ella, se descarga un gas ($\gamma = 1,2$; $R = 320 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$), cuyas propiedades termodinámicas de remanso son $P_0 = 70 \text{ bar}$, $T_0 = 3.000 \text{ K}$. Calcula:

- 1) La localización de la línea sónica.
- 2) La localización de la línea $v = 0$.
- 3) Las propiedades del fluido, V , M , P , ρ y T , a lo largo de la línea $v = 0$.
- 4) El flujo másico y el empuje a través de la línea $v = 0$ suponiendo que la presión ambiente es cero.
- 5) El flujo másico y el empuje en términos de las condiciones de garganta.

Solución:

- 1) La ecuación de la línea sónica se escribe:

$$x = -\frac{(\gamma+1)\alpha y^2}{4}, \text{ donde } \alpha = \left[\frac{2}{(\gamma+1)R_g y_g} \right]^{1/2}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\alpha = \left[\frac{2}{2,2 \cdot 0,05 \cdot 0,025} \right]^{1/2} = 26,97 \text{ m}$$

y:

$$x = -\frac{2,2 \cdot 26,97}{4} y^2 = -14,83 y^2 \text{ m}$$

Este valor de x está referido al centro del sistema de coordenadas que pasa por el punto $x_\varepsilon = -\varepsilon$, por lo cual, referido al sistema de coordenadas situado en el centro de la tobera, su valor es $x_{ct} = x - x_\varepsilon$. Su cálculo requiere conocer el valor de ε , que viene dado por:

$$\varepsilon = -\frac{y_g}{8} \left[\frac{2(\gamma+1)}{(R_g / y_g)} \right]^{1/2} = -\frac{0,025}{8} \left[\frac{2 \cdot 2,2}{(0,05 / 0,025)} \right]^{1/2} = -4,635 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Así, $x_{ct} = x - x_\varepsilon = x + 4,635 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

- 2) La ecuación de la línea $v = 0$ se escribe:

$$x = -\frac{(\gamma+1)\alpha}{8} y^2$$



Sustituyendo valores, se obtiene:

$$x = -\frac{2,2}{8} \left(\frac{2}{2,2 \cdot 0,05 \cdot 0,025} \right)^{1/2} y^2; \text{ o sea: } x = -7,416 y^2 \text{ m}$$

3) Las propiedades de los fluidos tienen los valores siguientes:

Velocidad

$$u(x, y) = a^* (1 + u') = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_0 \right]^{1/2} \left(1 + \frac{2}{(\gamma+1)R_g y_g} x + \frac{\gamma+1}{4} \cdot \left\{ \frac{2}{(\gamma+1)R_g y_g} \right\}^2 y^2 \right)$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$u(x, y) = 1.023,36 (1 + 26,968x + 400y^2)$$

La velocidad del sonido es $a_0 = (\gamma RT_0)^{1/2} = (1,2 \cdot 320 \cdot 3.000)^{1/2} = 1.073,3 \text{ m.s}^{-1}$

Su valor estático es $a = \left(a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} u^2 \right)^{1/2} = (1,152 \cdot 10^6 - 0,1u^2)^{1/2} \text{ m.s}^{-1}$

La temperatura, la densidad y la presión estática del fluido son:

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{V}{a} \right)^2} = \frac{3000}{1 + 0,1 M^2}, \quad \rho = \frac{P}{RT} = \frac{1}{320} \frac{P}{T}, \quad P = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

4) El flujo másico a través de la línea $v = 0$ se expresa así:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{y_g} \rho u dy$$

Aplicando la regla de Simpson y sustituyendo valores, se obtiene:

$$\dot{m} = 2\pi \left(\frac{\Delta y}{3} \right) \sum_{i=1}^n C_i (\rho u y)_i$$

para $n = 11$, resulta:

$$\dot{m} = \frac{2\pi \cdot 0,0025}{3} \sum_{i=1}^{11} C_i (\rho u y)_i$$

El empuje se expresa:



$$F = 2\pi \int_0^{y_g} (P + \rho u^2) y dy$$

que, integrado por la regla de Simpson, da:

$$F = \frac{2\pi \cdot 0,0025}{3} \sum_{i=1}^{11} C_i (P + \rho u^2) y_i$$

- 5) El flujo másico y el empuje, calculados en condiciones de garganta, críticas, son los siguientes:

El flujo másico es $\dot{m} = \rho^* a^* A_g$ y el empuje, $F = P^* \cdot A_g + (\dot{m} a)^*$

La tabla I muestra los valores de todas las magnitudes calculadas.

Punto	Línea sónica			Línea v=0		Propiedades del flujo y del fluido a lo largo de v=0				
	y, mm	x, mm	\bar{x} , mm	x, mm	\bar{x} , mm	u = V m/s	M	P, N/m ² · 10 ⁵	ρ , kg/m ³	T, K
1	0.0	0.000	4.635	0.000	4.635	1023.4	1.0000	39.513	4.5275	2727.3
2	2.5	-0.093	4.542	-0.045	4.590	1024.6	1.0014	39.454	4.5219	2726.6
3	5.0	-0.371	4.264	-0.185	4.450	1028.5	1.0055	39.276	4.5049	2724.5
4	7.5	-0.834	3.801	-0.417	4.218	1034.9	1.0124	38.980	4.4766	2721.1
5	10.0	-1.483	3.152	-0.742	3.893	1043.8	1.0221	38.565	4.4368	2716.3
6	12.5	-2.318	2.317	-1.157	3.478	1055.3	1.0345	38.032	4.3857	2710.0
7	15.0	-3.337	1.298	-1.667	2.968	1069.4	1.0498	37.381	4.3230	2702.2
8	17.5	-4.542	0.093	-2.270	2.365	1086.0	1.0680	36.613	4.2489	2692.8
9	20.0	-5.933	-1.298	-2.967	1.668	1105.2	1.0891	35.729	4.1632	2681.9
10	22.5	-7.509	-2.874	-3.755	0.880	1127.0	1.1132	34.730	4.0660	2669.2
11	25.0	-9.270	-4.635	-4.635	0.000	1151.3	1.1402	33.619	3.9573	2654.8

Tabla 19.1.
Cordenadas de las
líneas sónica y para
v=0 en la región de
garganta de la to-
bera y valores de las
magnitudes del flujo
y de las propiedades
termodinámicas del
fluido

A partir de los valores puntuales de las magnitudes calculadas por el método de Simpson, su valor total es:

$$\dot{m} = 9,046 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, m_g = 9,098 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \text{ y } F = 17,013 \text{ N}, F_g = 17,07 \text{ N}$$

(Ver [ZH77] y [Car71])

→ 20



Ventilación

20.1 Introducción

Por *ventilación*, se entiende la acción para modificar y/o controlar el medio ambiente contaminado del interior de un recinto por desplazamiento y/o mezcla con un gas “limpio” introducido en él.

El recinto puede estar ocupado por personas o ser utilizado como almacén, como planta industrial, como invernadero, como cobertizo para la estabulación de animales, etc. Cualquiera que sea su uso, la ventilación ha de asegurar un medio ambiente saludable para las personas e idóneo para los procesos industriales que se lleven a cabo en ellos, los cultivos y las actividades pecuarias, entre otros. También, naturalmente, ha de servir para eliminar o controlar las concentraciones de gases o vapores inflamables, explosivos, de polvo, de humos, etc.

Como se verá más adelante, son varias las técnicas de ventilación, que se pueden agrupar en dos: natural (infiltración) y forzada. Sea del tipo que sea, todo proyecto de ventilación comporta conocer de antemano la composición de la atmósfera del recinto que se ha de ventilar, y diseñarlo de modo que se respeten las normas, las instrucciones, los reglamentos, etc. que rijan en cada caso.

Los temas relacionados con la ventilación son muchos y diversos; sin embargo, dada la orientación de los contenidos de este libro, este capítulo se centrará en la dinámica de los gases o los vapores implicados: cómo se desplazan por el recinto, cómo se mezclan, qué tasa de renovación del ambiente se requiere en cada caso y dónde se sitúan los elementos que se utilizan para introducir el “gas o vapor limpio”, por un lado, y para evacuar el ambiente contaminado, por otro.

20.2 Los contaminantes y su origen

Los contaminantes que contiene el medio ambiente son de naturaleza muy diversa, de origen distinto y de mayor o menor importancia, a los efectos de las características que ha de tener la instalación de ventilación.



Son innumerables las publicaciones sobre la materia, pero la información que debe utilizarse en el diseño de una instalación es la que figura en los reglamentos, las instrucciones y las normas de obligado cumplimiento que rigen para la instalación en particular, dictadas por el organismo de la Administración con competencias en el lugar.

A título orientativo, se incluyen dos tablas, forzosamente parciales, sobre la naturaleza de los contaminantes, su origen y los estándares primario y secundario de calidad del aire ambiente.

Tabla 20.1.
Los contaminantes del aire y su origen

Fuentes	Tipos de contaminante
Externa:	
Aire ambiente	SO ₂ , NO, NO ₂ , O ₃ , CO, hidrocarburos, partículas (gotas, polvo...), aerosoles
Vehículos a motor	CO, Pb, hidrocarburos, partículas
Interna:	
Materiales de edificación:	
Tableros, contrachapados	Formaldehido
Aislantes	Fibra de vidrio
Adhesivos	Colas y pegamentos
Pinturas	Mercurio y compuestos orgánicos
Equipamiento:	
Calderas, cocinas, calentadores	CO, NO, NO ₂ , partículas
Muebles	Barnices y colas
Ocupantes humanos y su actividad:	
Actividad metabólica	H ₂ O, CO ₂ , NH ₃ , olores
Humo del tabaco	CO, NO ₂ , partículas, olores
Aerosoles	Fluorocarburos
Productos de limpieza...	NH ₃ , Cl, olores

Tabla 20.2. Estándares primario y secundario de calidad del aire ambiente (parcial)

Contaminante	Concentración	Observaciones
Dióxido de azufre:		
Primario	80 µg/m ³ – 0,03 ppm	Media aritmética anual
	365 µg/m ³ – 0,14 ppm	Concentración máxima de 24 horas que no se ha de superar más de una vez por año
Secundario	1.300 µg/m ³ – 0,50 ppm	Ídem, de tres horas
Materia en polvo:		
Primario	150 µg/m ³	Concentración de 24 horas
Secundario	50 µg/m ³	Media aritmética anual
Monóxido de carbono	10 µg/m ³ – 9 ppm	Concentración media de 8 horas que no se ha de superar más de una vez por año
Primario y secundario	40 µg/m ³ – 36 ppm	Concentración media de una hora que no se ha de superar más de una vez por año
Ozono		
Primario y secundario	235 µg/m ³ – 0,12 ppm	Ídem
Dióxido de nitrógeno		
Primario y secundario	100 µg/m ³ – 0,53 ppm	Media aritmética anual
Plomo		
Primario y secundario	1,5 µg/m ³	Media aritmética máxima promediada en un trimestre

(Ver [Goo85])

20.3 Las modalidades de ventilación

En términos de grupos de técnicas de ventilación según la modalidad que en conjunto las caracteriza, existen dos métodos: la ventilación natural y la ventilación forzada. Se distinguen básicamente en cómo se mueven los gases o los vapores implicados. En la ventilación natural, el movimiento es generado por gradientes de densidad que son consecuencia de diferencias de temperatura o de presión entre el entorno exterior del recinto y su interior. En la ventilación forzada, el movimiento es provocado por medios mecánicos: ventiladores o equipos similares.

20.3.1 La ventilación natural

El proyecto de un sistema de ventilación natural, que comporta la definición de las aberturas del recinto y su localización en él, requiere un conocimiento preciso de las condiciones del medio ambiente externo: la velocidad y la dirección de los vientos, la temperatura y la humedad, y también las del ambiente en el interior del recinto en las condiciones de utilización. Así pues, hay que conocer:

- El estado característico de la atmósfera exterior al recinto: las velocidades y las direcciones de los vientos frecuentes, las condiciones de humedad-temperatura dominantes, etc.
- Las características del medio ambiente interno en las condiciones de uso del recinto: la intensidad y la localización de las fuentes de calor, de humos o de vapores, de polvo, etc.

Características de la atmósfera en el exterior del recinto

Habitualmente, la información sobre el “tiempo” fuera del recinto se obtiene de los servicios de meteorología del lugar. Si bien la información sobre la temperatura y la humedad es importante, la magnitud principal es el viento. Tras medir la velocidad y la dirección por anemómetros *ad hoc*, los resultados se presentan en gráficas como las que se muestran en la figura 20.1.

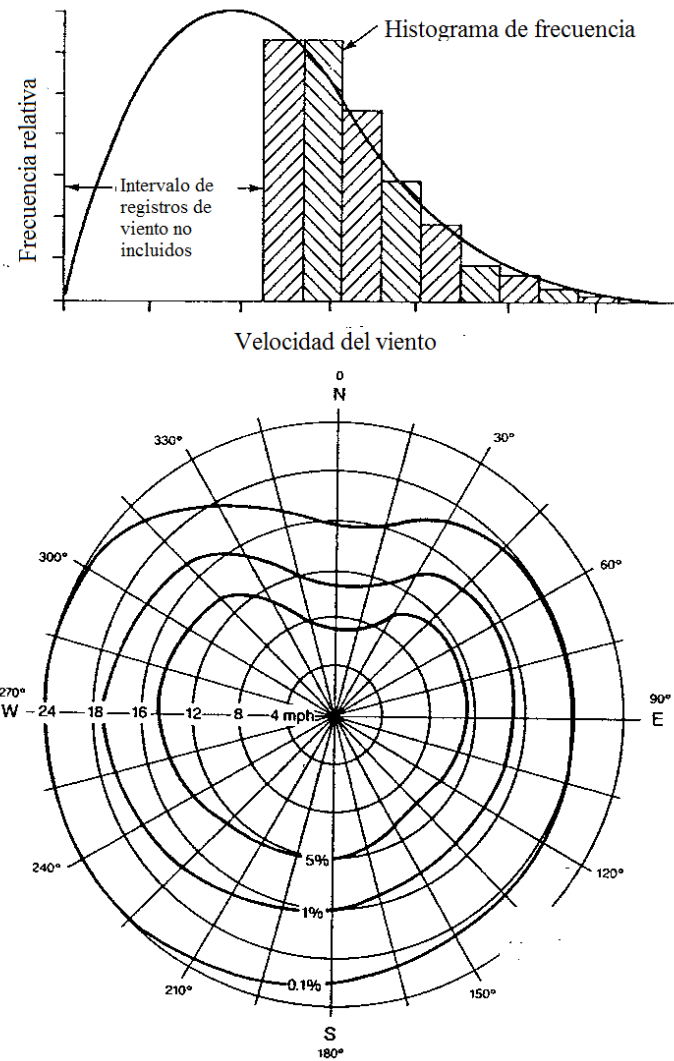
La información sobre la temperatura y la humedad del aire atmosférico la presentan también los servicios citados en forma de tablas y gráficas de distribución de valores máximos, mínimos y medios, diarios, mensuales y anuales.

Otra información importante no disponible habitualmente pero fácil de obtener en manuales de orientación para los profesionales es la relativa a la circulación del aire en torno a edificios y recintos de toda clase en función de su altura y ubicación.

La figura 20.2 ilustra cómo circula el viento alrededor de un edificio rectangular y muestra dónde se produce el estancamiento y la recirculación de la corriente.

La circulación del aire alrededor de recintos que han de ser ventilados afecta la protección frente a la contaminación en las entradas y la capacidad de control de factores medioambientales como la temperatura y la humedad.

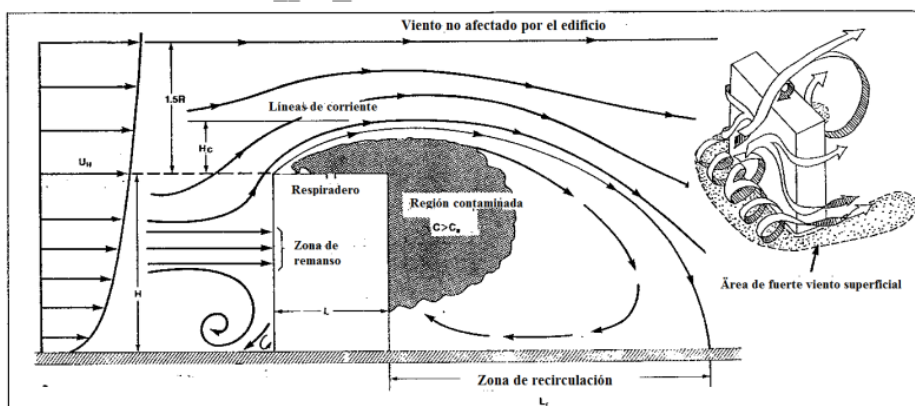
Fig. 20.1.



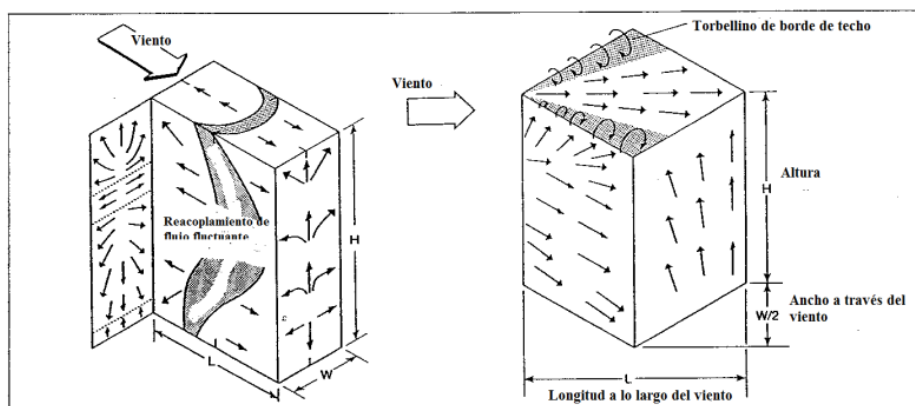
Distribuciones de probabilidad de velocidad y dirección del viento

La ventilación natural es muy sensible a la acción del viento sobre el edificio, pues genera presiones que varían a su alrededor y que tienen una gran influencia sobre los caudales del sistema de toma y de evacuación, y las tasas de infiltración y escape, y de presión en su interior. La presión del viento sobre una pared es el producto de la energía cinética por unidad de volumen de la corriente incidente por un coeficiente de presión. Es evidente que su cálculo exige promediar la distribución de velocidades del viento incidente en la superficie de pared y, según cuál sea la dirección del viento con respecto a la pared y la forma de esta, se adopta un coeficiente de presión de los conocidos, determinados sobre una maqueta en un túnel de viento.

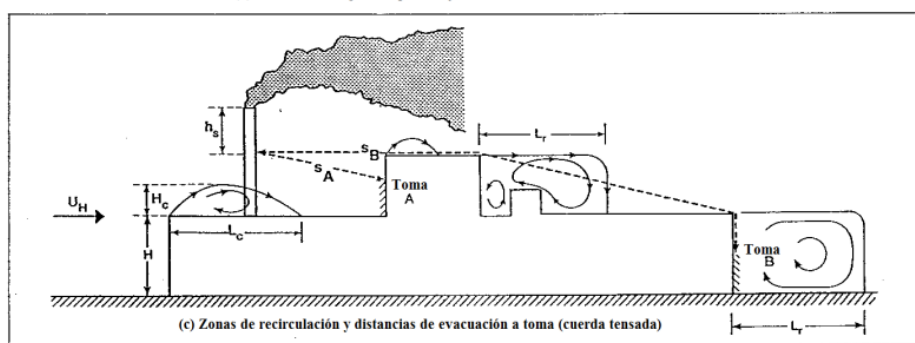
Fig. 20.2²



(a) Patrones de flujo alrededor de edificio rectangular



(b) Patrones de flujo en superficie y dimensiones de edificio

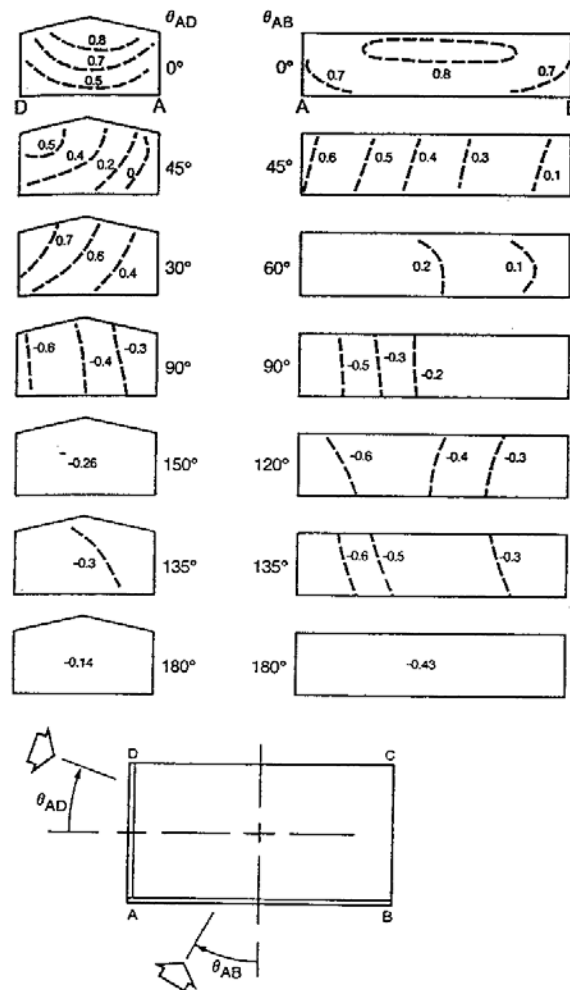


(Wilson 1982)

En la práctica, la información requerida es la diferencia de presión interior-externa determinada utilizando el coeficiente de presión $C_{p(i-e)}$ definido como $C_{p(i-e)} = C_p - C_{in}$. Las figuras 20.3, 20.4 y 20.5 muestran los coeficientes de presión en la pared, promediados espacialmente. El valor promedio para las cuatro paredes de un edificio es, aproximadamente, -0,2, independientemente de la dirección del viento. Ello lleva a concluir que, para “puntos de fuga de aire” distribuidos uniformemente, el coeficiente de presión interna inducida por el viento tiene por valor $C_{in} = -0,2$, aproximadamente.



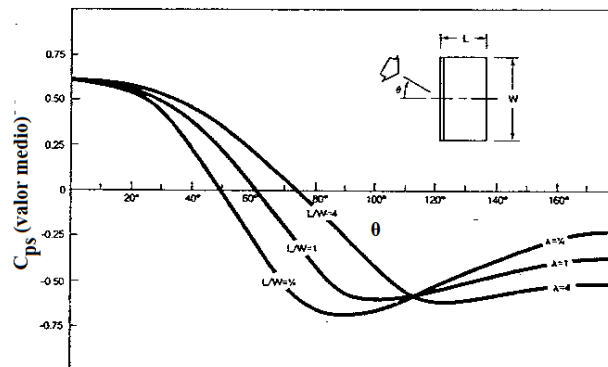
Fig. 20.3. Valores promedio de los coeficientes de presión sobre las paredes de edificios altos²



Valores promedio del coeficiente de presión sobre paredes de edificios de baja altura

(Holmes 1986)

Fig. 20.4
Variación de los valores medios de los coeficientes de presión en las paredes de edificios de baja altura.
(Swami y Chandra 1987)¹



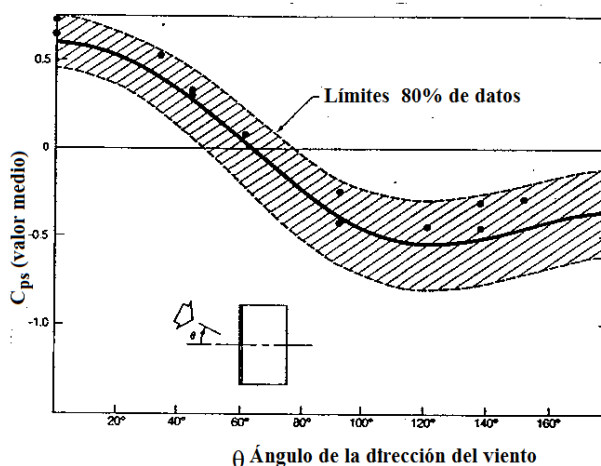


Fig. 20.5.
Valores promedio de los
coeficientes de presión
sobre las paredes de edi-
ficios altos²

En los sistemas de ventilación de un edificio que contiene contaminantes aerotransportados, el flujo de aire correcto se ha de dirigir hacia las áreas contaminadas, lo cual se consigue controlando la diferencia de presión entre los espacios.

Mecanismos promotores de la ventilación natural

Dos son esencialmente los mecanismos promotores de la ventilación natural: la diferencia de presión debida al viento y el gradiente térmico (diferencia entre la temperatura interior y exterior con respecto a la altura del edificio).

En el caso de que no exista diferencia de temperatura, la diferencia de presión entre los exteriores y los interiores de un edificio o recinto cualquiera se define por la ecuación $\Delta p = p_0 + p_v - p_i$, donde:

p_0 es la presión estática en la altura de referencia con la corriente no perturbada;

p_v es la presión del viento en el lugar donde se encuentra el edificio, y

p_i es la presión en el interior del edificio en el lugar donde se encuentra.

Cuando existe una diferencia de temperatura, surge un gradiente de presión Δp_s , que es función de la altura y de la diferencia de temperatura. Entonces, la diferencia de presión es:

$$\Delta p = p_0 + p_v - p_{i,v} + \Delta p_s \quad (20.1)$$

donde $p_{i,v}$ es la presión estática interior en una altura de referencia cuyo valor $(-\rho_i g)$ disminuye linealmente con la altura según una tasa que depende de la temperatura interior tal que el flujo entrante es igual al saliente.

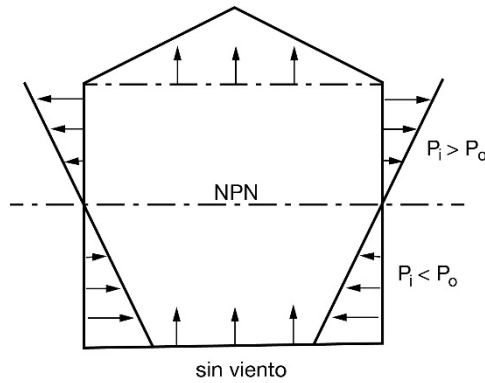
Las presiones del viento son generalmente positivas con respecto a la presión estática en la corriente de aire no perturbada sobre el costado de barlovento de un edificio y negativas sobre el costado de sotavento. Las presiones sobre los demás costados son negativas o positivas dependiendo del ángulo de incidencia del viento y la forma del edificio.

Swami y Chandra¹ han propuesto que entre el ángulo de incidencia del viento, la relación de tamaño del edificio y el coeficiente medio de presión en superficie existe la relación siguiente:

$$C_{p,n} = \ln \left[\begin{aligned} &1,248 - 0,703 \operatorname{sen} \left(\frac{a}{2} \right) - 1,175 \operatorname{sen}^2(a) + 0,131 \operatorname{sen}^3(2aG) + \\ &+ 0,769 \cos \left(\frac{a}{2} \right) + 0,07 G^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{a}{2} \right) + 0,717 \cos^2 \left(\frac{a}{2} \right) \end{aligned} \right] \quad (20.2)$$

donde C_{pn} es el valor normalizado del coeficiente de presión C_p , a es el ángulo en grados entre la dirección del viento y la normal hacia afuera de la pared considerada y G es el logaritmo natural de la relación entre el ancho de la pared bajo consideración y el ancho de la pared adyacente.

Fig. 20.6.



En cuanto a la distribución de presión en el interior de un edificio debida al efecto chimenea (diferencia entre la temperatura interior y la exterior), la figura 20.6 es una ilustración cualitativa. Se supone que la actividad realizada en el interior del edificio genera el calor suficiente para que en invierno no sea necesaria la calefacción, de manera que el aire interior, más caliente que el del exterior, se escapa por las aberturas de la parte superior del edificio, mientras que por las aberturas inferiores penetra aire exterior. Imaginando una pared como un gran ventanal abierto, la distribución de presiones interiores en función de la altura tendría una línea neutra (nivel de presión neutra o NPN), entendiéndose por tal el punto donde las presiones interior y exterior son iguales.

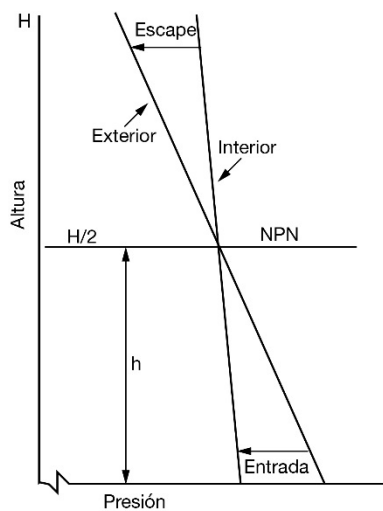
La diferencia de presión debida al efecto chimenea a la altura h es:

$$\Delta p_s = (\rho_o - \rho_i) g (h - h_{NPN}) = \rho_i (h - h_{NPN}) \left(\frac{T_i - T_o}{T_o} \right) \quad (20.3)$$

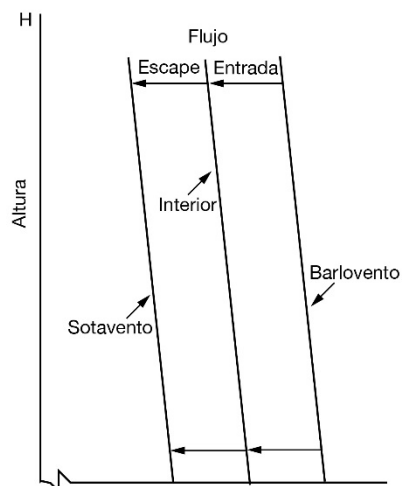
donde T es la temperatura del aire (i, interior; o, exterior).

La localización de la línea (nivel) de presión neutra sin viento es un parámetro que depende de la estructura del edificio, o sea, de la distribución vertical de aberturas de la fachada, de la resistencia de las aberturas al flujo de aire y de la resistencia al movimiento ascendente del aire dentro del edificio. Las particiones interiores, las cajas de escalera y de ascensor, los conductos, las chimeneas, los respiraderos y los sistemas de evacuación, etc., complican el análisis de localización del nivel neutro (NPN).

La figura 20.7 muestra la distribución de presiones interna y externa en función de la altura del edificio. La figura 20.8 ilustra el efecto chimenea en un edificio de pisos ideal según cuál sea su compartimentación en altura.

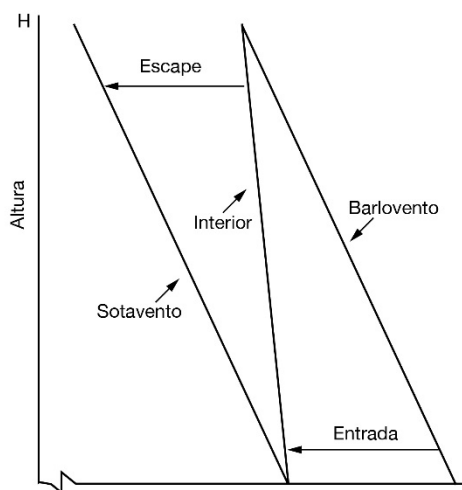


(a) Efecto chimenea



(b) Acción del viento de igual magnitud en sotavento y barlovento

Fig. 20.7.



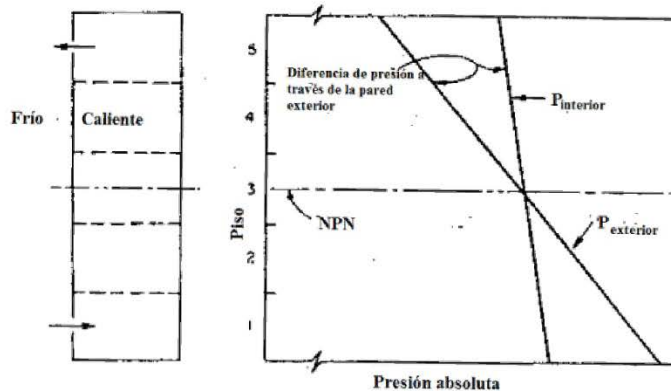
(c) Acción combinada del viento y de efecto chimenea



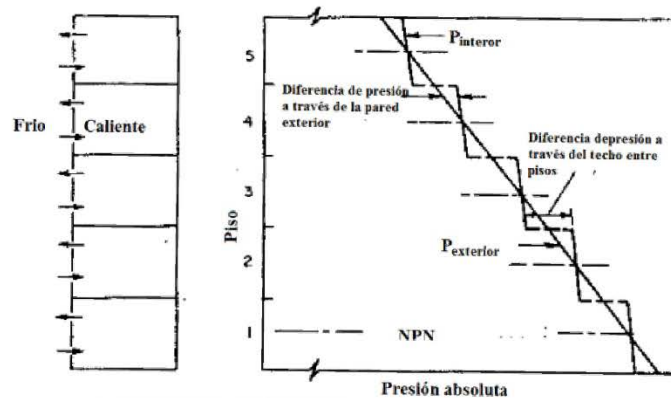
El flujo de aire a través de las aberturas

La ecuación que se utiliza habitualmente para cálculo del caudal de aire en régimen estacionario a través de aberturas es:

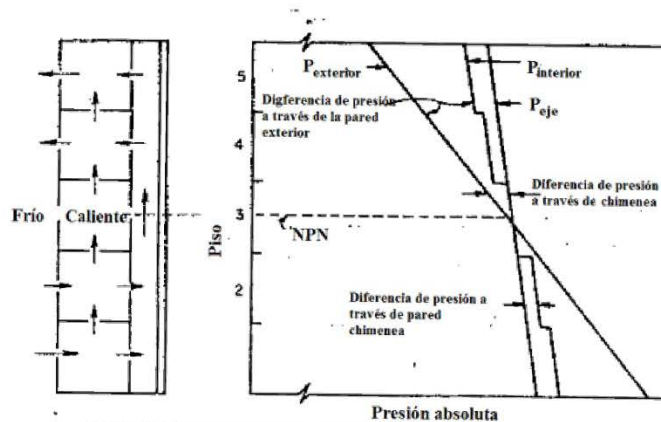
Fig. 20.8.
Efecto de chimenea
en un edificio de pi-
sos²



(a) Efecto chimenea en un edificio sin particiones internas



(b) Efecto chimenea en un edificio con separación estanca entre pisos



(c) Efecto chimenea en un edificio idealizado

$$\dot{V} = C_D A \left(\frac{2\Delta P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (20.4)$$

donde C_D es el coeficiente de descarga de la abertura, A es su área y ΔP es la diferencia de presión en la misma.

Las aberturas en la fachada de un edificio no tienen una geometría uniforme, por lo cual el flujo en ellas nunca se desarrolla completamente. Así, la aplicabilidad de la ecuación 20.4 es más bien limitada; en su lugar, se utiliza en ocasiones una ecuación de la forma:

$$\dot{V} = c (\Delta P)^n \quad (20.5)$$

donde n es un exponente adimensional experimental.

Los campos de presión que se ilustran en las figuras 20.7 y 20.8 indican que los efectos del viento y de chimenea se pueden combinar simplemente añadiendo las presiones, pero ello no es posible para los caudales.

Para aquellos casos en que la ventilación es una combinación de natural y forzada se han propuesto varios modelos teóricos y se han realizado algunas medidas.

Un modelo sencillo que combina los efectos del viento y la chimenea en edificios típicos utiliza la ecuación:

$$\dot{V}_{v, ch} = \left(\dot{V}_v^2 + \dot{V}_{ch}^2 \right)^{0.5} \quad (20.6)$$

Caudales de ventilación natural

La ventilación de un edificio o de cualquier otro recinto es necesaria siempre que se superan los estándares de calidad del medio ambiente respirable, ya sea por la actividad de los seres vivos que se encuentran en él, o bien por las actividades industriales o de otro tipo que allí se realizan.

La superación de esos estándares es debida, por una parte, al calor, ya sea como resultado de la temperatura de la atmósfera externa, o debido a las actividades que se realizan en el edificio o recinto. A ello hay que añadir la necesidad de mantener los niveles sanitarios, dictados por normas y reglamentos, y de polución ambiental (polvo, humo, vapores, humedad, etc.).

A título de ejemplo, el caudal de aire de ventilación requerido para extraer una cantidad de calor de un edificio se calcula mediante la ecuación:

$$\dot{V}_T = H / c_p \rho (\Delta T) \quad (20.7)$$

donde H es la cantidad de calor que ha de ser extraída y ΔT es el incremento de temperatura que se ha de producir en el caudal de aire que se ha tomado para la ventilación.

En principio, la ventilación natural ha de satisfacer, en el problema planteado, la condición $\dot{V}_{v, ch} = \dot{V}_T$, pero, para ello, es necesario que los caudales de infiltración y fuga lo permitan. Admitiendo que el caudal de infiltración debido a los efectos del viento y la chimenea se consigue con facilidad, también es verdad que su valor está condicionado por la capacidad de escape \pm fugas del edificio, que es función no solo de la diferencia



de presiones entre el interior y el exterior, sino también de la impedancia fluidodinámica de las aberturas disponibles para tal fin y del grado de estanqueidad intrínseca del edificio.

La fuga de aire de un edificio viene determinada por su diseño, la construcción, su deterioro y el clima exterior. No existe una relación simple entre la fuga de aire de un edificio y su tasa temporal de intercambio de aire, aunque se han propuesto diversos métodos de cálculo.

En algunos casos, el caudal de aire previsto se convierte en un área de fuga efectiva o equivalente mediante la ecuación:

$$A_{f,ef} = \dot{V}_{pr} / C_D \frac{2\Delta P_r}{\rho} \quad (20.8)$$

donde ΔP_r es la diferencia de presión de referencia y C_D es el coeficiente de descarga, aproximadamente 0,6.

Las áreas de fuga a una presión de referencia se pueden convertir a otras distintas mediante la ecuación:

$$A_{f,r2} = A_{f,r1} (C_{D1} / C_{D2}) (\Delta P_{r2} / \Delta P_{r1})^{n-0,5} \quad (20.9)$$

Por otra parte, un área de fuga a una presión de referencia se puede convertir a un caudal de aire a alguna otra presión de referencia por la ecuación:

$$\dot{V}_{r2} = C_{D1} A_{f,r1} (2 / \rho)^{0,5} (\Delta P_{r1})^{0,5-n} \cdot (\Delta P_{r2})^n \quad (20.10)$$

donde el valor del exponente n se encuentra generalmente entre 0,6 y 0,7.

ASHRAE Standard 119-1988 establece los niveles de fuga de aire de los edificios residenciales en términos de la fuga normalizada $A_{f,n}$, definida por la ecuación siguiente:

$$A_{f,n} = 4,477 \cdot \left(\frac{A_f}{A} \right) \cdot \left(\frac{H}{H_0} \right)^{0,3} \quad (20.11)$$

donde H_0 , la altura de referencia del edificio de un piso, es de 3,28 m y A es el área del piso entre las paredes exteriores.

Las carcasas de edificio de los grandes espacios comerciales se construyen de modo que sean completamente estancas. La fuga máxima por unidad de área de pared exterior es de 0,0183 m³/m²·minuto, con una diferencia de presiones de 7,6 mm de C.A. En los edificios de oficinas, se alcanzan valores de entre 0,03 y 0,18 m³/m²·minuto bajo las mismas condiciones.

Además de temas sobre los modelos de cálculo de intercambio de aire en los edificios y las directrices para proyectos de ventilación natural propios de tratados técnicos, en este capítulo interesa exponer los fundamentos fluidodinámicos del flujo en el interior de un edificio y del cálculo del intercambio-renovación de aire en él con base en los conocimientos que ya se han expuesto y otros particularmente relacionados con el problema objeto de estudio. A tal efecto, se estudia, en primer lugar, la circulación del aire en el interior de un recinto con fuentes de calor.

(Ver [Lin99])

20.4 La circulación del aire en el interior de un recinto con fuentes de calor

Sea $T_i > T_a$ (temperatura ambiente) en un edificio con aberturas a niveles distantes H metros. Entonces, la diferencia de presión debida a la diferencia de densidad del aire es:

$$\Delta P = gH(\rho_a - \rho_i)$$

Como consecuencia de esta diferencia de presión, el aire se moverá de tal manera que su pérdida de carga asociada satisfará la relación $\Delta P_f \leq \Delta P$.

Las características de las corrientes naturales son, en general, bastante complejas; por ello, para su estudio se recurre con frecuencia a experimentos sobre modelos a escala reducida. Para que los resultados experimentales sean extrapolables al problema real, se han de respetar determinadas reglas de semejanza, aunque los expertos saben bien que siempre se encuentran diferencias entre el modelo y la realidad.

El tratamiento analítico de los datos obtenidos en los experimentos sobre el modelo se realiza aplicando la ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de la energía. La primera conduce a dos grupos adimensionales importantes: el número de Reynolds, de significado ya conocido, y el número de Arquímedes Ar , cuya fórmula es:

$$Ar = \frac{g\beta L(\Delta T)}{V^2} \quad (20.12)$$

Además de este número de semejanza, que representa la relación de los términos de empuje ascensional y las fuerzas de inercia, la ecuación de la energía introduce el número de Prandtl $Pr = \nu / \alpha$ como relación entre la difusividad de cantidad de movimiento y la difusividad térmica.

Para simular la convección natural, se transforma el número de Arquímedes de manera que ya no contenga la velocidad, pues es una magnitud de la cual es difícil encontrar un valor de referencia. La transformación idónea conduce al número de Grashof, que representa la relación entre las fuerzas de empuje ascensional térmico y las fuerzas viscosas. Su fórmula de definición es:

$$Gr = ArRe^2 = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2} \quad (20.13)$$

Mucha y variada es la información virtual disponible sobre circulación del aire en el interior de un edificio resultante de ensayos de ventilación natural en modelos.

La figura 20.9 es un ejemplo de la simulación de la circulación del aire en un edificio de una sola nave con un foco de calor situado en el centro. La figura 20.10 muestra los resultados, obtenidos en un modelo, de la diferencia de temperatura y de flujo másico de aire renovado en función del área de las aberturas y de los parámetros caudal de aire y flujo de calor emitido por un horno situado en el centro de una nave industrial. Los resultados experimentales demuestran que la diferencia de temperatura en la zona de trabajo $\Delta t_{zt} = t_{zt} - t_a$ y la diferencia total de temperatura de salida $\Delta t_e = t_e - t_a$, —donde los subíndices zt , e y a indican zona de trabajo, escape (salida) y *ambiente exterior*, respec-



tivamente— son interdependientes. Además, dichas diferencias son idénticas en dos edificios, uno alto y otro bajo, con el mismo sistema de ventilación cuando son iguales las cargas térmicas específicas $\dot{q} = \dot{Q} / V$ (Kcal/m³h).

Fig. 20.9. Circulación de aire en el modelo de una nave industrial con fuente de calor [Bat76]

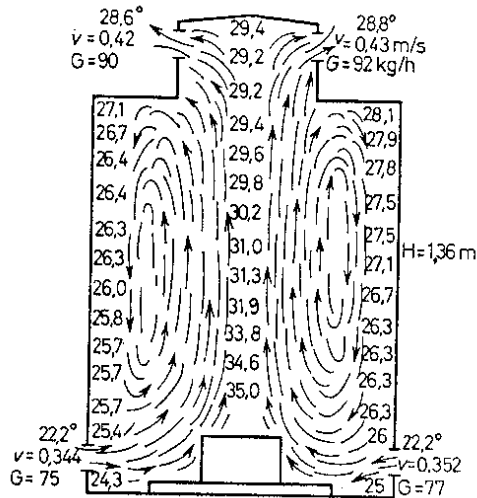
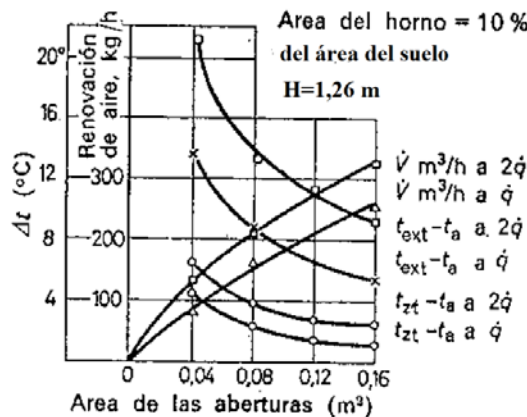


Fig. 20.10. Diferencia de temperatura y flujo másico de aire renovado [Bat76]



20.5 Cálculo de la renovación de aire en un taller de una sola nave

A título de ejemplo, como aplicación de los conocimientos expuestos en anteriores apartados, en este se explica cómo se calcula la renovación de aire en un taller de una sola nave para evacuar una cantidad de calor generada por las actividades que se realizan en él. Las hipótesis de partida son las siguientes:

- Se considera que el aire se encuentra en estado estacionario.
- La temperatura del aire en todo punto de la nave es constante.
- La presión del aire en un plano horizontal es también constante.
- La diferencia de presión del aire entre planos paralelos es estática.

- La resistencia fluidodinámica en el interior de la nave es despreciable.
- Las corrientes de aire procedentes de las aberturas y de las fuentes de calor se desvanecen antes de que alcancen las paredes.
- La infiltración de aire en la nave es despreciable, comparada con la masa de aire que se debe renovar por ventilación natural.
- La distribución de presiones sobre el edificio debida al viento es la misma que corresponde a un modelo sólido.

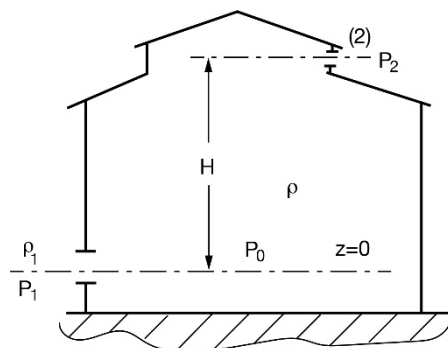


Fig. 20.11.

En la nave, cuyas características geométricas se muestran en la figura 20.11, sea:

A, área de la abertura (m^2)

C_d coeficiente de descarga de la abertura

\dot{m} flujo másico

ρ densidad del aire (kg/m^3)

ΔP diferencia de presión en la abertura (Pa)

V velocidad del viento

K coeficiente de presión local

H diferencia de altura entre las aberturas de evacuación y las de entrada

\dot{Q} flujo de calor que debe evacuarse

\dot{m}_c flujo másico de contaminantes procedente de fuentes internas (kg/s)

c_0 concentración de contaminantes admisible en el interior de la nave

En general, se han de satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\sum \dot{m}_e = \sum \dot{m}_s \quad (20.14)$$

$$\sum \dot{m}_s = \frac{\dot{Q}}{c_p (T_s - T_e)} \quad (20.15)$$

$$p_z = p_{i1} - gH(\rho_z - \rho_{i1}) \quad (20.16)$$



$$\dot{m} = C_d \cdot A \cdot \rho \left(\frac{2\Delta P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (20.17)$$

$$p_v = K \rho_a \frac{V^2}{2} \quad (20.18)$$

Se consideran los casos siguientes:

1. Determinar las características de las aberturas de barlovento y sotavento de un edificio expuesto al viento que carece de fuente interna de calor y de contaminantes, en el supuesto de que el flujo másico de renovación de aire ha de ser \dot{m} (kg/s).
2. Igual que (1), pero con fuentes internas de calor, de modo que $\rho_i < \rho_a$.
3. Conocida la masa de contaminantes (o de calor) producida por unidad de tiempo, establecer las ecuaciones que definen la masa de aire que se debe renovar de acuerdo con las concentraciones inicial y final (o las temperaturas en la entrada y en la salida del edificio) que se especifiquen y, en consecuencia, el área necesaria en las aberturas de las paredes y del techo para que se pueda efectuar esta renovación.

Solución:

1. Sea $z = 0$ el nivel a que se encuentra la abertura de entrada, en que la presión del viento es p_1 y $z = H$ es el nivel a que se encuentra la abertura superior (evacuación), donde la presión del viento (sotavento) es p_2 .

Sea p_0 la presión del aire en el interior de la nave en $z = 0$. Como quiera que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$, se ha de verificar:

$$\left[C_d A \rho \left(2 \frac{\Delta p}{\rho} \right)^{1/2} \right]_e = \left[C_d A \rho \left(2 \frac{\Delta p}{\rho} \right)^{1/2} \right]_s$$

donde $\Delta p_e = p_1 - p_0$ y $\Delta p_s = p_0 - \rho_1 g H - (p_2 - \rho_1 g H) = p_0 - p_2$

Admitiendo que $T = \text{Ccte.}$ para todo z , resulta $\rho = \rho_1$ y

$$(C_d A)_e^2 (p_1 - p_0) = (C_d A)_s^2 (p_0 - p_2),$$

o sea:

$$p_0 = \frac{(C_d A)_e^2 p_1 + (C_d A)_s^2 p_2}{(C_d A)_e^2 + (C_d A)_s^2}$$

de modo que, si $(C_d A)_e = (C_d A)_s$, entonces $p_0 = (p_1 + p_2) / 2$

Conocidos los valores de p_1 y p_2 , se determina p_0 y los valores de $C_d A$ correspondientes a la entrada y la salida. Supóngase ahora que hay una tercera abertura al nivel $z = 0$; entonces, la diferencia de presión en esta tercera abertura será $p_0 - p_3$, donde p_3 será la presión del viento en $z = 0$ a sotavento y p_0 resultará de resolver la ecuación de conservación de la masa en el volumen de control asociado al edificio,

que dependerá de si p_3 es mayor, igual, o menor que p_0 (acción del viento sobre el edificio).

Regulando el área efectiva de las aberturas de ventilación, se puede conseguir un valor de p_0 tal que las aberturas (1) y (3) admitan aire. Este sistema es el mejor porque el aire entra al taller por ambos lados.

2. En este caso tenemos:

Presión interna al nivel de H, $p_{iH} = p_{i0} - g\rho_i H$

Presión externa al nivel de H, $p_2 - g\rho_a H$

Diferencia de presión en la(s) abertura(s) al nivel de H:

$$p_{i0} + gH(\rho_a - \rho_i) - p_2 = p - [p_{i0} - gH(\rho_a - \rho_i)]$$

La expresión entre corchetes puede considerarse que representa la presión del viento en la abertura (2), que, en ausencia de fuente de calor, produciría el mismo caudal que origina la combinación de las diferencias de temperatura y de presión del viento en la realidad. Se denomina *presión ficticia del viento*.

Este concepto simplifica considerablemente el análisis de la renovación de aire, especialmente en los talleres de muchas naves, y evita la consideración de la presencia de fuentes de calor. El problema queda reducido así al de las naves isotermas.

3. Caso de fuentes de calor:

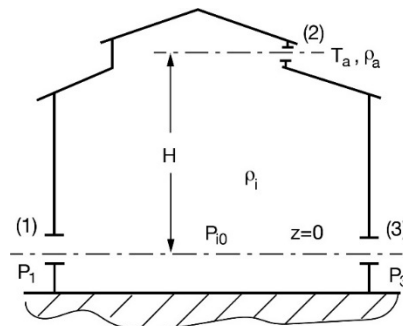


Fig. 20.12.

Sea la nave representada en la figura 20.12. Las ecuaciones requeridas son las siguientes:

Flujos máxicos: $\dot{m}_e = \dot{m}_1 + \dot{m}_3$

$$\dot{m}_s = \dot{m}_e$$

$$\dot{m}_s = \frac{\dot{Q}}{c_p(T_s - T_a)}$$

Diferencias de presión:

$$(\Delta p)_1 = p_1 - p_{i0}$$

$$(\Delta p)_3 = p_3 - p_{i0}$$



Área de las aberturas:

$$A_1 = \dot{m}_1 / C_{d1} \left(2 \cdot \rho_a (\Delta p)_1 \right)^{1/2}$$

$$A_2 = \dot{m}_2 / C_{d2} \left(2 \cdot \rho_i (\Delta p)_2 \right)^{1/2}$$

$$A_3 = \dot{m}_3 / C_{d3} \left(2 \cdot \rho_a (\Delta p)_3 \right)^{1/2}$$

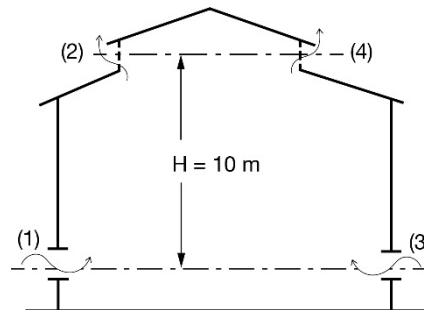
Ejemplo

Calcula el caudal de renovación de aire para ventilación natural de una nave industrial cuya sección recta se muestra en la figura 20.13, en que se genera un calor de 500 Kcal/s, con base en los datos siguientes:

- Techo de la nave con lucernario protegido por pantallas contra el viento.
- Velocidad del viento, 4 m/s
- Temperatura del aire ambiente, 15°C
- Temperatura límite del aire en la nave, 25°C
- Coeficientes de presión del viento:

$$C_{p1} = 0,6 \quad , C_{p2} = -0,5 \quad , C_{p4} = -0,4 \quad , C_{p3} = 0,3$$

Fig. 20.13.



Supuesta una abertura del β % del área de la abertura a sotavento de la nave, y que el coeficiente de descarga de todas las aberturas vale 0,6, determina:

1. La presión del aire en el interior de la nave al nivel del plano medio de cada abertura.
2. El área de cada abertura con la condición de que $\dot{m}_1 = \dot{m}_3$, y el valor de β .

Se supondrá $P_{at} = 1 \text{ bar}$

El flujo másico de aire que se ha de renovar para mantener la temperatura de la nave a 25°C es:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{0,24(\Delta T^\circ)} = \frac{500}{0,24(25-15)} = 208,33 \text{ Kkg/s}$$

El caudal será:

$$\dot{V} = \dot{m} / \rho_1 = \dot{m} R T_a / P_{at} = 208,33 \cdot 287,14 \cdot \frac{273+15}{10^5} = 172,28 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Solución:

Para dar respuesta a la primera pregunta, se han de hacer dos supuestos:

- (i) La temperatura del aire en el interior de la nave es uniforme e igual a 25°C.
- (ii) La entrada de aire del exterior se realiza de manera que la mezcla es casi instantánea y perfecta.

1. La presión dinámica del viento es $p_d = \rho \frac{V^2}{2} = 1,21 \cdot \frac{(4)^2}{2} = 9,68 \text{ Pa}$ y la ejercida realmente en cada abertura es:

$$p_1 = C_{p1} p_d = 0,6 \cdot 9,68 = 5,808 \text{ Pa}$$

$$p_2 = C_{p2} p_d = -0,5 \cdot 9,68 = -4,84 \text{ Pa}$$

$$p_3 = C_{p3} p_d = 0,3 \cdot 9,68 = 2,904 \text{ Pa}$$

$$p_4 = C_{p4} p_d = -0,4 \cdot 9,68 = -3,872 \text{ Pa}$$

Para el cálculo de las presiones en el interior del edificio, se han de plantear las ecuaciones de conservación y de flujo a través de las aberturas. Son las siguientes:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_4$$

$$C_{d1} A_1 (2\rho_1 (p_1 - p'_1))^{\frac{1}{2}} + C_{d3} A_3 (2\rho_1 (p_3 - p'_1))^{\frac{1}{2}} = C_{d2} A_2 (2\rho'_2 (p_{2i} - p_{2e}))^{\frac{1}{2}} + C_{d4} A_4 (2\rho'_2 (p_{4i} - p_{4e}))^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Ahora bien:

$$C_{d1} = C_{d2} = C_{d3} = C_{d4} \text{ y } A_2 + A_4 = \beta A_3$$

Tomando como presión de referencia la presión atmosférica efectiva exterior, que al nivel (1) es nula, se obtiene:

$$p_1 = 5,808 \text{ Pa}, \quad p_{2i} = p'_1 - \rho'_2 gH = p_{4i}, \quad p_{2e} = p_2 - \rho_1 gH, \quad p_{4e1} = p_4 - \rho_1 gH$$

Sustituyendo valores en la ecuación 20.1, agrupando términos y simplificando, se obtiene:

$$\rho_1 A_1 (p_1 - p'_1)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 A_3 (p_3 - p'_1)^{\frac{1}{2}} = \rho'_2 A_2 [p'_1 - p_2 + gH (\rho_1 - \rho'_2)]^{\frac{1}{2}} + \rho'_2 A_4 [p'_1 - p_4 + gH (\rho_1 - \rho'_2)]^{\frac{1}{2}}$$



Como quiera que $\rho_1 A_1 (p_1 - p'_1)^{1/2} = \rho_1 A_3 (p_3 - p'_1)^{1/2}$, resulta $p'_1 = \frac{\left(\frac{A_1}{A_3}\right)^2 p_1 - p_3}{\left(\frac{A_1}{A_3}\right)^2 - 1}$.

Por otra parte, $\dot{m} = 2C_d A_1 \left[2\rho_1 (p_1 - p'_1) \right]^{1/2}$.

Se constata que la solución para p'_1 requiere adoptar un valor para A_1 / A_3 con la condición de que $A_1 < A_3$. Se adopta, por ejemplo, $A_1 / A_3 = 0,8$; ; por consiguiente:

$$p'_1 = \frac{0,64 p_1 - p_3}{0,64 - 1} = \frac{0,64 \cdot 5,808 - 2,904}{-0,36} = -2,2587 \text{ Pa}$$

$$A_1 = \frac{\dot{m}}{2C_d \left[2\rho_1 (p_1 - p'_1) \right]^{1/2}} = \frac{208,33}{2 \cdot 0,6 \left[2 \cdot 1,21 (5,808 + 2,2588) \right]^{1/2}} = 39,29 \text{ m}^2$$

$$A_3 = A_1 / 0,8 = 49,116 \text{ m}^2$$

A su vez, $\dot{m} = \rho'_2 A_2 \left[p'_1 - p_2 + gH (\rho_1 - \rho'_2) \right]^{1/2} + \rho'_2 A_4 \left[p'_1 - p_4 + gH (\rho_1 - \rho'_2) \right]^{1/2}$

Sustituyendo valores sabiendo que:

$$\rho'_2 = p_{1,abs} / RT_2 = (100.000 - 2,2588) / 287,14 (273 + 25) = 1,1686 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

se obtiene:

$$208,33 = 1,1686 (2,577 A_2 + 2,382 A_4)$$

Además, $A_2 + A_4 = \beta A_3 = 49,116 \beta \rightarrow \frac{A_2}{A_4} + 1 = \frac{49,116 \beta}{A_4}$; luego:

$$178,273 = 2,577 A_2 + 2,382 A_4 = 2,577 A_4 \left(\frac{A_2}{A_4} + 2,382 \right) = 2,577 A_4 \left(\frac{49,116 \beta}{A_4} - 1 + 2,382 \right)$$

O sea: $69,178 = 49,116 \beta + 1,382 A_4$

Entonces, para $A_4 = 0 \rightarrow \beta_{min} = 1,4085 \rightarrow A_2 = 49,116 \beta - A_4 (=0) \rightarrow A_2 = 69,18 \text{ m}^2$

(Ver [Kar93])

20.6 Ventilación forzada

Por *ventilación forzada*, se entiende el procedimiento de movimiento y renovación de aire para controlar el nivel de contaminación mediante una acción mecánica, generalmente por ventiladores.

La ventilación forzada proporciona el máximo potencial para el control de la tasa de intercambio de aire y distribución dentro de un edificio. La ventilación forzada generalmente es obligatoria en los grandes edificios, donde se requiere un mínimo de aire exterior para la salud y el bienestar de sus ocupantes, y cuando es aconsejable o necesario un sistema mecánico de evacuación.

Tres son básicamente las técnicas de ventilación forzada: por desplazamiento, por mezcla-dilución-evacuación, y por combinación de las anteriores.

20.6.1 Ventilación por desplazamiento

El principio de ventilación por desplazamiento es el barrido del aire del recinto por el aire suministrado. Dependiendo de la aplicación, la ventilación por desplazamiento puede conseguirse normalmente por tres vías: suministro desde la pared lateral (flujo transversal), suministro desde el suelo (flujo ascendente) y suministro desde el techo (flujo descendente). Los sistemas de flujo ascendente y flujo descendente son los más utilizados, pero, debido a que el sistema de flujo descendente produce corrientes de aire en la dirección opuesta a las corrientes de ventilación natural producidas por las fuentes térmicas a nivel bajo, pueden darse modelos de flujo de aire inestables. En un sistema de corriente ascendente, el aire se suministra en la misma dirección que las corrientes naturales, aunque se impone normalmente una limitación al valor de la velocidad del aire introducido en el recinto para evitar corrientes singulares en la zona ocupada.

Linke³ estudió los sistemas de flujo ascendente y descendente estableciendo valores críticos del número de Arquímedes definido en términos de la altura H , que es la dimensión más significativa en la ventilación por desplazamiento.

Una práctica común en la ventilación por desplazamiento consiste en definir el número de Arquímedes introduciendo en él el número de renovaciones por horas N del volumen de aire del recinto. Mediante este concepto, el caudal de aire que se ha de introducir en el recinto a ventilar es $\dot{V} = N / 3.600$; así, la velocidad de desplazamiento del aire en un recinto cuya área de la sección transversal A es $v_d = \dot{V} / A = NH / 3.600$.

Introduciendo esta magnitud en la definición clásica del número de Arquímedes, se obtiene:

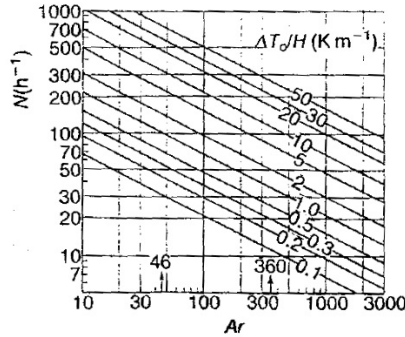
$$Ar = (3.600)^2 g \beta \Delta T_0 / N^2 H \quad (20.19)$$

La relación entre N y Ar para diferentes valores de $\Delta T_0 / H$ se muestra en la figura 20.14.

En caso de que la ventilación tenga que evacuar un flujo de calor $\dot{q} = \dot{Q} / A$ (W/m^2), denominado *carga de refrigeración del recinto*, la ecuación de Arquímedes se escribe:

$$Ar = (3.600)^3 g \beta q / \rho c_p N^3 H^2 \quad (20.20)$$

Fig. 20.14.

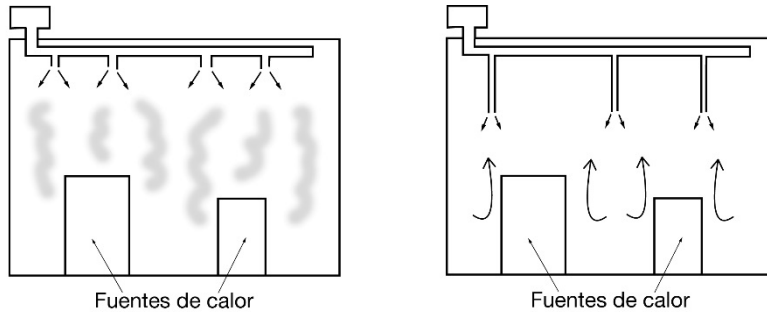


ecuación que resulta de sustituir ΔT_0 en la ecuación 20.19 por el valor obtenido a partir de la carga de refrigeración $\dot{q} = \rho c_p N H \Delta T_0 / 3.600$.

Sustituyendo los valores estándar de g , ρ y c_p en la ecuación 20.20, la tasa de renovación de aire viene dada por:

$$N = 108,93 \left[\dot{q} / (H^2 Ar) \right]^{1/3} \quad (20.21)$$

Fig. 20.15
Ventilación por desplazamiento descendente para cargas térmicas muy concentradas: (a) mala distribución de aire, (b) buena distribución de aire



Según Linke,³ el modelo de movimiento estable de aire se logra en un sistema de flujo descendente cuando $Ar \leq 46$ (v. figura 20.15), y en un sistema de flujo ascendente cuando es inferior o igual a 360. A partir de estos límites, la tasa crítica (mínima) de renovación de aire para los dos sistemas viene dada por:

– Flujo descendente
$$N_c = 30,4 \left(\dot{q} / H^2 \right)^{1/3} \quad (20.22)$$

– Flujo ascendente
$$N_c = 15,3 \left(\dot{q} / H^2 \right)^{1/3} \quad (20.23)$$

Estas dos ecuaciones muestran que, para un movimiento estable del aire en el recinto, un sistema de desplazamiento ascendente requiere la mitad de la tasa de renovación de aire de un sistema de desplazamiento hacia abajo para extraer la misma carga.

Un sistema de desplazamiento ascendente es el más apropiado para recintos con grandes cargas térmicas (hasta 700 w/m²), como sucede en los teatros y auditorios, en las salas de ordenadores, en las naves de procesamiento industrial, etc.

20.6.2 Ventilación por dilución (mezcla)

La ecuación fundamental de partida es un balance de masa diferencial que relaciona los requisitos de ventilación por dilución con las tasas temporales de generación y extracción de contaminantes.

Su expresión es:

$$VdC = Gdt - \dot{V}' Cdt \quad (20.24)$$

donde:

$\dot{V}' = \dot{V} / k$ es la tasa efectiva de ventilación considerando que la mezcla no es perfecta.

\dot{V} , es el caudal de renovación (m^3/s).

C , es la concentración de contaminantes en el instante t (ppm).

G , es la tasa de generación de contaminantes (m^3/s).

k , es el factor de mezcla ($3 \leq k \leq 10$).

Antes de resolver la ecuación 20.24, es fundamental establecer un procedimiento para estimar el valor de k . Si la ventilación fuera por renovación del aire viciado mediante un flujo tapón de aire nuevo, entonces $k = 1$. En la práctica, sin embargo, la introducción de aire nuevo en una sala produce una mezcla turbulenta con el aire contaminado de manera que, después de una renovación, el aire de la sala contiene todavía una mezcla de dilución de aire nuevo y aire contaminado. La literatura sobre el tema aporta criterios y factores que se han de tener en cuenta al seleccionar el valor de k .

Algunas soluciones de la ecuación 20.24 son las siguientes:

1. Tasa temporal de aumento de concentración de contaminantes

Reordenando la ecuación de ventilación por dilución e integrando, resulta:

$$\int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{G - \dot{V}' C} = \frac{1}{\dot{V}'} \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (20.25)$$

$$\text{O sea:} \quad \ln \left(\frac{G - \dot{V}' C_2}{G - \dot{V}' C_1} \right) = - \frac{\dot{V}'}{\dot{V}} (t_2 - t_1) \quad (20.26)$$

Para el caso de $C_1 = 0$ en $t_1 = 0$, se obtiene:

$$t = - \frac{\dot{V}}{\dot{V}'} \ln \left(\frac{G - \dot{V}' C}{G} \right) \quad (20.27)$$

La ecuación 20.27 indica el tiempo que se requiere para que, en un recinto de volumen V , se produzca un incremento de concentración C de contaminantes con una tasa de generación G y una tasa efectiva de ventilación \dot{V}' .

2. Mantenimiento de concentraciones aceptables en estado estacionario



Sea C la concentración de contaminantes en un recinto; su mantenimiento en estado estacionario implica $dC = 0$. Entonces, la ecuación 20.24 resulta:

$$Gdt = \dot{V}' C dt \quad (20.28)$$

Para el caso de una tasa de generación uniforme y una concentración constante:

$$G \int_{t_1}^{t_2} dt = \dot{V}' C \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (20.29)$$

Integrando y simplificando, se obtiene:

$$G = \dot{V}' C ; \text{ luego, } \dot{V}' = kG / C \quad (20.30)$$

La ecuación 20.30 se puede utilizar para el cálculo del caudal de aire de dilución no contaminado requerido para reducir la concentración ambiente de un compuesto peligroso a un nivel aceptable.

3. Tasa temporal de purga

Para calcular la tasa temporal de disminución de concentración de un contaminante en el curso de un período de tiempo en que se contamina un volumen de aire y cesa el proceso de generación de contaminantes, la ecuación de ventilación por dilución, se integra con la condición $Gdt = 0$. Resulta:

$$\int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{C} = -\frac{\dot{V}'}{V} \int_{t_1}^{t_2} dt \rightarrow \ln \frac{C_2}{C_1} = -\frac{\dot{V}'}{V} (t_2 - t_1) \quad (20.31)$$

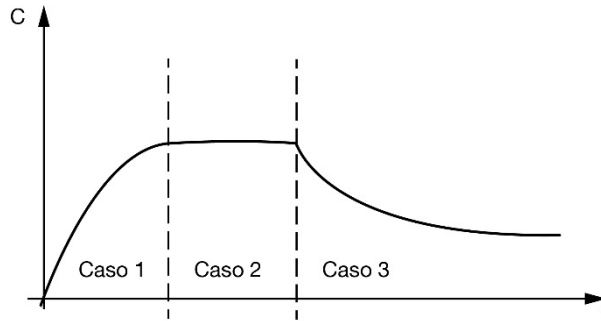
Por consiguiente:

$$\Delta t = -\frac{V}{\dot{V}'} \ln \frac{C_2}{C_1} \quad (20.32)$$

Así, Δt es el tiempo que debe transcurrir para que la contaminación inicial C_1 de un recinto de volumen V pase a valer C_2 , con una tasa de ventilación efectiva \dot{V}' .

La evolución temporal de la concentración de contaminantes en un recinto en cada uno de los casos considerados se muestra en la figura 20.16.

Fig. 20.16.
Concentración de
contaminante en
función del tiempo
para diferentes
condiciones de
ventilación por di-
lución



20.6.3 Ventilación por dilución sin recirculación y con recirculación

La figura 20.17 muestra un esquema de un sistema de ventilación por dilución sin recirculación.

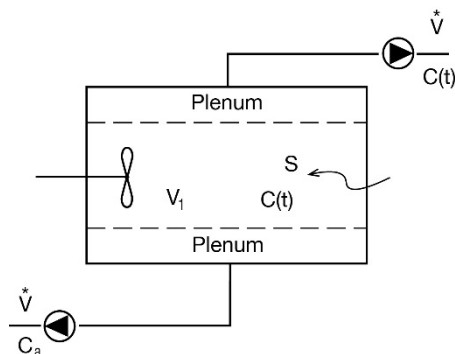


Fig. 20.17.

Sean:

V , el volumen del recinto (m^3)

\dot{V} , el caudal de aire exterior introducido en el recinto (m^3/s)

C_a , la concentración de contaminantes en el aire introducido (ppm)

C_0 , la concentración inicial de contaminante en el recinto (ppm)

S , la fuente de contaminante en el interior del recinto (ppm/s)

Aplicando el principio de conservación a la masa de contaminantes, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{d(VC)}{dt} = \dot{V}C_a - \dot{V}C + S \quad (20.33)$$

Integrando la ecuación 20.33 entre los límites $t = 0, C = C_0$ y $t, C = C(t)$, resulta:

$$\frac{C_e - C(t)}{C_e - C_0} = \exp\left(-\frac{\dot{V}t}{V}\right) \quad (20.34)$$

donde C_e es la concentración de contaminantes de estado estacionario $C_e = C_a + \frac{S}{\dot{V}}$.

En caso de que tanto la concentración inicial como la concentración ambiente sean cero, la ecuación 20.35 se reduce a:

$$\frac{C(t)}{C_e} = 1 - \exp\left(-\frac{\dot{V}t}{V}\right) = 1 - \exp(-Nt) \quad (20.35)$$

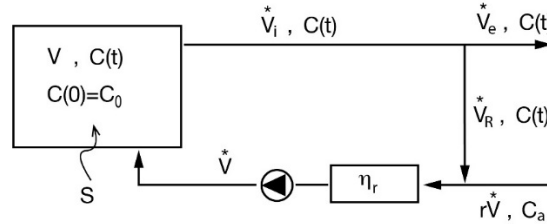
En caso de ventilación por dilución con recirculación (v. figura 20.18), la ecuación 20.33 se escribe:



$$V \frac{dC}{dt} = \dot{V} C_i + S - \dot{V} C \quad (20.36)$$

$V \frac{dC}{dt} = \dot{V} C_i + S - \dot{V} C$ donde C_i es la concentración de contaminante en el aire que entra al recinto.

Fig. 20.18.



El valor de C_i se puede encontrar aplicando la ecuación de conservación de masa al colector, que se escribe:

$$\dot{V} C_i = (C \dot{V}_R + r \dot{V} C_a) (1 - \eta_f) \rightarrow C_i = r C_a + (1 - r) C \quad (20.37)$$

donde \dot{V}_R es el caudal recirculado $\dot{V}_R = (1 - r) \dot{V}$ y η_f es el rendimiento de un dispositivo de filtrado del aire situado en el circuito.

Sustituyendo la ecuación 20.37 en la ecuación 20.36, resulta:

$$V \frac{dC}{dt} = -C \dot{V} [1 - (1 - r)(1 - \eta_f)] + S + \dot{V} r C_a (1 - \eta_f) \quad (20.38)$$

En el estado estacionario, las condiciones son $\frac{dC}{dt} = 0 \rightarrow C = C_e$; por consiguiente, de la ecuación se deriva:

$$C_e = \frac{S + \dot{V} r (1 - \eta_f) C_a}{\dot{V} [1 - (1 - \eta_f)(1 - r)]} \quad (20.39)$$

Si la concentración de contaminante en el aire ambiente es depreciable $C_a \rightarrow 0$, la concentración de estado estacionario es:

$$C_e = \frac{S}{\dot{V} [1 - (1 - \eta_f)(1 - r)]} \quad (20.40)$$

Para encontrar la concentración en cualquier instante t , se puede integrar la ecuación 20.38 a partir de la condición inicial $t \Rightarrow C = C_0$. Se obtiene:

$$\frac{C_e - C(t)}{C_e - C_0} = \exp \left[-\frac{\dot{V} t}{V} \{1 - (1 - \eta_f)(1 - r)\} \right] \quad (20.41)$$

Ejemplo

En una sala-laboratorio químico de 250 m^3 de volumen, se produce un incendio que la llena de humo que contiene HCN. Una vez extinguido el fuego, la concentración de humo en la sala es de 100 g/m^3 que contienen un 10 % en masa de HCN, y de 1 mg/m^3 en el aire del exterior como consecuencia de las fugas. El sistema de emergencia del laboratorio ha puesto en funcionamiento un sistema de ventilación capaz de introducir en la sala un caudal de aire tomado del exterior de la sala de $1 \text{ m}^3/\text{s}$. El problema consiste en saber el lapso de tiempo que debe transcurrir para que pueda entrar una persona, una vez extinguido el fuego, sabiendo que el umbral de seguridad está en una concentración de HCN de 5 mg/m^3 .

Resolución:

La ecuación de conservación aplicada a la evolución temporal de la concentración de HCN en la sala se expresa:

$$V \frac{dC}{dt} = C_a \dot{V} - C \dot{V} = -\dot{V} (C - C_a)$$

Integrando entre los límites $t = 0$, $C = C_0$ y $C = 5 \text{ mg/m}^3$, transcurrido el tiempo t , resulta:

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{(C - C_a)} = -\frac{\dot{V}}{V} \int_0^t dt \rightarrow [\ln(C - C_a)]_{C_0}^C = -\frac{\dot{V}t}{V} \rightarrow \frac{C - C_a}{C_0 - C_a} = \exp\left(-\frac{\dot{V}t}{V}\right)$$

Sustituyendo valores en las mismas unidades, se obtiene:

$$\frac{5-1}{10.000-1} = \exp\left(-\frac{1}{250}t\right) \rightarrow t = 1.956 \text{ s} \cong 0,54 \text{ horas}$$

(Ver [Goo85], [Ski94] y [Kar93])

→ 21



Chimeneas: altura y dispersión del penacho

21.1 Chimeneas

Para el proyecto de una chimenea, son necesarios entre otros, los datos meteorológicos. Si se pretende optimizar el proyecto, no basta con aplicar las fórmulas derivadas del análisis de dispersión general; se han de considerar también muchas variables locales.

21.1.1 Altura física de chimenea

El cálculo de la altura física de chimenea es complejo y, por la información disponible, no se ha llegado todavía a proponer una fórmula fiable a partir del conocimiento del flujo másico de gases, de su composición y temperatura, y de las condiciones meteorológicas de la zona donde será construida, pues hay que considerar otras variables difíciles de implementar en la fórmula: la composición del gas de escape, naturaleza y concentración de los contaminantes que transporta, la estabilidad de la atmósfera en que descarga del gas, la topografía del terreno y el tipo de ocupación. Todo ello se tiene en cuenta, en la práctica, mediante un parámetro S cuyo valor se encuentra tabulado en las Instrucciones Técnicas^{1,3,4}, o en las publicadas por la Administración competente en el lugar.

Una vez calculada la altura física de la chimenea, se ha de calcular la altura del penacho que, sumada a la física, da la altura total de la chimenea, conocimiento absolutamente necesario para afrontar el problema de dispersión de los gases de escape.

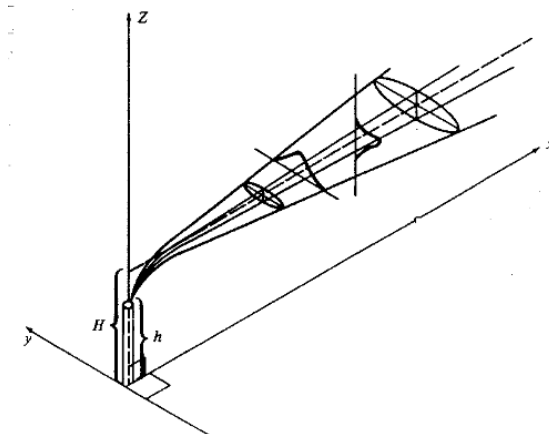
21.1.2 Altura del penacho

La presencia de edificios próximos puede originar turbulencia mecánica, la cual, a su vez, puede llevar el penacho al nivel del suelo, especialmente cuando la chimenea se encuentra a sotavento del edificio y las velocidades del viento son altas. Para evitar este problema, la altura de las chimeneas ha de ser de 2 a 2,5 veces la altura de las estructuras próximas, como mínimo.

Ya que las fórmulas de dispersión que se utilizan habitualmente se han deducido a partir de un terreno llano, en cada caso específico habrá que tener en cuenta las irregularidades del terreno, entre otras variables propias del lugar.



Fig. 21.1.



El penacho de una chimenea se eleva algo por encima de su cúspide antes de nivelarse, tal como se muestra en la figura 21.1. Por consiguiente, la altura efectiva de chimenea H es no solo la altura física de la misma h , sino además la elevación del penacho Δh , o sea:

$$H = h + \Delta h \quad (21.1)$$

Para calcular la altura de elevación del penacho, se utiliza frecuentemente la ecuación de Holland:

$$\Delta h = \frac{V_g d}{V_v} \left[1,5 + \left\{ 2,68 \cdot 10^{-3} P \frac{\Delta T \cdot d}{T_g} \right\} \right] \quad (21.2)$$

donde V_g es la velocidad del gas de chimenea (m/s); V_v es la velocidad del viento (m/s); d es el diámetro interior de la chimenea; P es la presión atmosférica en milibares; ΔT es la diferencia de temperatura entre el gas de chimenea y el aire en K, y T_g es la temperatura del gas de chimenea.

La ecuación 21.2 es válida siempre que las condiciones meteorológicas sean neutras. Para condiciones inestables, habrá que multiplicar Δh por un coeficiente de valor entre 1,1 y 1,2 y, para condiciones estables, el valor del coeficiente multiplicador se encuentra entre 0,8 y 0,9.

Otra de las ecuaciones propuestas para el cálculo de la elevación del penacho es la de Davidson y Bryant:

$$\Delta h = d \left(\frac{V_g}{V_v} \right)^{1,4} \cdot \left(1 + \frac{\Delta T}{T_g} \right) \quad (21.3)$$

Ambas ecuaciones 21.2 y 21.3 aportan una estimación conservadora de Δh cuando se utilizan en estudios de dispersión.



21.2 Dispersión del penacho en la atmósfera

De hecho, el fenómeno que se trata en este apartado es la dilución y la dispersión simultánea de los contaminantes transportados por el penacho surgido de una chimenea a medida que aumenta su diámetro como resultado del arrastre y de la mezcla de aire del ambiente por el cual se mueve: la atmósfera.

La presencia de estos contaminantes en el aire respirable es lo que se conoce como *polución* atmosférica. Para prever el potencial de polución del aire, y concebir programas de atenuación y prevención, puede ser sumamente útil tanto conocer los fenómenos meteorológicos como comprender los factores variables que determinan el tiempo meteorológico. Con la información procedente de un inventario de emisiones y con las velocidades de dispersión atmosférica, es posible estimar, en casos concretos, los niveles de contaminación de aire con un cierto grado de fiabilidad. Una acción previa necesaria es analizar el lugar donde se producen las emisiones contaminantes para identificar si aquella área es o no la más adecuada o favorable para los procesos de dispersión atmosférica. A tal efecto, puede ser de gran ayuda determinar la máxima profundidad de mezcla de un entorno ambiente.

21.2.1 Máxima profundidad de mezcla

La máxima profundidad de mezcla (en inglés, MMD) puede estimarse representando la máxima temperatura de la superficie y trazando una línea paralela al gradiente vertical adiabático seco desde el punto de máxima temperatura de superficie hasta el punto en que la línea se interseca con el gradiente vertical ambiente a primera hora de la mañana (v. figura 21.2).

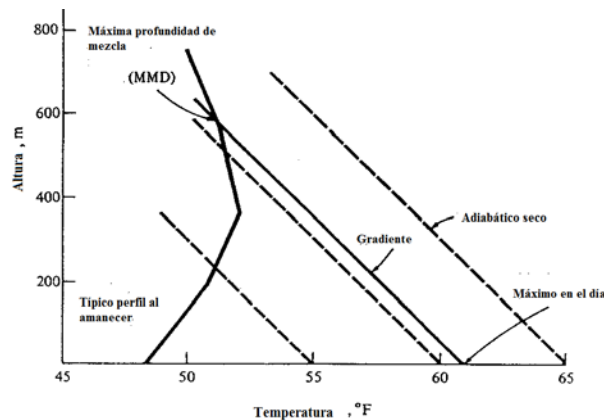


Fig. 21.2.²

Para simular el fenómeno de la dispersión de contaminantes en la atmósfera, se han desarrollado varios modelos que permiten obtener estimaciones de concentración de contaminantes, ya sea en el penacho desde un foco elevado, o bien al nivel del suelo. Entre las ecuaciones más útiles, destacan las desarrolladas por Sutton, Pearson y Pasquill y Gifford.²

Con base en la ecuación general sugerida por Pasquill y modificada por Gifford, la concentración C de un gas o de un aerosol ($< 20 \mu$), calculada al nivel del suelo a una distancia x viento abajo, suponiendo que el penacho tiene una distribución de concentración de tipo Gauss en las direcciones y , z , viene dada por:



$$C_{xy} = \frac{\dot{m}}{\pi \bar{V}_v \sigma_z \sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad (21.4)$$

donde:

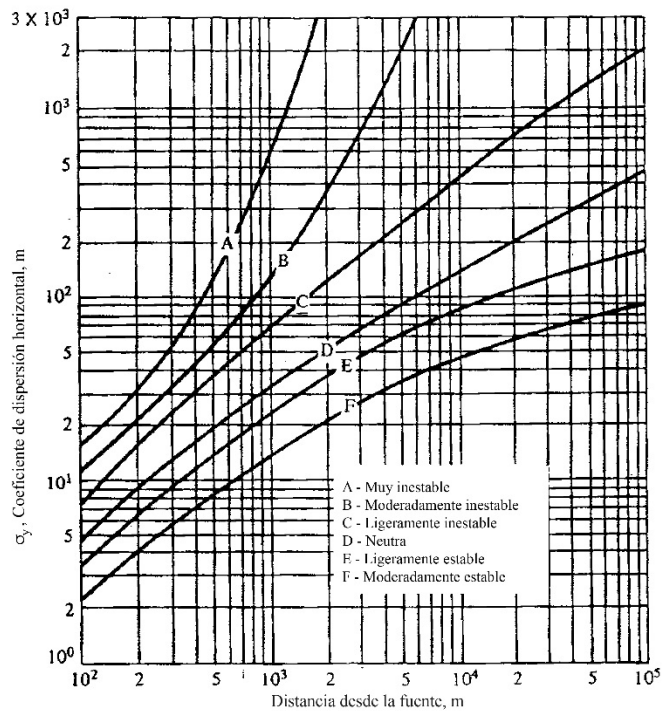
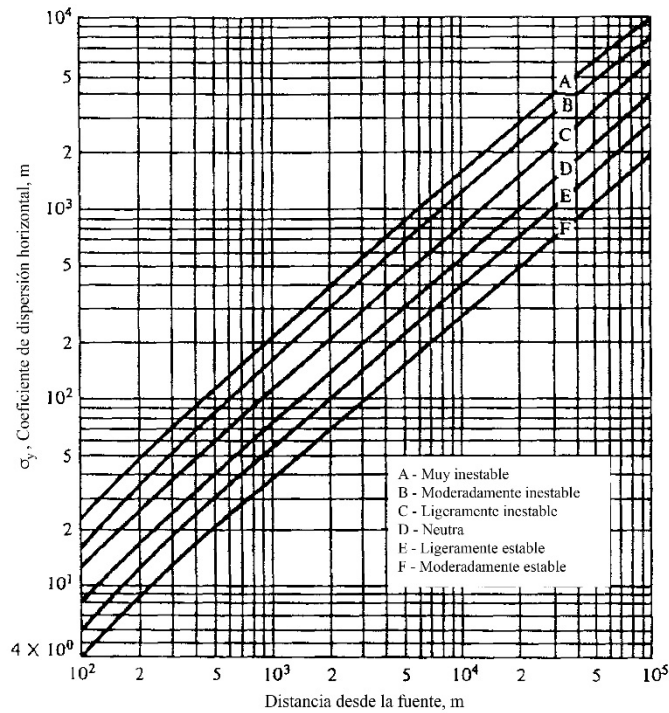
- C , concentración de contaminantes (g/m^3)
- \dot{m} , flujo másico de emisión contaminante (g/s)
- \bar{V}_v , velocidad media del viento (m/s)
- σ_y , desviación estándar de concentración en el penacho según la horizontal, evaluada en términos de la distancia viento abajo x (m)
- σ_z , ídem, según la vertical
- H , altura efectiva de la chimenea (m)
- x , distancia viento abajo a lo largo de la línea central media del penacho desde el foco puntual (m)
- y , distancia a través de la corriente de viento desde la línea central del penacho (m)

Si se necesitan únicamente las concentraciones a lo largo de la línea central del penacho, la ecuación 21.4 se simplifica tomando $y=0$ y, para un foco emisor al nivel del suelo, $H=0$.

Los valores de σ_y y σ_z son no solo una función de la distancia viento abajo, sino también de la estabilidad atmosférica. En las figuras 21.3 y 21.4, están representados los valores de ambas desviaciones estándar para varias distancias viento abajo x , y las diferentes categorías de estabilidad se resumen como categorías generalizadas en la tabla 21.1.

A la vista de las ecuaciones 21.2 a 21.4, se concluye que el viento es uno de los vehículos importantes en la distribución, el transporte y la dispersión de contaminantes del aire. La velocidad del viento determina el tiempo del trayecto de una partícula a un receptor y también la tasa de dispersión de contaminantes del aire. Suponiendo una velocidad del viento de 1 m/s y una fuente que emite 5 g/s de contaminantes, la concentración de contaminantes en el penacho es de 5 g/m³. Si la velocidad del viento aumentase a 5 m/s, la concentración de contaminantes desde la misma fuente se reduciría 1 g/s.

Tipos Pasquill de estabilidad					
Velocidad del viento en superficie (m/s)	Día			Noche	
	Radiación solar incidente			Mayoritariamente cubierta	Mayoritaria-mente despejada
	Fuerte	Moderada	Ligera		
<2	A	A-B	B		
2	A-B	B	C	E	F
4	B	B-C	C	D	E
6	C	C-D	D	D	D
>6	C	D	D	D	D
A: Muy inestable				D: Neutra	
B: Moderadamente inestable				E: Ligeramente estable	
C: Ligeramente inestable				F: Moderadamente estable	





Ejemplo

Una planta termoeléctrica quema 6 Tm de carbón por hora y descarga los productos de combustión por una chimenea cuya altura estructural es de 200 m, con 1 m de diámetro interior.

El carbón tiene un contenido de azufre del 4,2 % y la velocidad del viento en el extremo de la chimenea es de 6 m/s. Las condiciones atmosféricas son entre moderadamente y ligeramente estables. El gas de chimenea es emitido a la atmósfera, cuya temperatura es de 13°C y la presión, de 1.000 mbar, a la temperatura de 149 °C y a una velocidad de 9 m/s.

Calcula:

1. La altura efectiva de la chimenea.
2. La máxima concentración de SO_2 al nivel del suelo y la distancia desde el centro de la chimenea en que se produce este máximo.
3. Las concentraciones al nivel del suelo a una distancia de 3 km a sotavento en la línea central del penacho y a una distancia de 0,4 km a través del viento a cada lado de la línea central.

Resolución:

1. La altura efectiva de la chimenea es $H = h + \Delta h$ h , donde:

$$\Delta h = \frac{V_g d}{V_v} \left[1,5 + \left(2,68 \cdot 10^{-3} P \cdot \frac{\Delta T d}{T_g} \right) \right]$$

Dado que $\Delta T = 149 - 13 = 136 \text{ K}$ y $T_g = 273 + 149 = 422 \text{ K}$, sustituyendo valores se obtiene:

$$\Delta h = \frac{9,1}{6} \left[1,5 + \left\{ 2,68 \cdot 10^{-3} \cdot 1.000 \frac{136,1}{422} \right\} \right] = 3,546 \text{ m}$$

La altura efectiva de la chimenea es $H = 200 + 3,546 = 203,546 \text{ m}$

2. La concentración de SO_2 al nivel del suelo se calcula mediante la ecuación:

$$C_{x,0} = \frac{\dot{m}(\text{SO}_2)}{\pi V_v \sigma_z \sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \quad (1)$$

donde $\dot{m}(\text{SO}_2) = 2 \cdot \dot{m}(\text{carbón})$, pues $S(32) + \text{O}_2(32) = \text{SO}_2(64)$.

Sustituyendo valores, se obtiene: $\dot{m}(\text{SO}_2) = 2 \cdot 6.000 \cdot 4,2 / 100 \cdot 3.600 = 0,14 \text{ kg/s}$

Por otra parte, considerando la atmósfera del tipo C a la cual corresponde una relación σ_z / σ_y constante en distancias de hasta 1 km desde la chimenea, la máxima concentración al nivel del suelo ocurre en $\sigma_z = 0,707 \cdot H$,; por consiguiente, su valor es 143,9 m.



Para este valor de σ_z la figura 21.4, curva C, da $x_{max} \cong 2.750\text{m}$ y, para esta distancia, la figura 21.3, curva C, da $\sigma_y = 275\text{m}$.

Sustituyendo valores en la ecuación 1, la concentración máxima de contaminantes al nivel del suelo es:

$$C_{max,0} = \frac{0,14 \cdot 1.000}{\pi \cdot 6 \cdot 143,9 \cdot 275} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{203,546}{143,9} \right)^2 \right] = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ g / m}^3$$

3. Aplicando el mismo procedimiento, se tiene:

A la distancia $x = 3.000\text{m}$, $z = 0$, el valor de los coeficientes es:

$$\sigma_z = 170\text{m}, \sigma_y = 300\text{m}$$

Por consiguiente, la concentración en dicho punto es:

$$C_{3,0} = \frac{0,14 \cdot 1.000}{\pi \cdot 6 \cdot 170 \cdot 300} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{203,546}{170} \right)^2 \right] = 7,11 \cdot 10^{-5} \text{ g / m}^3$$

La concentración en $x = 3.000\text{m}$, $y = 400\text{m}$, $z = 0$ es:

$$C_{3,0,4,0} = \frac{0,14 \cdot 1.000}{\pi \cdot 6 \cdot 170 \cdot 300} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{203,546}{170} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{400}{300} \right)^2 \right] = 2,923 \cdot 10^{-5} \text{ g / m}^3$$





ANEXO I. Tablas de propiedades y datos de flujo de gases

	p_c (atm)	T_c (°K)	R $\left(\frac{\text{atm cm}^3}{\text{deg gr}}\right)$	$\frac{p_c v_c}{RT_c}$	θ_v (°K)	θ_D (°K)
O ₂	49.7	154.3	2.56	.292	2230	59,000
N ₂	33.5	126.0	2.93	.292	3340	113,300
NO	65.0	179.1	2.73	.255	2690	75,500
H ₂	12.8	33.2	40.7	.306	6100	52,400
He	2.26	5.2	20.5	.306	—	—
A	48.0	151.1	2.05	.291	—	—
CO ₂	73.0	304.2	1.86	.280	954†	40,000‡

	θ_i (°K)
O	158,000
N	168,800
H	157,800
He	285,400
A	182,900
C	130,800

Tabla I.1.
Datos críticos y
temperaturas
características de
varios gases
[LI57]

θ_D : Temperatura característica de disociación

θ_v : Temperatura característica de energía de vibración

† Menor valor

‡ Valor aproximado



La dependencia de la presión y la temperatura en el estado de gas ideal se puede estimar mediante la relación: $D \sim T^{1.75}/p$

Tabla I.2.
Coeficientes de
difusión de gases a
la presión de 1 atm
(1,01325 bar)

Substancias	N ₂ - CO ₂	N ₂ - CH ₄	N ₂ - C ₂ H ₆	N ₂ - SF ₆
ϑ °C	D 10 ⁻⁴ m ² /s	D 10 ⁻⁴ m ² /s	D 10 ⁻⁴ m ² /s	D 10 ⁻⁴ m ² /s
0	0.1391	0.1955	0.1302	0.0869
20	0.1583	0.2219	0.1481	0.0987
40	0.1785	0.2495	0.1669	0.1110
60	0.1997	0.2784	0.1865	0.1239
80	0.2217	0.3084	0.2069	0.1373
100	0.2446	0.3396	0.2281	0.1512
200	0.3714	0.5122	0.3455	0.2281
300	0.5175	0.7106	0.4806	0.3166
400	0.6814	0.9331	0.6322	0.4159
500	0.8621	1.1785	0.7993	0.5254

Substancias	T K	D 10 ⁻⁴ m ² /s
Air - CO ₂	276	0.144
	317	0.179
Air - C ₂ H ₅ OH	313	0.147
Air - He	276	0.632
Air - H ₂ O	313	0.292
CO ₂ - H ₂ O	307	0.201
He - H ₂ O	352	1.136
H ₂ - H ₂ O	307	0.927
CH ₄ - H ₂ O	352	0.361

Tabla I.3.
Constantes
termodinámicas de
gases comunes
[ZH76]

Gas	Símbolo químico	Peso molecular	Relación de calores específicos y a 298,15 K	Unidades inglesas		Unidades SI	
				Constante de gas R=R/M (ft·lbf/ lbm·R)	Calor específico c _p 77 F (Btu/ lbm·R)	Constante de gas R=R/M (J/kg·K)	Calor específico c _p a 298,15 K (J/kg·K)
Aire		28.964	1.400	53.352	0.2398	287.06	1004.0
Argón	A	39.944	1.658	38.687	0.1253	208.15	524.61
Monóxido de carbono	CO	28.010	1.398	55.170	0.249	296.83	1042.5
Dióxido de carbono	CO ₂	44.010	1.288	35.112	0.202	188.92	845.73
Helio	He	4.000	1.659	386.33	1.250	2078.2	5233.5
Hidrógeno	H ₂	2.016	1.405	766.52	3.419	4124.2	14315.0
Metano	CH ₄	16.043	1.304	96.322	0.531	518.25	2223.2
Nitrógeno	N ₂	28.013	1.400	55.164	0.248	296.80	1038.3
Oxígeno	O ₂	32.000	1.395	48.291	0.219	259.82	916.90
Agua	H ₂ O	18.016	1.329	85.774	0.445	461.50	1863.1



ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/kg K	β 10 ⁻³ /K	λ 10 ⁻³ W/K m	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	α 10 ⁻⁶ m ² /s	Pr
100	0.5896	2.042	2.881	25.08	20.81	20.83	0.9990
150	0.5164	1.980	2.452	28.85	27.46	28.22	0.9733
200	0.4604	1.975	2.160	33.28	35.14	36.60	0.9600
250	0.4156	1.990	1.938	38.17	43.83	46.15	0.9497
300	0.3790	2.013	1.761	43.42	53.54	56.92	0.9406
350	0.3483	2.040	1.616	48.96	64.22	68.90	0.9321
400	0.3223	2.070	1.493	54.76	75.86	82.07	0.9243
450	0.2999	2.102	1.388	60.77	88.42	96.40	0.9172
500	0.2805	2.135	1.297	66.97	101.9	111.9	0.9107
600	0.2483	2.203	1.147	79.89	131.4	146.1	0.8993
700	0.2227	2.273	1.029	93.37	164.1	184.2	0.8899
800	0.2019	2.343	0.9327	107.3	199.9	226.8	0.8816
900	0.1847	2.412	0.8530	121.7	238.6	273.0	0.8739
1000	0.1702	2.478	0.7859	163.3	280.0	323.2	0.8665

Tabla I.4.
Propiedades del
vapor de agua

ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/kg K	β 10 ⁻³ /K	λ 10 ⁻³ W/K m	ν 10 ⁻⁷ m ² /s	α 10 ⁻⁷ m ² /s	Pr
-200	5.106	1.186	17.24	6.886	9.786	11.37	0.8606
-180	3.851	1.071	11.83	8.775	17.20	21.27	0.8086
-160	3.126	1.036	9.293	10.64	25.58	32.86	0.7784
-140	2.639	1.010	7.726	12.47	35.22	46.77	0.7530
-120	2.287	1.014	6.657	14.26	46.14	61.50	0.7502
-100	2.019	1.011	5.852	16.02	58.29	78.51	0.7423
-80	1.807	1.009	5.227	17.74	71.59	97.30	0.7357
-60	1.636	1.007	4.725	19.41	85.98	117.8	0.7301
-40	1.495	1.007	4.313	21.04	101.4	139.7	0.7258
-20	1.377	1.007	3.968	22.63	117.8	163.3	0.7215
0	1.275	1.006	3.674	24.18	135.2	188.3	0.7179
20	1.188	1.007	3.421	25.69	153.5	214.7	0.7148
40	1.112	1.007	3.200	27.16	172.6	242.4	0.7122
80	0.9859	1.010	2.836	30.01	213.5	301.4	0.7083
100	0.9329	1.012	2.683	31.39	235.1	332.6	0.7070
120	0.8854	1.014	2.546	32.75	257.5	364.8	0.7060
140	0.8425	1.016	2.422	34.08	280.7	398.0	0.7054
160	0.8036	1.019	2.310	35.39	304.6	432.1	0.7050
180	0.7681	1.022	2.208	36.68	329.3	467.1	0.7049
200	0.7356	1.026	2.115	37.95	354.7	503.0	0.7051
300	0.6072	1.046	1.745	44.09	491.8	694.3	0.7083
400	0.5170	1.069	1.486	49.96	645.1	903.8	0.7137
500	0.4502	1.093	1.293	55.64	813.5	1131	0.7194
600	0.3986	1.116	1.145	61.14	996.3	1375	0.7247
700	0.3576	1.137	1.027	66.46	1193	1635	0.7295
800	0.3243	1.155	0.9317	71.54	1402	1910	0.7342
900	0.2967	1.171	0.8523	76.33	1624	2197	0.7395
1000	0.2734	1.185	0.7853	80.77	1859	2492	0.7458

Tabla I.5.
Propiedades del
aire a p=1 bar



Tabla I.6.
Propiedades
termodinámicas del
aire en unidades SI
[ZH76]

t	h	u	ϕ	p_r	v_r	c_p	c_v	γ	a
K	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg-K			kJ/kg-K	kJ/kg-K		m/s
260	261,173	186,546	6,5599	.61949+0	.12046+6	1,0036	.7165	1,4006	323,30
265	266,191	190,129	6,5790	.66216+0	.11487+6	1,0036	.7166	1,4006	326,39
270	271,209	193,712	6,5977	.70688+0	.10963+6	1,0036	.7166	1,4005	329,45
275	276,228	197,295	6,6161	.75372+0	.10472+6	1,0037	.7167	1,4005	332,48
280	281,246	200,879	6,6342	.80275+0	.10012+6	1,0038	.7168	1,4004	335,48
285	286,266	204,463	6,6520	.85401+0	.95787+5	1,0040	.7169	1,4004	338,46
290	291,286	208,048	6,6695	.90758+0	.91714+5	1,0041	.7171	1,4003	341,40
295	296,307	211,634	6,6866	.96352+0	.87879+5	1,0043	.7173	1,4002	344,32
300	301,329	215,221	6,7035	.10219+1	.84264+5	1,0045	.7175	1,4000	347,21
305	306,353	218,809	6,7201	.10827+1	.80853+5	1,0048	.7177	1,3999	350,08
310	311,377	222,398	6,7365	.11462+1	.77631+5	1,0050	.7180	1,3998	352,92
315	316,403	225,989	6,7525	.12122+1	.74585+5	1,0053	.7183	1,3996	355,73
320	321,430	229,581	6,7684	.12810+1	.71702+5	1,0056	.7186	1,3994	358,52
325	326,459	233,175	6,7840	.13525+1	.68971+5	1,0059	.7189	1,3993	361,29
330	331,489	236,770	6,7993	.14269+1	.66383+5	1,0063	.7193	1,3991	364,03
335	336,522	240,367	6,8145	.15041+1	.63928+5	1,0067	.7196	1,3989	366,75
340	341,556	243,966	6,8294	.15843+1	.61596+5	1,0071	.7200	1,3986	369,45
345	346,592	247,568	6,8441	.16676+1	.59380+5	1,0075	.7204	1,3984	372,12
350	351,631	251,171	6,8586	.17540+1	.57274+5	1,0079	.7209	1,3982	374,78
355	356,671	254,776	6,8729	.18436+1	.55268+5	1,0084	.7213	1,3979	377,41
360	361,714	258,384	6,8870	.19365+1	.53359+5	1,0089	.7218	1,3976	380,02
365	366,760	261,995	6,9009	.20327+1	.51539+5	1,0094	.7223	1,3974	382,62
370	371,808	265,608	6,9146	.21324+1	.49800+5	1,0099	.7229	1,3971	385,19
375	376,859	269,223	6,9282	.22355+1	.48148+5	1,0104	.7234	1,3968	387,74
380	381,912	272,842	6,9416	.23423+1	.46566+5	1,0110	.7240	1,3965	390,27
385	386,969	276,463	6,9548	.24527+1	.45055+5	1,0116	.7246	1,3961	392,79
390	392,028	280,087	6,9679	.25668+1	.43611+5	1,0122	.7252	1,3958	395,28
395	397,091	283,715	6,9808	.26846+1	.42229+5	1,0128	.7258	1,3955	397,76
400	402,156	287,345	6,9935	.28067+1	.40906+5	1,0134	.7264	1,3951	400,22
405	407,225	290,979	7,0061	.29326+1	.39640+5	1,0141	.7271	1,3948	402,66
410	412,297	294,616	7,0186	.30625+1	.38426+5	1,0148	.7277	1,3944	405,09
415	417,373	298,256	7,0309	.31967+1	.37263+5	1,0155	.7284	1,3940	407,49
420	422,452	301,900	7,0430	.33351+1	.36147+5	1,0162	.7292	1,3936	409,89
425	427,535	305,548	7,0551	.34778+1	.35075+5	1,0169	.7299	1,3933	412,26
430	432,621	309,199	7,0670	.36250+1	.34047+5	1,0177	.7306	1,3929	414,62
435	437,711	312,854	7,0787	.37768+1	.33059+5	1,0184	.7314	1,3924	416,96
440	442,805	316,513	7,0904	.39331+1	.32110+5	1,0192	.7322	1,3920	419,29
445	447,903	320,176	7,1019	.40942+1	.31197+5	1,0200	.7330	1,3916	421,60
450	453,005	323,843	7,1133	.42601+1	.30319+5	1,0208	.7338	1,3912	423,90
455	458,111	327,513	7,1246	.44309+1	.29474+5	1,0216	.7346	1,3907	426,18
460	463,221	331,188	7,1357	.46067+1	.28661+5	1,0224	.7354	1,3903	428,44
465	468,335	334,868	7,1468	.47877+1	.27877+5	1,0233	.7363	1,3898	430,70
470	473,454	338,551	7,1577	.49738+1	.27122+5	1,0242	.7371	1,3894	432,93
475	478,577	342,239	7,1686	.51653+1	.26395+5	1,0250	.7380	1,3889	435,16
480	483,704	345,931	7,1793	.53622+1	.25693+5	1,0259	.7389	1,3885	437,37
485	488,836	349,628	7,1900	.55647+1	.25017+5	1,0268	.7398	1,3880	439,57
490	493,973	353,329	7,2005	.57727+1	.24363+5	1,0278	.7407	1,3875	441,75
495	499,114	357,035	7,2109	.59865+1	.23733+5	1,0287	.7417	1,3870	443,92
500	504,260	360,746	7,2213	.62062+1	.23124+5	1,0296	.7426	1,3865	446,08
505	509,410	364,461	7,2315	.64318+1	.22536+5	1,0306	.7436	1,3860	448,22
510	514,566	368,182	7,2417	.66636+1	.21968+5	1,0316	.7445	1,3855	450,35
515	519,726	371,907	7,2518	.69015+1	.21419+5	1,0325	.7455	1,3850	452,47
520	524,891	375,637	7,2617	.71457+1	.20887+5	1,0335	.7465	1,3845	454,58
525	530,061	379,372	7,2716	.73963+1	.20374+5	1,0345	.7475	1,3840	456,67
530	535,236	383,112	7,2814	.76535+1	.19877+5	1,0355	.7485	1,3835	458,76
535	540,417	386,857	7,2912	.79173+1	.19395+5	1,0366	.7495	1,3829	460,83
540	545,602	390,607	7,3008	.81880+1	.18930+5	1,0376	.7506	1,3824	462,89
545	550,792	394,362	7,3104	.84655+1	.18479+5	1,0386	.7516	1,3819	464,94
550	555,988	398,123	7,3199	.87501+1	.18042+5	1,0397	.7527	1,3814	466,98
555	561,189	401,889	7,3293	.90418+1	.17618+5	1,0407	.7537	1,3808	469,00
560	566,396	405,660	7,3386	.93408+1	.17208+5	1,0418	.7548	1,3803	471,02
565	571,607	409,437	7,3479	.96473+1	.16810+5	1,0429	.7559	1,3797	473,02
570	576,825	413,219	7,3571	.99613+1	.16424+5	1,0440	.7569	1,3792	475,02
575	582,047	417,006	7,3662	.10283+2	.16050+5	1,0451	.7580	1,3786	477,00
580	587,275	420,799	7,3753	.10612+2	.15687+5	1,0462	.7591	1,3781	478,98
585	592,509	424,598	7,3843	.10950+2	.15334+5	1,0473	.7603	1,3775	480,94
590	597,748	428,402	7,3932	.11295+2	.14992+5	1,0484	.7614	1,3770	482,90
595	602,993	432,211	7,4020	.11649+2	.14660+5	1,0495	.7625	1,3764	484,84
600	608,243	436,027	7,4108	.12011+2	.14338+5	1,0507	.7636	1,3759	486,77
605	613,499	439,848	7,4195	.12382+2	.14024+5	1,0518	.7648	1,3753	488,70
610	618,761	443,674	7,4282	.12761+2	.13720+5	1,0529	.7659	1,3748	490,61
615	624,029	447,507	7,4368	.13150+2	.13424+5	1,0541	.7671	1,3742	492,52
620	629,302	451,345	7,4453	.13547+2	.13137+5	1,0552	.7682	1,3736	494,42
625	634,581	455,189	7,4538	.13953+2	.12857+5	1,0564	.7694	1,3731	496,30
630	639,866	459,039	7,4622	.14368+2	.12585+5	1,0576	.7705	1,3725	498,18
635	645,157	462,894	7,4706	.14793+2	.12321+5	1,0587	.7717	1,3719	500,05
640	650,453	466,756	7,4789	.15228+2	.12063+5	1,0599	.7729	1,3714	501,92
645	655,756	470,623	7,4872	.15672+2	.11813+5	1,0611	.7741	1,3708	503,77
650	661,064	474,496	7,4954	.16126+2	.11569+5	1,0623	.7752	1,3702	505,61
655	666,378	478,375	7,5035	.16590+2	.11332+5	1,0635	.7764	1,3697	507,45
660	671,699	482,260	7,5116	.17065+2	.11101+5	1,0646	.7776	1,3691	509,28
665	677,025	486,151	7,5196	.17549+2	.10876+5	1,0658	.7788	1,3685	511,10



Tabla I.7.
Propiedades de la
atmósfera
estándar [ZH76]

Z, m	t, K	p, N/m ²	ρ , kg/m ³	g, m/s ²	$\mu \cdot 10^5$, kg/m-s ²	$k \cdot 10^6$, kcal/m-s-K	a, m/s
-1000	294.65	1.1393+5	1.3470+0	9.8097	1.8206	6.1748	344.11
500	291.50	1.0748	1.2849	9.8082	1.8050	6.1140	342.21
0	288.15	1.0133	1.2250	9.8066	1.7894	6.0530	340.29
500	284.90	9.5461+4	1.1673	9.8051	1.7737	5.9919	338.37
1000	281.65	8.9876	1.1117	9.8036	1.7579	5.9305	336.44
1500	278.40	8.4560	1.0581	9.8020	1.7420	5.8690	334.49
2000	275.15	7.9501	1.0066	9.8005	1.7260	5.8073	332.53
2500	271.91	7.4692	9.5695-1	9.7989	1.7099	5.7454	330.56
3000	268.66	7.0121	9.0925	9.7974	1.6938	5.6833	328.58
3500	265.41	6.5780	8.6340	9.7959	1.6775	5.6210	326.59
4000	262.17	6.1660	8.1935	9.7943	1.6612	5.5586	324.59
4500	258.92	5.7753	7.7704	9.7928	1.6448	5.4959	322.57
5000	255.68	5.4048	7.3643	9.7912	1.6282	5.4331	320.55
6000	249.19	4.7218	6.6011	9.7882	1.5949	5.3068	316.45
7000	242.70	4.1105	5.9002	9.7851	1.5612	5.1798	312.31
8000	236.22	3.5652	5.2579	9.7820	1.5271	5.0520	308.11
9000	229.73	3.0801	4.6706	9.7789	1.4926	4.9235	303.85
10,000	223.25	2.6500	4.1351	9.7759	1.4577	4.7942	299.53
11,000	216.77	2.2700	3.6480	9.7728	1.4223	4.6642	295.14
12,000	216.65	1.9399	3.1194	9.7697	1.4216	4.6617	295.07
13,000	216.65	1.6580	2.6660	9.7667	1.4216	4.6617	295.07
14,000	216.65	1.4170	2.2786	9.7636	1.4216	4.6617	295.07
15,000	216.65	1.2112	1.9475	9.7605	1.4216	4.6617	295.07
16,000	216.65	1.0353	1.6647	9.7575	1.4216	4.6617	295.07
17,000	216.65	8.8497+3	1.4230	9.7544	1.4216	4.6617	295.07
18,000	216.65	7.5652	1.2165	9.7513	1.4216	4.6617	295.07
19,000	216.65	6.4675	1.0400	9.7483	1.4216	4.6617	295.07
20,000	216.65	5.5293	8.8910-2	9.7452	1.4216	4.6617	295.07
21,000	217.58	4.7289	7.5715	9.7422	1.4267	4.6804	295.70
22,000	218.57	4.0475	6.4510	9.7391	1.4322	4.7004	296.38
23,000	219.57	3.4669	5.5006	9.7361	1.4376	4.7204	297.05
24,000	220.56	2.9717	4.6938	9.7330	1.4430	4.7403	297.72
25,000	221.55	2.5492	4.0084	9.7300	1.4484	4.7602	298.39
26,000	222.54	2.1884	3.4257	9.7269	1.4538	4.7800	299.06
27,000	223.54	1.8800	2.9298	9.7239	1.4592	4.7999	299.72
28,000	224.53	1.6162	2.5076	9.7208	1.4646	4.8197	300.39
29,000	225.52	1.3904	2.1478	9.7178	1.4699	4.8395	301.05
30,000	226.51	1.1970	1.8410	9.7147	1.4753	4.8593	301.71
31,000	227.50	1.0313	1.5792	9.7117	1.4806	4.8790	302.37
32,000	228.49	8.8906+2	1.3555	9.7086	1.4859	4.8988	303.03
33,000	230.97	7.6731	1.1573	9.7056	1.4992	4.9481	304.67
34,000	233.74	6.6341	9.8874-3	9.7026	1.5140	5.0031	306.49
35,000	236.51	5.7459	8.4634	9.6995	1.5287	5.0579	308.30
36,000	239.28	4.9852	7.2579	9.6965	1.5433	5.1125	310.10
37,000	242.05	4.3325	6.2355	9.6935	1.5578	5.1670	311.89
38,000	244.82	3.7714	5.3666	9.6904	1.5723	5.2213	313.67
39,000	247.58	3.2882	4.6267	9.6874	1.5866	5.2577	315.43
40,000	250.35	2.8714	3.9957	9.6844	1.6009	5.3295	317.19
42,000	255.88	2.1997	2.9948	9.6783	1.6293	5.4370	320.67
44,000	261.40	1.6950	2.2589	9.6723	1.6573	5.5438	324.12
46,000	266.93	1.3134	1.7141	9.6662	1.6851	5.5601	327.52
48,000	270.65	1.0230	1.3167	9.6602	1.7037	5.7214	329.80



Tabla I.8.
Parámetros de
flujo vs M para
flujo subsónico
[LR57]

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
.35	.9188	.9413	.9761	.9880	.5624
.36	.9143	.9380	.9747	.9873	.5761
.37	.9098	.9347	.9733	.9866	.5896
.38	.9052	.9313	.9719	.9859	.6029
.39	.9004	.9278	.9705	.9851	.6160
.40	.8956	.9243	.9690	.9844	.6289
.41	.8907	.9207	.9675	.9836	.6416
.42	.8857	.9170	.9659	.9828	.6541
.43	.8807	.9132	.9643	.9820	.6663
.44	.8755	.9094	.9627	.9812	.6784
.45	.8703	.9055	.9611	.9803	.6903
.46	.8650	.9016	.9594	.9795	.7019
.47	.8596	.8976	.9577	.9786	.7134
.48	.8541	.8935	.9560	.9777	.7246
.49	.8486	.8894	.9542	.9768	.7356
.50	.8430	.8852	.9524	.9759	.7464
.51	.8374	.8809	.9506	.9750	.7569
.52	.8317	.8766	.9487	.9740	.7672
.53	.8259	.8723	.9468	.9730	.7773
.54	.8201	.8679	.9449	.9721	.7872
.55	.8142	.8634	.9430	.9711	.7968
.56	.8082	.8589	.9410	.9701	.8063
.57	.8022	.8544	.9390	.9690	.8155
.58	.7962	.8498	.9370	.9680	.8244
.59	.7901	.8451	.9349	.9669	.8331
.60	.7840	.8405	.9328	.9658	.8416
.61	.7778	.8357	.9307	.9647	.8499
.62	.7716	.8310	.9286	.9636	.8579
.63	.7654	.8262	.9265	.9625	.8657
.64	.7591	.8213	.9243	.9614	.8732
.65	.7528	.8164	.9221	.9603	.8806
.66	.7465	.8115	.9199	.9591	.8877
.67	.7401	.8066	.9176	.9579	.8945
.68	.7338	.8016	.9153	.9567	.9012
.69	.7274	.7966	.9131	.9555	.9076



Tabla I.9.
Parámetros de
flujo vs M para
flujo supersónico
[LR57]

M	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{a}{a_0}$	$\frac{A^*}{A}$	$\frac{\rho}{2} \frac{V^2}{p_0}$	θ
1.70	.2026	.3197	.6337	.7961	.7476	.4098	17.81
1.71	.1996	.3163	.6310	.7943	.7423	.4086	18.10
1.72	.1966	.3129	.6283	.7926	.7371	.4071	18.40
1.73	.1936	.3095	.6256	.7909	.7318	.4056	18.69
1.74	.1907	.3062	.6229	.7892	.7265	.4041	18.98
1.75	.1878	.3029	.6202	.7875	.7212	.4026	19.27
1.76	.1850	.2996	.6175	.7858	.7160	.4011	19.56
1.77	.1822	.2964	.6148	.7841	.7107	.3996	19.86
1.78	.1794	.2932	.6121	.7824	.7054	.3980	20.15
1.79	.1767	.2900	.6095	.7807	.7002	.3964	20.44
1.80	.1740	.2868	.6068	.7790	.6949	.3947	20.73
1.81	.1714	.2837	.6041	.7773	.6897	.3931	21.01
1.82	.1688	.2806	.6015	.7756	.6845	.3914	21.30
1.83	.1662	.2776	.5989	.7739	.6792	.3897	21.59
1.84	.1637	.2745	.5963	.7722	.6740	.3879	21.88
1.85	.1612	.2715	.5936	.7705	.6688	.3862	22.16
1.86	.1587	.2686	.5910	.7688	.6636	.3844	22.45
1.87	.1563	.2656	.5884	.7671	.6584	.3826	22.73
1.88	.1539	.2627	.5859	.7654	.6533	.3808	23.02
1.89	.1516	.2598	.5833	.7637	.6481	.3790	23.30
1.90	.1492	.2570	.5807	.7620	.6430	.3771	23.59
1.91	.1470	.2542	.5782	.7604	.6379	.3753	23.87
1.92	.1447	.2514	.5756	.7587	.6328	.3734	24.15
1.93	.1425	.2486	.5731	.7570	.6277	.3715	24.43
1.94	.1403	.2459	.5705	.7553	.6226	.3696	24.71
1.95	.1381	.2432	.5680	.7537	.6175	.3677	24.99
1.96	.1360	.2405	.5655	.7520	.6125	.3657	25.27
1.97	.1339	.2378	.5630	.7503	.6075	.3638	25.55
1.98	.1318	.2352	.5605	.7487	.6025	.3618	25.83
1.99	.1298	.2326	.5580	.7470	.5975	.3598	26.10
2.00	.1278	.2300	.5556	.7454	.5926	.3579	26.38
2.01	.1258	.2275	.5531	.7437	.5877	.3559	26.66
2.02	.1239	.2250	.5506	.7420	.5828	.3539	26.93
2.03	.1220	.2225	.5482	.7404	.5779	.3518	27.20
2.04	.1201	.2200	.5458	.7388	.5730	.3498	27.48



Tabla I.10.
Parámetros de la
onda de choque
normal [LR57]

M	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{a}{a_0}$	$\frac{A^*}{A}$	$\frac{\frac{\rho}{2} V^2}{p_0}$	θ
1.70	.2026	.3197	.6337	.7961	.7476	.4098	17.81
1.71	.1996	.3163	.6310	.7943	.7423	.4086	18.10
1.72	.1966	.3129	.6283	.7926	.7371	.4071	18.40
1.73	.1936	.3095	.6256	.7909	.7318	.4056	18.69
1.74	.1907	.3062	.6229	.7892	.7265	.4041	18.98
1.75	.1878	.3029	.6202	.7875	.7212	.4026	19.27
1.76	.1850	.2996	.6175	.7858	.7160	.4011	19.56
1.77	.1822	.2964	.6148	.7841	.7107	.3996	19.86
1.78	.1794	.2932	.6121	.7824	.7054	.3980	20.15
1.79	.1767	.2900	.6095	.7807	.7002	.3964	20.44
1.80	.1740	.2868	.6068	.7790	.6949	.3947	20.73
1.81	.1714	.2837	.6041	.7773	.6897	.3931	21.01
1.82	.1688	.2806	.6015	.7756	.6845	.3914	21.30
1.83	.1662	.2776	.5989	.7739	.6792	.3897	21.59
1.84	.1637	.2745	.5963	.7722	.6740	.3879	21.88
1.85	.1612	.2715	.5936	.7705	.6688	.3862	22.16
1.86	.1587	.2686	.5910	.7688	.6636	.3844	22.45
1.87	.1563	.2656	.5884	.7671	.6584	.3826	22.73
1.88	.1539	.2627	.5859	.7654	.6533	.3808	23.02
1.89	.1516	.2598	.5833	.7637	.6481	.3790	23.30
1.90	.1492	.2570	.5807	.7620	.6430	.3771	23.59
1.91	.1470	.2542	.5782	.7604	.6379	.3753	23.87
1.92	.1447	.2514	.5756	.7587	.6328	.3734	24.15
1.93	.1425	.2486	.5731	.7570	.6277	.3715	24.43
1.94	.1403	.2459	.5705	.7553	.6226	.3696	24.71
1.95	.1381	.2432	.5680	.7537	.6175	.3677	24.99
1.96	.1360	.2405	.5655	.7520	.6125	.3657	25.27
1.97	.1339	.2378	.5630	.7503	.6075	.3638	25.55
1.98	.1318	.2352	.5605	.7487	.6025	.3618	25.83
1.99	.1298	.2326	.5580	.7470	.5975	.3598	26.10
2.00	.1278	.2300	.5556	.7454	.5926	.3579	26.38
2.01	.1258	.2275	.5531	.7437	.5877	.3559	26.66
2.02	.1239	.2250	.5506	.7420	.5828	.3539	26.93
2.03	.1220	.2225	.5482	.7404	.5779	.3518	27.20
2.04	.1201	.2200	.5458	.7388	.5730	.3498	27.48



ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)
0.0	1.000	90.000	17.5	1.689	36.293
0.5	1.051	72.099	18.0	1.706	35.874
1.0	1.082	67.574	18.5	1.724	35.465
1.5	1.108	64.451	19.0	1.741	35.065
2.0	1.133	61.997	19.5	1.758	34.673
2.5	1.155	59.950	20.0	1.775	34.290
3.0	1.177	58.180	20.5	1.792	33.915
3.5	1.198	56.614	21.0	1.810	33.548
4.0	1.218	55.205	21.5	1.827	33.188
4.5	1.237	53.920	22.0	1.844	32.834
5.0	1.256	52.738	22.5	1.862	32.488
5.5	1.275	51.642	23.0	1.879	32.148
6.0	1.294	50.619	23.5	1.897	31.814
6.5	1.312	49.658	24.0	1.915	31.486
7.0	1.330	48.753	24.5	1.932	31.164
7.5	1.348	47.896	25.0	1.950	30.847
8.0	1.366	47.082	25.5	1.968	30.536
8.5	1.383	46.306	26.0	1.986	30.229
9.0	1.400	45.566	26.5	2.004	29.928
9.5	1.418	44.857	27.0	2.023	29.632
10.0	1.435	44.177	27.5	2.041	29.340
10.5	1.452	43.523	28.0	2.059	29.052
11.0	1.469	42.894	28.5	2.078	28.769
11.5	1.486	42.287	29.0	2.096	28.491
12.0	1.503	41.701	29.5	2.115	28.216
12.5	1.520	41.134	30.0	2.134	27.945
13.0	1.537	40.585	30.5	2.153	27.678
13.5	1.554	40.053	31.0	2.172	27.415
14.0	1.571	39.537	31.5	2.191	27.155
14.5	1.588	39.035	32.0	2.210	26.899
15.0	1.605	38.547	32.5	2.230	26.646
15.5	1.622	38.073	33.0	2.249	26.397
16.0	1.639	37.611	33.5	2.269	26.151
16.5	1.655	37.160	34.0	2.289	25.908
17.0	1.672	36.721	34.5	2.309	25.668

Tabla I.11.
Número y ángulo
de Mach vs
función de
Prandtl-Meyer
[LR57]



Tabla I.12.
Flujo adiabático
con fricción en
conducto de área
constante (línea
de Fanno $\gamma=1,40$)
[ZH76]

M	$M^* = \frac{\rho^*}{\rho}$	$\frac{t}{t^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}^*}$	$\frac{4fL^*}{D}$
.78	.80677	.10698+1	.13261+1	.10471+1	.10231+1	.91672-1
.80	.82514	.10638+1	.12893+1	.10382+1	.10185+1	.72290-1
.82	.84335	.10578+1	.12542+1	.10305+1	.10145+1	.55932-1
.84	.86140	.10516+1	.12208+1	.10237+1	.10112+1	.42256-1
.86	.87929	.10454+1	.11889+1	.10179+1	.10083+1	.30965-1
.88	.89703	.10391+1	.11583+1	.10129+1	.10059+1	.21795-1
.90	.91460	.10327+1	.11291+1	.10089+1	.10040+1	.14512-1
.92	.93201	.10263+1	.11011+1	.10056+1	.10025+1	.89133-2
.94	.94925	.10198+1	.10743+1	.10031+1	.10014+1	.48154-2
.96	.96633	.10132+1	.10485+1	.10014+1	.10006+1	.20571-2
.98	.98325	.10066+1	.10238+1	.10003+1	.10001+1	.49470-3
1.00	1.00000	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.0
1.02	1.01658	.99331+0	.97711+0	.10003+1	.10001+1	.45869-3
1.04	1.03300	.98658+0	.95507+0	.10013+1	.10005+1	.17685-2
1.06	1.04925	.97982+0	.93383+0	.10029+1	.10012+1	.38379-2
1.08	1.06533	.97302+0	.91335+0	.10051+1	.10020+1	.65846-2
1.10	1.08124	.96618+0	.89359+0	.10079+1	.10031+1	.99350-2
1.12	1.09699	.95932+0	.87451+0	.10113+1	.10043+1	.13823-1
1.14	1.11256	.95244+0	.85608+0	.10153+1	.10057+1	.18188-1
1.16	1.12797	.94554+0	.83826+0	.10198+1	.10073+1	.22977-1
1.18	1.14321	.93861+0	.82103+0	.10248+1	.10090+1	.28142-1
1.20	1.15828	.93168+0	.80436+0	.10304+1	.10108+1	.33638-1
1.22	1.17319	.92473+0	.78822+0	.10366+1	.10128+1	.39426-1
1.24	1.18792	.91777+0	.77258+0	.10432+1	.10149+1	.45471-1
1.26	1.20249	.91080+0	.75743+0	.10504+1	.10170+1	.51739-1
1.28	1.21690	.90383+0	.74274+0	.10581+1	.10193+1	.58201-1
1.30	1.23114	.89686+0	.72848+0	.10663+1	.10217+1	.64832-1
1.32	1.24521	.88989+0	.71465+0	.10750+1	.10241+1	.71607-1
1.34	1.25912	.88292+0	.70122+0	.10842+1	.10267+1	.78504-1
1.36	1.27286	.87596+0	.68818+0	.10940+1	.10292+1	.85503-1
1.38	1.28645	.86901+0	.67551+0	.11042+1	.10319+1	.92586-1
1.40	1.29987	.86207+0	.66320+0	.11149+1	.10346+1	.99738-1
1.42	1.31313	.85514+0	.65122+0	.11262+1	.10373+1	.10694+0
1.44	1.32623	.84822+0	.63958+0	.11379+1	.10401+1	.11419+0
1.46	1.33917	.84133+0	.62825+0	.11501+1	.10430+1	.12146+0
1.48	1.35195	.83445+0	.61722+0	.11629+1	.10458+1	.12875+0
1.50	1.36458	.82759+0	.60648+0	.11762+1	.10487+1	.13605+0
1.55	1.39546	.81054+0	.58084+0	.12116+1	.10560+1	.15427+0
1.60	1.42539	.79365+0	.55679+0	.12502+1	.10635+1	.17236+0
1.65	1.45439	.77695+0	.53421+0	.12922+1	.10710+1	.19023+0
1.70	1.48247	.76046+0	.51297+0	.13376+1	.10785+1	.20780+0
1.75	1.50966	.74419+0	.49295+0	.13865+1	.10860+1	.22504+0
1.80	1.53598	.72816+0	.47407+0	.14390+1	.10935+1	.24189+0
1.85	1.56145	.71238+0	.45623+0	.14952+1	.11009+1	.25832+0
1.90	1.58609	.69686+0	.43936+0	.15553+1	.11083+1	.27433+0
1.95	1.60993	.68162+0	.42339+0	.16193+1	.11155+1	.28989+0
2.00	1.63299	.66667+0	.40825+0	.16875+1	.11227+1	.30500+0
2.10	1.67687	.63762+0	.38024+0	.18369+1	.11366+1	.33385+0
2.20	1.71791	.60976+0	.35494+0	.20050+1	.11500+1	.36091+0
2.30	1.75629	.58309+0	.33200+0	.21931+1	.11628+1	.38623+0
2.40	1.79218	.55762+0	.31114+0	.24031+1	.11751+1	.40989+0
2.50	1.82574	.53333+0	.29212+0	.26367+1	.11867+1	.43198+0
2.60	1.85714	.51020+0	.27473+0	.28960+1	.11978+1	.45259+0
2.70	1.88653	.48820+0	.25878+0	.31830+1	.12083+1	.47182+0
2.80	1.91404	.46729+0	.24414+0	.35001+1	.12182+1	.48976+0
2.90	1.93981	.44743+0	.23066+0	.38498+1	.12277+1	.50652+0
3.00	1.96396	.42857+0	.21822+0	.42346+1	.12366+1	.52216+0
3.10	1.98661	.41068+0	.20672+0	.46573+1	.12450+1	.53678+0
3.20	2.00786	.39370+0	.19608+0	.51210+1	.12530+1	.55044+0
3.30	2.02781	.37760+0	.18621+0	.56286+1	.12605+1	.56323+0
3.40	2.04656	.36232+0	.17704+0	.61837+1	.12676+1	.57521+0
3.50	2.06419	.34783+0	.16851+0	.67896+1	.12743+1	.58643+0
3.60	2.08077	.33408+0	.16055+0	.74501+1	.12807+1	.59695+0
3.70	2.09639	.32103+0	.15313+0	.81691+1	.12867+1	.60684+0



Tabla I.13.

Flujo isotérmico con
fricción en un conducto
de área constante

$\gamma=1.40$ [ZH76]

M	$\frac{V}{V_L} = \frac{p_L}{p} = \frac{\rho_L}{\rho}$	$\frac{T}{T_L}$	$\frac{P}{P_L}$	$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_L}$	$\frac{4fL^*}{D}$
.32	.37863+0	.89292+0	.17768+1	.15099+1	.40331+1
.34	.40229+0	.89523+0	.16874+1	.14440+1	.33578+1
.36	.42596+0	.89768+0	.16090+1	.13868+1	.28046+1
.38	.44962+0	.90027+0	.15398+1	.13369+1	.23479+1
.40	.47329+0	.90300+0	.14784+1	.12931+1	.19682+1
.42	.49695+0	.90587+0	.14237+1	.12546+1	.16507+1
.44	.52062+0	.90888+0	.13749+1	.12207+1	.13840+1
.46	.54428+0	.91203+0	.13311+1	.11908+1	.11591+1
.48	.56794+0	.91532+0	.12918+1	.11643+1	.96873+0
.50	.59161+0	.91875+0	.12565+1	.11410+1	.80732+0
.55	.65077+0	.92794+0	.11827+1	.10937+1	.50207+0
.60	.70993+0	.93800+0	.11259+1	.10593+1	.29895+0
.65	.76909+0	.94894+0	.10823+1	.10347+1	.16552+0
.70	.82825+0	.96075+0	.10495+1	.10178+1	.80848-1
.75	.88741+0	.97344+0	.10255+1	.10071+1	.30949-1
.80	.94657+0	.98700+0	.10092+1	.10015+1	.62566-2
.8452	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.0
.85	.10057+1	.10014+1	.99931+0	.10000+1	.65124-4
.90	.10649+1	.10167+1	.99528+0	.10020+1	.75854-2
.95	.11241+1	.10329+1	.99649+0	.10068+1	.25338-1
1.00	.11832+1	.10500+1	.10025+1	.10142+1	.50758-1
1.05	.12424+1	.10679+1	.10131+1	.10236+1	.81931-1
1.10	.13015+1	.10867+1	.10280+1	.10349+1	.11741+0
1.15	.13607+1	.11064+1	.10471+1	.10478+1	.15610+0
1.20	.14199+1	.11270+1	.10703+1	.10621+1	.19715+0
1.25	.14790+1	.11484+1	.10975+1	.10776+1	.23990+0
1.30	.15382+1	.11707+1	.11288+1	.10941+1	.28386+0
1.35	.15973+1	.11939+1	.11642+1	.11117+1	.32861+0
1.40	.16565+1	.12180+1	.12039+1	.11301+1	.37385+0
1.45	.17157+1	.12429+1	.12478+1	.11493+1	.41933+0
1.50	.17748+1	.12687+1	.12962+1	.11691+1	.46486+0
1.55	.18340+1	.12954+1	.13492+1	.11896+1	.51029+0
1.60	.18931+1	.13230+1	.14069+1	.12107+1	.55550+0
1.65	.19523+1	.13514+1	.14697+1	.12323+1	.60039+0
1.70	.20115+1	.13807+1	.15378+1	.12543+1	.64489+0
1.75	.20706+1	.14109+1	.16113+1	.12768+1	.68894+0
1.80	.21298+1	.14420+1	.16906+1	.12997+1	.73250+0
1.85	.21889+1	.14739+1	.17760+1	.13229+1	.77555+0
1.90	.22481+1	.15067+1	.18678+1	.13465+1	.81804+0
1.95	.23073+1	.15404+1	.19663+1	.13703+1	.85998+0
2.00	.23664+1	.15750+1	.20720+1	.13945+1	.90134+0
2.20	.26031+1	.17220+1	.25741+1	.14936+1	.10610+1
2.40	.28397+1	.18830+1	.32263+1	.15959+1	.12114+1
2.60	.30764+1	.20580+1	.40646+1	.17007+1	.13532+1
2.80	.33130+1	.22470+1	.51332+1	.18074+1	.14868+1
3.00	.35496+1	.24500+1	.64848+1	.19157+1	.16131+1
3.20	.37863+1	.26670+1	.81821+1	.20252+1	.17325+1
3.40	.40229+1	.28980+1	.10299+2	.21358+1	.18458+1
3.60	.42596+1	.31430+1	.12922+2	.22472+1	.19535+1
3.80	.44962+1	.34020+1	.16152+2	.23593+1	.20559+1
4.00	.47329+1	.36750+1	.20104+2	.24721+1	.21537+1
5.00	.59161+1	.52500+1	.56043+2	.30426+1	.25839+1
6.00	.70993+1	.71750+1	.13937+3	.36201+1	.29398+1
7.00	.82825+1	.94500+1	.31322+3	.42016+1	.32429+1
8.00	.94657+1	.12075+2	.64633+3	.47857+1	.35065+1
9.00	.10649+2	.15050+2	.12419+4	.53714+1	.37397+1
10.00	.11832+2	.18375+2	.22477+4	.59583+1	.39488+1
11.00	.13015+2	.22050+2	.38679+4	.65461+1	.41382+1
12.00	.14199+2	.26075+2	.63759+4	.71345+1	.43112+1
13.00	.15382+2	.30450+2	.10129+5	.77234+1	.44706+1
14.00	.16565+2	.35175+2	.15582+5	.83127+1	.46182+1
15.00	.17748+2	.40250+2	.23309+5	.89023+1	.47557+1
INFIN	INFIN	INFIN	INFIN	INFIN	INFIN



Tabla I.14.

Flujo sin fricción con
transferencia de
calor en un conducto
de área constante
(Línea de Ravleigh
 $\gamma=1,40$) [ZH76]

M	$M^* = \frac{\rho^*}{\rho}$	$\frac{t}{t^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{T}{T^*}$
.78	.78853	.10220+1	.12961+1	.10234+1	.95528+0
.80	.81013	.10255+1	.12658+1	.10193+1	.96395+0
.82	.83125	.10276+1	.12362+1	.10157+1	.97152+0
.84	.85190	.10285+1	.12073+1	.10124+1	.97807+0
.86	.87207	.10283+1	.11791+1	.10095+1	.98363+0
.88	.89175	.10269+1	.11515+1	.10070+1	.98828+0
.90	.91097	.10245+1	.11246+1	.10049+1	.99207+0
.92	.92970	.10212+1	.10984+1	.10031+1	.99506+0
.94	.94797	.10170+1	.10728+1	.10017+1	.99729+0
.96	.96577	.10121+1	.10479+1	.10008+1	.99883+0
.98	.98311	.10064+1	.10236+1	.10002+1	.99971+0
1.00	1.00000	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.10000+1
1.02	1.01645	.99304+0	.97698+0	.10002+1	.99973+0
1.04	1.03246	.98554+0	.95456+0	.10008+1	.99895+0
1.06	1.04804	.97755+0	.93275+0	.10017+1	.99769+0
1.08	1.06320	.96913+0	.91152+0	.10031+1	.99601+0
1.10	1.07795	.96031+0	.89087+0	.10049+1	.99392+0
1.12	1.09230	.95115+0	.87078+0	.10070+1	.99148+0
1.14	1.10626	.94169+0	.85123+0	.10095+1	.98871+0
1.16	1.11984	.93196+0	.83222+0	.10124+1	.98564+0
1.18	1.13305	.92200+0	.81374+0	.10157+1	.98230+0
1.20	1.14589	.91185+0	.79576+0	.10194+1	.97872+0
1.22	1.15838	.90153+0	.77827+0	.10235+1	.97492+0
1.24	1.17052	.89108+0	.76127+0	.10279+1	.97092+0
1.26	1.18233	.88052+0	.74473+0	.10328+1	.96675+0
1.28	1.19382	.86988+0	.72865+0	.10380+1	.96243+0
1.30	1.20499	.85917+0	.71301+0	.10437+1	.95798+0
1.32	1.21585	.84843+0	.69780+0	.10497+1	.95341+0
1.34	1.22642	.83766+0	.68301+0	.10561+1	.94873+0
1.36	1.23669	.82689+0	.66863+0	.10629+1	.94398+0
1.38	1.24669	.81613+0	.65464+0	.10701+1	.93914+0
1.40	1.25641	.80539+0	.64103+0	.10777+1	.93425+0
1.42	1.26587	.79469+0	.62779+0	.10856+1	.92931+0
1.44	1.27507	.78405+0	.61491+0	.10940+1	.92434+0
1.46	1.28402	.77346+0	.60237+0	.11028+1	.91933+0
1.48	1.29273	.76294+0	.59018+0	.11120+1	.91431+0
1.50	1.30120	.75250+0	.57831+0	.11215+1	.90928+0
1.55	1.32142	.72680+0	.55002+0	.11473+1	.89669+0
1.60	1.34031	.70174+0	.52356+0	.11756+1	.88419+0
1.65	1.35800	.67738+0	.49880+0	.12066+1	.87184+0
1.70	1.37455	.65377+0	.47562+0	.12402+1	.85971+0
1.75	1.39007	.63095+0	.45390+0	.12767+1	.84784+0
1.80	1.40462	.60894+0	.43353+0	.13159+1	.83628+0
1.85	1.41829	.58774+0	.41440+0	.13581+1	.82504+0
1.90	1.43112	.56734+0	.39643+0	.14033+1	.81414+0
1.95	1.44319	.54774+0	.37954+0	.14516+1	.80358+0
2.00	1.45455	.52893+0	.36364+0	.15031+1	.79339+0
2.10	1.47533	.49356+0	.33454+0	.16162+1	.77406+0
2.20	1.49383	.46106+0	.30864+0	.17434+1	.75613+0
2.30	1.51035	.43122+0	.28551+0	.18860+1	.73954+0
2.40	1.52515	.40384+0	.26478+0	.20451+1	.72421+0
2.50	1.53846	.37870+0	.24615+0	.22218+1	.71006+0
2.60	1.55046	.35561+0	.22936+0	.24177+1	.69700+0
2.70	1.56131	.33439+0	.21417+0	.26343+1	.68494+0
2.80	1.57114	.31486+0	.20040+0	.28731+1	.67380+0
2.90	1.58008	.29687+0	.18788+0	.31359+1	.66350+0
3.00	1.58824	.28028+0	.17647+0	.34245+1	.65398+0
3.10	1.59568	.26495+0	.16604+0	.37408+1	.64516+0
3.20	1.60250	.25078+0	.15649+0	.40871+1	.63699+0
3.30	1.60877	.23766+0	.14773+0	.44655+1	.62940+0
3.40	1.61453	.22549+0	.13966+0	.48783+1	.62236+0
3.50	1.61983	.21419+0	.13223+0	.53280+1	.61580+0
3.60	1.62474	.20369+0	.12537+0	.58173+1	.60970+0
3.70	1.62928	.19390+0	.11901+0	.63488+1	.60401+0



M_1	M_2	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{t_2}{t_1}$	$\frac{p_2}{p_1}$	$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\right)$	$\frac{P_2}{P_1}$
1.66	.65119	.21318+1	.14299+1	.30482+1	.87201+0	.40531+1
1.67	.64847	.21484+1	.14369+1	.30870+1	.86800+0	.40953+1
1.68	.64579	.21649+1	.14440+1	.31261+1	.86394+0	.41379+1
1.69	.64315	.21813+1	.14512+1	.31654+1	.85985+0	.41807+1
1.70	.64054	.21977+1	.14583+1	.32050+1	.85572+0	.42238+1
1.71	.63798	.22141+1	.14655+1	.32448+1	.85156+0	.42672+1
1.72	.63545	.22304+1	.14727+1	.32848+1	.84736+0	.43108+1
1.73	.63296	.22467+1	.14800+1	.33250+1	.84312+0	.43547+1
1.74	.63051	.22629+1	.14873+1	.33655+1	.83886+0	.43989+1
1.75	.62809	.22791+1	.14946+1	.34062+1	.83457+0	.44433+1
1.76	.62570	.22952+1	.15019+1	.34472+1	.83024+0	.44880+1
1.77	.62335	.23113+1	.15093+1	.34884+1	.82589+0	.45330+1
1.78	.62104	.23273+1	.15167+1	.35298+1	.82151+0	.45782+1
1.79	.61875	.23433+1	.15241+1	.35714+1	.81711+0	.46237+1
1.80	.61650	.23592+1	.15316+1	.36133+1	.81268+0	.46695+1
1.81	.61428	.23751+1	.15391+1	.36554+1	.80823+0	.47155+1
1.82	.61209	.23909+1	.15466+1	.36978+1	.80376+0	.47618+1
1.83	.60993	.24067+1	.15541+1	.37404+1	.79927+0	.48084+1
1.84	.60780	.24224+1	.15617+1	.37832+1	.79476+0	.48552+1
1.85	.60570	.24381+1	.15693+1	.38262+1	.79023+0	.49023+1
1.86	.60363	.24537+1	.15770+1	.38695+1	.78569+0	.49497+1
1.87	.60158	.24693+1	.15847+1	.39130+1	.78112+0	.49973+1
1.88	.59957	.24848+1	.15924+1	.39568+1	.77655+0	.50452+1
1.89	.59758	.25003+1	.16001+1	.40008+1	.77196+0	.50934+1
1.90	.59562	.25157+1	.16079+1	.40450+1	.76736+0	.51418+1
1.91	.59368	.25310+1	.16157+1	.40894+1	.76274+0	.51905+1
1.92	.59177	.25463+1	.16236+1	.41341+1	.75812+0	.52394+1
1.93	.58988	.25616+1	.16314+1	.41790+1	.75349+0	.52886+1
1.94	.58802	.25767+1	.16394+1	.42242+1	.74884+0	.53381+1
1.95	.58618	.25919+1	.16473+1	.42696+1	.74420+0	.53878+1
1.96	.58437	.26069+1	.16553+1	.43152+1	.73954+0	.54378+1
1.97	.58258	.26220+1	.16633+1	.43610+1	.73488+0	.54881+1
1.98	.58082	.26369+1	.16713+1	.44071+1	.73021+0	.55386+1
1.99	.57907	.26518+1	.16794+1	.44534+1	.72555+0	.55894+1
2.00	.57735	.26667+1	.16875+1	.45000+1	.72087+0	.56404+1
2.02	.57397	.26962+1	.17038+1	.45938+1	.71153+0	.57433+1
2.04	.57068	.27255+1	.17203+1	.46885+1	.70218+0	.58473+1
2.06	.56747	.27545+1	.17369+1	.47842+1	.69284+0	.59523+1
2.08	.56433	.27833+1	.17536+1	.48808+1	.68351+0	.60583+1
2.10	.56128	.28119+1	.17705+1	.49783+1	.67420+0	.61654+1
2.12	.55829	.28402+1	.17875+1	.50768+1	.66492+0	.62735+1
2.14	.55538	.28683+1	.18046+1	.51762+1	.65567+0	.63827+1
2.16	.55254	.28962+1	.18219+1	.52765+1	.64645+0	.64929+1
2.18	.54977	.29238+1	.18393+1	.53778+1	.63727+0	.66042+1
2.20	.54706	.29512+1	.18569+1	.54800+1	.62814+0	.67165+1
2.22	.54441	.29784+1	.18746+1	.55831+1	.61905+0	.68298+1
2.24	.54182	.30053+1	.18924+1	.56872+1	.61002+0	.69442+1
2.26	.53930	.30319+1	.19104+1	.57922+1	.60105+0	.70597+1
2.28	.53683	.30584+1	.19285+1	.58981+1	.59214+0	.71762+1
2.30	.53441	.30845+1	.19468+1	.60050+1	.58329+0	.72937+1
2.32	.53205	.31105+1	.19652+1	.61128+1	.57452+0	.74122+1
2.34	.52974	.31362+1	.19838+1	.62215+1	.56581+0	.75319+1
2.36	.52749	.31617+1	.20025+1	.63312+1	.55718+0	.76525+1
2.38	.52528	.31869+1	.20213+1	.64418+1	.54862+0	.77742+1
2.40	.52312	.32119+1	.20403+1	.65533+1	.54014+0	.78969+1
2.42	.52100	.32367+1	.20595+1	.66658+1	.53175+0	.80207+1
2.44	.51894	.32612+1	.20788+1	.67792+1	.52344+0	.81455+1
2.46	.51691	.32855+1	.20982+1	.68935+1	.51521+0	.82713+1
2.48	.51493	.33095+1	.21178+1	.70088+1	.50707+0	.83982+1
2.50	.51299	.33333+1	.21375+1	.71250+1	.49901+0	.85261+1
2.52	.51109	.33569+1	.21574+1	.72421+1	.49105+0	.86551+1
2.54	.50923	.33803+1	.21774+1	.73602+1	.48318+0	.87851+1
2.56	.50741	.34034+1	.21976+1	.74792+1	.47540+0	.89161+1
2.58	.50562	.34263+1	.22179+1	.75991+1	.46772+0	.90482+1
2.60	.50387	.34490+1	.22383+1	.77200+1	.46012+0	.91813+1
2.62	.50216	.34714+1	.22590+1	.78418+1	.45263+0	.93155+1

Tabla I.15.
Ondas de choque
normal ($\gamma=1.40$)
[ZH76]



Tabla I.16.
Ángulo de Prandtl-
Meyer (grados)
[ZH76]

M	$\gamma = 1.10$	$\gamma = 1.20$	$\gamma = 1.30$	$\gamma = 1.40$	$\gamma = 1.67$
1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1.02	.1441	.1374	.1313	.1257	.1127
1.04	.4034	.3843	.3669	.3510	.3142
1.06	.7339	.6984	.6661	.6367	.5689
1.08	1.1191	1.0638	1.0136	.9680	.8632
1.10	1.5492	1.4710	1.4004	1.3362	1.1891
1.12	2.0175	1.9136	1.8199	1.7350	1.5410
1.14	2.5189	2.3867	2.2676	2.1599	1.9146
1.16	3.0496	2.8863	2.7397	2.6073	2.3066
1.18	3.6062	3.4094	3.2331	3.0742	2.7143
1.20	4.1862	3.9535	3.7454	3.5582	3.1355
1.22	4.7873	4.5161	4.2743	4.0572	3.5683
1.24	5.4075	5.0956	4.8180	4.5693	4.0111
1.26	6.0452	5.6902	5.3749	5.0931	4.4623
1.28	6.6988	6.2984	5.9437	5.6271	4.9209
1.30	7.3670	6.9190	6.5229	6.1702	5.3856
1.32	8.0487	7.5507	7.1116	6.7213	5.8556
1.34	8.7428	8.1926	7.7086	7.2793	6.3300
1.36	9.4482	8.8437	8.3131	7.8434	6.8079
1.38	10.1643	9.5032	8.9242	8.4129	7.2888
1.40	10.8900	10.1702	9.5413	8.9869	7.7719
1.42	11.6248	10.8440	10.1635	9.5649	8.2568
1.44	12.3679	11.5240	10.7904	10.1463	8.7429
1.46	13.1188	12.2097	11.4212	10.7304	9.2297
1.48	13.8767	12.9003	12.0555	11.3168	9.7169
1.50	14.6413	13.5954	12.6927	11.9051	10.2041
1.52	15.4121	14.2946	13.3325	12.4948	10.6909
1.54	16.1884	14.9973	13.9744	13.0855	11.1769
1.56	16.9700	15.7033	14.6179	13.6768	11.6620
1.58	17.7565	16.4119	15.2628	14.2685	12.1459
1.60	18.5474	17.1230	15.9088	14.8602	12.6282
1.62	19.3424	17.8362	16.5554	15.4516	13.1089
1.64	20.1412	18.5512	17.2024	16.0425	13.5877
1.66	20.9434	19.2676	17.8496	16.6327	14.0644
1.68	21.7489	19.9852	18.4967	17.2218	14.5388
1.70	22.5572	20.7037	19.1434	17.8097	15.0109
1.72	23.3682	21.4229	19.7895	18.3962	15.4804
1.74	24.1815	22.1426	20.4348	18.9812	15.9474
1.76	24.9970	22.8625	21.0792	19.5644	16.4115
1.78	25.8144	23.5825	21.7224	20.1456	16.8729
1.80	26.6336	24.3022	22.3643	20.7248	17.3312
1.82	27.4543	25.0217	23.0047	21.3019	17.7866
1.84	28.2763	25.7406	23.6435	21.8766	18.2389
1.86	29.0995	26.4588	24.2805	22.4489	18.6880
1.88	29.9237	27.1762	24.9157	23.0187	19.1339
1.90	30.7487	27.8927	25.5488	23.5859	19.5766
1.92	31.5744	28.6080	26.1798	24.1503	20.0159
1.94	32.4006	29.3221	26.8086	24.7120	20.4520
1.96	33.2272	30.0348	27.4350	25.2708	20.8846
1.98	34.0540	30.7461	28.0590	25.8266	21.3138
2.00	34.8810	31.4558	28.6806	26.3795	21.7396
2.05	36.9482	33.2223	30.2229	27.7481	22.7891
2.10	39.0136	34.9769	31.7480	29.0968	23.8168
2.15	41.0756	36.7183	33.2549	30.4250	24.8228
2.20	43.1330	38.4453	34.7430	31.7322	25.8070
2.25	45.1843	40.1569	36.2115	33.0181	26.7697
2.30	47.2284	41.8525	37.6601	34.2824	27.7109
2.35	49.2643	43.5312	39.0883	35.5251	28.6310
2.40	51.2911	45.1926	40.4958	36.7461	29.5303
2.45	53.3079	46.8360	41.8825	37.9455	30.4090
2.50	55.3140	48.4610	43.2481	39.1232	31.2676
2.55	57.3086	50.0674	44.5927	40.2794	32.1065
2.60	59.2912	51.6547	45.9163	41.4143	32.9260
2.65	61.2612	53.2229	47.2188	42.5281	33.7267
2.70	63.2181	54.7717	48.5003	43.6210	34.5088
2.75	65.1614	56.3010	49.7610	44.6934	35.2730
2.80	67.0908	57.8107	51.0010	45.7454	36.0195



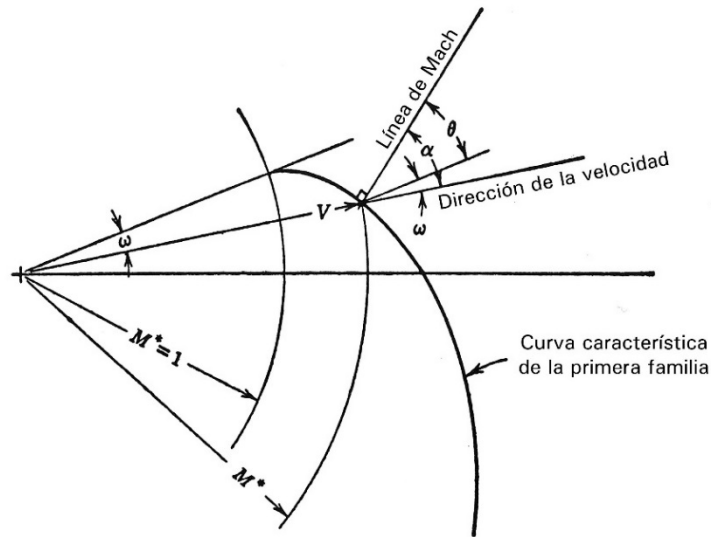
M	M^*	$\frac{t}{t^*}$	$\frac{p}{p^*}$	$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\frac{P}{P^*}$	$\frac{G}{G^*}$
.37	.39988	.11680+1	.20140+1	.17243+1	.11695+1	.68950+0
.38	.41039	.11663+1	.19964+1	.17117+1	.11652+1	.70246+0
.39	.42087	.11646+1	.19787+1	.16990+1	.11609+1	.71508+0
.40	.43133	.11628+1	.19608+1	.16863+1	.11566+1	.72734+0
.41	.44177	.11610+1	.19428+1	.16734+1	.11523+1	.73926+0
.42	.45218	.11591+1	.19247+1	.16605+1	.11480+1	.75084+0
.43	.46257	.11572+1	.19065+1	.16475+1	.11437+1	.76207+0
.44	.47293	.11553+1	.18882+1	.16344+1	.11394+1	.77297+0
.45	.48326	.11533+1	.18699+1	.16213+1	.11351+1	.78353+0
.46	.49357	.11513+1	.18515+1	.16082+1	.11308+1	.79377+0
.47	.50385	.11492+1	.18331+1	.15951+1	.11266+1	.80367+0
.48	.51410	.11471+1	.18147+1	.15819+1	.11224+1	.81326+0
.49	.52433	.11450+1	.17962+1	.15687+1	.11182+1	.82253+0
.50	.53452	.11429+1	.17778+1	.15556+1	.11141+1	.83148+0
.52	.55483	.11384+1	.17409+1	.15292+1	.11059+1	.84847+0
.54	.57501	.11339+1	.17043+1	.15030+1	.10979+1	.86426+0
.56	.59507	.11292+1	.16678+1	.14770+1	.10901+1	.87891+0
.58	.61501	.11244+1	.16316+1	.14511+1	.10826+1	.89246+0
.60	.63481	.11194+1	.15957+1	.14255+1	.10753+1	.90494+0
.62	.65448	.11143+1	.15603+1	.14002+1	.10682+1	.91642+0
.64	.67402	.11091+1	.15253+1	.13752+1	.10615+1	.92693+0
.66	.69342	.11038+1	.14908+1	.13506+1	.10550+1	.93653+0
.68	.71268	.10984+1	.14569+1	.13263+1	.10489+1	.94525+0
.70	.73179	.10929+1	.14235+1	.13025+1	.10431+1	.95315+0
.72	.75076	.10873+1	.13907+1	.12791+1	.10376+1	.96027+0
.74	.76958	.10815+1	.13585+1	.12561+1	.10325+1	.96666+0
.76	.78825	.10757+1	.13270+1	.12335+1	.10278+1	.97235+0
.78	.80677	.10698+1	.12961+1	.12115+1	.10234+1	.97738+0
.80	.82514	.10638+1	.12658+1	.11899+1	.10193+1	.98181+0
.82	.84335	.10578+1	.12362+1	.11687+1	.10157+1	.98566+0
.84	.86140	.10516+1	.12073+1	.11481+1	.10124+1	.98897+0
.86	.87929	.10454+1	.11791+1	.11279+1	.10095+1	.99178+0
.88	.89703	.10391+1	.11515+1	.11082+1	.10070+1	.99412+0
.90	.91460	.10327+1	.11246+1	.10890+1	.10049+1	.99603+0
.92	.93201	.10263+1	.10984+1	.10703+1	.10031+1	.99753+0
.94	.94925	.10198+1	.10728+1	.10520+1	.10017+1	.99865+0
.96	.96633	.10132+1	.10479+1	.10342+1	.10008+1	.99941+0
.98	.98325	.10066+1	.10236+1	.10169+1	.10002+1	.99986+0
1.00	1.00000	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.10000+1	.10000+1
1.02	1.01658	.99331+0	.97698+0	.98355+0	.10002+1	.99986+0
1.04	1.03300	.98658+0	.95456+0	.96754+0	.10008+1	.99947+0
1.06	1.04925	.97982+0	.93275+0	.95196+0	.10017+1	.99885+0
1.08	1.06533	.97302+0	.91152+0	.93680+0	.10031+1	.99800+0
1.10	1.08124	.96618+0	.89087+0	.92205+0	.10049+1	.99696+0
1.12	1.09699	.95932+0	.87078+0	.90770+0	.10070+1	.99573+0
1.14	1.11256	.95244+0	.85123+0	.89374+0	.10095+1	.99434+0
1.16	1.12797	.94554+0	.83222+0	.88016+0	.10124+1	.99279+0
1.18	1.14321	.93861+0	.81374+0	.86695+0	.10157+1	.99111+0
1.20	1.15828	.93168+0	.79576+0	.85411+0	.10194+1	.98930+0
1.22	1.17319	.92473+0	.77827+0	.84162+0	.10235+1	.98738+0
1.24	1.18792	.91777+0	.76127+0	.82948+0	.10279+1	.98535+0
1.26	1.20249	.91080+0	.74473+0	.81767+0	.10328+1	.98324+0
1.28	1.21690	.90383+0	.72865+0	.80618+0	.10380+1	.98104+0
1.30	1.23114	.89686+0	.71301+0	.79501+0	.10437+1	.97876+0
1.32	1.24521	.88989+0	.69780+0	.78415+0	.10497+1	.97643+0
1.34	1.25912	.88292+0	.68301+0	.77358+0	.10561+1	.97403+0
1.36	1.27286	.87596+0	.66863+0	.76331+0	.10629+1	.97158+0
1.38	1.28645	.86901+0	.65464+0	.75331+0	.10701+1	.96909+0
1.40	1.29987	.86207+0	.64103+0	.74359+0	.10777+1	.96657+0
1.42	1.31313	.85514+0	.62779+0	.73413+0	.10856+1	.96401+0
1.44	1.32623	.84822+0	.61491+0	.72493+0	.10940+1	.96142+0
1.46	1.33917	.84133+0	.60237+0	.71598+0	.11028+1	.95882+0
1.48	1.35195	.83445+0	.59018+0	.70727+0	.11120+1	.95620+0
1.50	1.36458	.82759+0	.57831+0	.69880+0	.11215+1	.95356+0
1.55	1.39546	.81054+0	.55002+0	.67858+0	.11473+1	.94694+0
1.60	1.42539	.79365+0	.52356+0	.65969+0	.11756+1	.94031+0
1.65	1.45439	.77695+0	.49880+0	.64200+0	.12066+1	.93372+0

Tabla I.17.

Adición de masa a
una corriente en
dirección normal
($\gamma=1.40$) [ZH76]



Tabla I.18.
Funciones de flujo
isentrópico
bidimensional del
método de
características (gas
perfecto $\gamma=1,40$)
[SCh82]



ω	α	θ	M	M^*	$\frac{\Lambda}{\Lambda^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$
0.0	90.0000	90.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.52828	.63394
0.5	72.0988	71.5988	1.0509	1.0418	1.0021	.49735	.60720
1.0	67.5741	66.5741	1.0818	1.0668	1.0053	.47898	.59110
1.5	64.4505	62.9505	1.1084	1.0879	1.0093	.46350	.57738
2.0	61.9969	59.9969	1.1326	1.1068	1.0137	.44964	.56500
2.5	59.9500	57.4500	1.1553	1.1244	1.0187	.43688	.55350
3.0	58.1805	55.1805	1.1769	1.1408	1.0240	.42494	.54265
3.5	56.6139	53.1139	1.1976	1.1565	1.0297	.41365	.53231
4.0	55.2048	51.2048	1.2177	1.1715	1.0358	.40291	.52240
4.5	53.9204	49.4204	1.2373	1.1859	1.0423	.39263	.51284
5.0	52.7383	47.7383	1.2565	1.1999	1.0491	.38274	.50358
5.5	51.6419	46.1419	1.2753	1.2135	1.0562	.37320	.49459
6.0	50.6186	44.6186	1.2938	1.2267	1.0637	.36398	.48583
6.5	49.6583	43.1583	1.3120	1.2396	1.0715	.35506	.47729
7.0	48.7528	41.7528	1.3300	1.2522	1.0796	.34640	.46895
7.5	47.8957	40.3957	1.3478	1.2645	1.0880	.33798	.46078
8.0	47.0818	39.0818	1.3655	1.2766	1.0967	.32979	.45278
8.5	46.3065	37.8065	1.3830	1.2885	1.1058	.32182	.44493
9.0	45.5660	36.5660	1.4004	1.3002	1.1152	.31404	.43723
9.5	44.8570	35.3570	1.4177	1.3117	1.1249	.30646	.42966



Tabla I.19.
Método de
características
($\gamma=1,40$) [Sch82]

ω	α	θ	M	M*	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$
10.0	44.1770	34.1770	1.4349	1.3230	1.1349	.29906	.42222
10.5	43.5233	33.0233	1.4521	1.3341	1.1453	.29184	.41491
11.0	42.8940	31.8940	1.4692	1.3451	1.1560	.28478	.40772
11.5	42.2869	30.7869	1.4862	1.3559	1.1670	.27788	.40064
12.0	41.7007	29.7007	1.5032	1.3666	1.1783	.27114	.39367
12.5	41.1338	28.6338	1.5202	1.3772	1.1900	.26454	.38680
13.0	40.5849	27.5849	1.5371	1.3876	1.2021	.25809	.38004
13.5	40.0529	26.5529	1.5540	1.3979	1.2145	.25178	.37338
14.0	39.5366	25.5366	1.5709	1.4081	1.2273	.24560	.36681
14.5	39.0350	24.5350	1.5878	1.4182	1.2405	.23955	.36034
15.0	38.5474	23.5474	1.6047	1.4282	1.2541	.23363	.35396
15.5	38.0730	22.5730	1.6216	1.4380	1.2680	.22783	.34766
16.0	37.6108	21.6108	1.6385	1.4478	1.2823	.22216	.34145
16.5	37.1605	20.6605	1.6555	1.4575	1.2970	.21661	.33533
17.0	36.7212	19.7212	1.6725	1.4671	1.3121	.21117	.32929
17.5	36.2925	18.7925	1.6895	1.4766	1.3277	.20584	.32334
18.0	35.8739	17.8739	1.7065	1.4860	1.3437	.20062	.31747
18.5	35.4648	16.9648	1.7235	1.4953	1.3602	.19551	.31168
19.0	35.0648	16.0648	1.7406	1.5046	1.3771	.19051	.30596
19.5	34.6735	15.1735	1.7578	1.5138	1.3945	.18562	.30032
20.0	34.2904	14.2904	1.7750	1.5229	1.4123	.18082	.29475
20.5	33.9153	13.4153	1.7922	1.5319	1.4306	.17612	.28926
21.0	33.5479	12.5479	1.8095	1.5409	1.4494	.17152	.28385
21.5	33.1877	11.6877	1.8269	1.5498	1.4687	.16702	.27851
22.0	32.8344	10.8344	1.8443	1.5586	1.4886	.16261	.27324
22.5	32.4879	9.9879	1.8618	1.5673	1.5090	.15830	.26804
23.0	32.1478	9.1478	1.8793	1.5760	1.5300	.15408	.26291
23.5	31.8138	8.3138	1.8969	1.5846	1.5515	.14995	.25786
24.0	31.4859	7.4859	1.9146	1.5932	1.5736	.14590	.25287
24.5	31.1637	6.6637	1.9324	1.6017	1.5963	.14194	.24795
25.0	30.8469	5.8469	1.9503	1.6101	1.6197	.13806	.24310
25.5	30.5355	5.0355	1.9682	1.6184	1.6437	.13427	.23831
26.0	30.2293	4.2293	1.9862	1.6267	1.6683	.13057	.23359
26.5	29.9281	3.4281	2.0044	1.6350	1.6936	.12694	.22894
27.0	29.6316	2.6316	2.0226	1.6432	1.7196	.12339	.22435
27.5	29.3397	1.8397	2.0409	1.6513	1.7464	.11992	.21982
28.0	29.0524	1.0524	2.0593	1.6594	1.7739	.11653	.21536
28.5	28.7694	0.2694	2.0778	1.6674	1.8022	.11321	.21097
29.0	28.4906	-0.5094	2.0964	1.6753	1.8312	.10997	.20664
29.5	28.2158	-1.2842	2.1151	1.6832	1.8611	.10680	.20237



Tabla 1.20.

Calor específico,
entalpía, entropía y
constantes de
equilibrio del gas
monoatómico H
[ZH76]

$$\bar{m}_H = 1.008, \quad \Delta \bar{H}_{f,298}^\circ = 217,986 \text{ kJ/kmol} = 93,719 \text{ Btu/lbmol}$$

T , K	\bar{c}_p° , kJ kmol-K	$(\bar{H}^\circ - \bar{H}_{298}^\circ)$, kJ kmol	\bar{s}° , kJ kmol-K	$\log_{10} K_p$	\bar{s}° , Btu lbmol-R	$(\bar{H}^\circ - \bar{H}_{298}^\circ)$, Btu lbmol	\bar{c}_p° , Btu lbmol-R	T , R
100	20.786	-4,119	91.897	-110.976	21.949	-1,771	4.965	180
200	20.786	-2,040	106.304	-54.322	25.390	-877	4.965	360
298	20.786	0	114.604	-35.612	27.373	0	4.965	537
300	20.786	38	114.732	-35.377	27.403	17	4.965	540
400	20.786	2,117	120.712	-25.876	28.832	910	4.965	720
500	20.786	4,196	125.350	-20.159	29.939	1,804	4.965	900
600	20.786	6,274	129.140	-16.336	30.845	2,697	4.965	1080
700	20.786	8,353	132.344	-13.599	31.610	3,591	4.965	1260
800	20.786	10,431	135.120	-11.540	32.273	4,485	4.965	1440
900	20.786	12,510	137.568	-9.934	32.858	5,378	4.965	1620
1000	20.786	14,589	139.758	-8.646	33.381	6,272	4.965	1800
1100	20.786	16,667	141.739	-7.589	33.854	7,166	4.965	1980
1200	20.786	18,746	143.548	-6.707	34.286	8,059	4.965	2160
1300	20.786	20,824	145.211	-5.958	34.683	8,953	4.965	2340
1400	20.786	22,903	146.752	-5.315	35.051	9,847	4.965	2520
1500	20.786	24,981	148.186	-4.757	35.394	10,740	4.965	2700
1600	20.786	27,060	149.527	-4.267	35.714	11,634	4.965	2880
1700	20.786	29,139	150.788	-3.834	36.015	12,528	4.965	3060
1800	20.786	31,217	151.976	-3.448	36.299	13,421	4.965	3240
1900	20.786	33,296	153.099	-3.103	36.567	14,315	4.965	3420
2000	20.786	35,374	154.166	-2.791	36.822	15,208	4.965	3600
2100	20.786	37,453	155.180	-2.509	37.064	16,102	4.965	3780
2200	20.786	39,532	156.147	-2.252	37.295	16,996	4.965	3960
2300	20.786	41,610	157.071	-2.016	37.516	17,889	4.965	4140
2400	20.786	43,689	157.955	-1.801	37.727	18,783	4.965	4320
2500	20.786	45,767	158.804	-1.602	37.930	19,677	4.965	4500
2600	20.786	47,846	159.619	-1.418	38.124	20,570	4.965	4680
2700	20.786	49,924	160.404	-1.248	38.312	21,464	4.965	4860
2800	20.786	52,003	161.160	-1.089	38.492	22,358	4.965	5040
2900	20.786	54,082	161.889	-0.942	38.667	23,251	4.965	5220
3000	20.786	56,160	162.594	-0.804	38.835	24,145	4.965	5400
3100	20.786	58,239	163.275	-0.675	38.998	25,039	4.965	5580
3200	20.786	60,317	163.935	-0.554	39.155	25,932	4.965	5760
3300	20.786	62,396	164.575	-0.440	39.308	26,826	4.965	5940
3400	20.786	64,475	165.195	-0.332	39.456	27,720	4.965	6120
3500	20.786	66,553	165.798	-0.231	39.600	28,613	4.965	6300
3600	20.786	68,632	166.383	-0.135	39.740	29,507	4.965	6480
3700	20.786	70,710	166.953	-0.045	39.876	30,400	4.965	6660
3800	20.786	72,789	167.507	0.041	40.008	31,294	4.965	6840
3900	20.786	74,868	168.047	0.122	40.137	32,188	4.965	7020
4000	20.786	76,946	168.573	0.200	40.263	33,081	4.965	7200
4100	20.786	79,025	169.087	0.274	40.386	33,975	4.965	7380
4200	20.786	81,103	169.587	0.344	40.505	34,869	4.965	7560
4300	20.786	83,182	170.077	0.411	40.622	35,762	4.965	7740
4400	20.786	85,260	170.554	0.475	40.736	36,656	4.965	7920
4500	20.786	87,339	171.022	0.536	40.848	37,550	4.965	8100
4600	20.786	89,418	171.478	0.595	40.957	38,443	4.965	8280
4700	20.786	91,496	171.925	0.651	41.064	39,337	4.965	8460
4800	20.786	93,575	172.363	0.705	41.168	40,231	4.965	8640
4900	20.786	95,653	172.792	0.756	41.271	41,124	4.965	8820
5000	20.786	97,732	173.212	0.806	41.371	42,018	4.965	9000



Tabla I.21.
Calor específico,
entalpía, entropía y
constantes de
equilibrio del
hidrógeno H₂
[ZH76].

$\bar{m}_{H_2} = 2.016, \quad \Delta \bar{H}_{f,298}^\circ = 0 \text{ kJ/kmol} = 0 \text{ Btu/lbmol}$								
$T,$	$\bar{c}_p^\circ,$	$(\bar{H}^\circ - \bar{H}_{298}^\circ),$	$\bar{s}^\circ,$	$\log_{10} K_p$	$\bar{s}^\circ,$	$(\bar{H}^\circ - \bar{H}_{298}^\circ),$	$\bar{c}_p^\circ,$	$T,$
K	$\frac{\text{kJ}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}$	$\frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}$	$\frac{\text{kJ}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}$		$\frac{\text{Btu}}{\text{lbmol}\cdot\text{R}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{lbmol}}$	$\frac{\text{Btu}}{\text{lbmol}\cdot\text{R}}$	R
100	27.207	-5,587	99.945	0.000	23.871	-2,402	6,498	180
200	28.282	-2,807	119.167	0.000	28.463	-1,207	6,755	360
298	28.859	0	130.580	0.000	31.188	0	6,893	537
300	28.867	53	130.758	0.000	31.231	23	6,895	540
400	29.145	2,956	139.106	0.000	33.225	1,271	6,961	720
500	29.267	5,877	145.625	0.000	34.782	2,527	6,990	900
600	29.345	8,808	150.968	0.000	36.058	3,787	7,009	1080
700	29.456	11,747	155.499	0.000	37.140	5,051	7,035	1260
800	29.639	14,701	159.443	0.000	38.082	6,321	7,079	1440
900	29.899	17,678	162.948	0.000	38.920	7,600	7,141	1620
1000	30.205	20,683	166.114	0.000	39.676	8,892	7,214	1800
1100	30.640	23,725	169.013	0.000	40.368	10,200	7,318	1980
1200	31.069	26,811	171.698	0.000	41.009	11,527	7,421	2160
1300	31.491	29,939	174.201	0.000	41.607	12,871	7,522	2340
1400	31.906	33,108	176.550	0.000	42.168	14,234	7,621	2520
1500	32.312	36,319	178.765	0.000	42.697	15,615	7,718	2700
1600	32.709	39,571	180.864	0.000	43.199	17,013	7,813	2880
1700	33.097	42,861	182.858	0.000	43.675	18,427	7,905	3060
1800	33.474	46,190	184.761	0.000	44.129	19,858	7,995	3240
1900	33.841	49,556	186.580	0.000	44.564	21,305	8,083	3420
2000	34.197	52,958	188.325	0.000	44.981	22,768	8,168	3600
2100	34.541	56,395	190.002	0.000	45.381	24,246	8,250	3780
2200	34.874	59,865	191.617	0.000	45.767	25,738	8,330	3960
2300	35.195	63,369	193.174	0.000	46.139	27,244	8,406	4140
2400	35.504	66,904	194.679	0.000	46.498	28,764	8,480	4320
2500	35.802	70,469	196.134	0.000	46.846	30,297	8,551	4500
2600	36.088	74,064	197.544	0.000	47.183	31,842	8,619	4680
2700	36.362	77,687	198.911	0.000	47.509	33,400	8,685	4860
2800	36.625	81,336	200.238	0.000	47.826	34,969	8,748	5040
2900	36.876	85,011	201.528	0.000	48.134	36,549	8,808	5220
3000	37.117	88,711	202.782	0.000	48.434	38,139	8,865	5400
3100	37.348	92,434	204.003	0.000	48.725	39,740	8,920	5580
3200	37.569	96,180	205.192	0.000	49.009	41,351	8,973	5760
3300	37.780	99,948	206.351	0.000	49.286	42,970	9,024	5940
3400	37.983	103,736	207.482	0.000	49.556	44,599	9,072	6120
3500	38.179	107,544	208.586	0.000	49.820	46,236	9,119	6300
3600	38.367	111,372	209.664	0.000	50.077	47,882	9,164	6480
3700	38.549	115,217	210.718	0.000	50.329	49,535	9,207	6660
3800	38.726	119,081	211.748	0.000	50.575	51,196	9,249	6840
3900	38.898	122,962	212.757	0.000	50.816	52,865	9,291	7020
4000	39.068	126,861	213.744	0.000	51.052	54,541	9,331	7200
4100	39.235	130,776	214.710	0.000	51.283	56,224	9,371	7380
4200	39.402	134,708	215.658	0.000	51.509	57,915	9,411	7560
4300	39.570	138,656	216.587	0.000	51.731	59,612	9,451	7740
4400	39.739	142,622	217.499	0.000	51.949	61,317	9,492	7920
4500	39.912	146,604	218.394	0.000	52.162	63,029	9,533	8100
4600	40.090	150,604	219.273	0.000	52.372	64,749	9,575	8280
4700	40.275	154,623	220.137	0.000	52.579	66,477	9,620	8460
4800	40.468	158,660	220.987	0.000	52.782	68,212	9,666	8640
4900	40.671	162,717	221.823	0.000	52.982	69,957	9,714	8820
5000	40.887	166,794	222.647	0.000	53.178	71,710	9,766	9000





ANEXO II. Capa límite: parámetros y ecuaciones básicas

II.1 Parámetros

Habida cuenta de que en muchos problemas de dinámica de gases es necesario conocer y prever los efectos de la capa límite en las características de los flujos de masa, de cantidad de movimiento, de calor, etc., es conveniente conocer, aunque con un alcance forzosamente limitado, los métodos de cálculo de la capa límite que no se desprende.

Tratándose de las condiciones más habituales, en este anexo se estudia la capa límite turbulenta, en particular, de los flujos axisimétricos.

Considérese un conducto axisimétrico de eje X y un punto Q cualquiera de su contorno. Sean x, y dos ejes locales asociados al contorno del conducto, e Y la distancia de Q al eje.

El conducto se caracteriza, en general, por la condición $k\delta \ll 1$, donde k es la curvatura de la pared en Q y δ es el espesor de la capa límite en dicho punto (v. figura AII.1a).

De la condición anterior se deriva, según Prandtl, $\partial p / \partial y \ll 1$ para $y \ll \delta$. Así, las ecuaciones de la capa límite se escriben:

Continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v Y) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Cantidad de movimiento

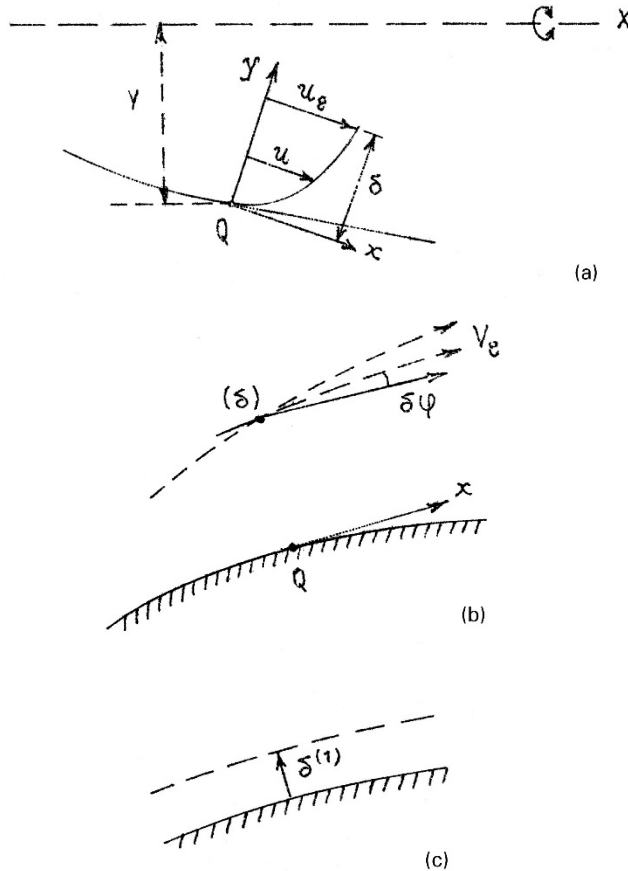
$$\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 Y) + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv Y) = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

Energía



$$\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u h_0 Y) + \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v h_0 Y) = \frac{\partial}{\partial y} (u \tau - q) \quad (\text{II.3})$$

Fig. II.1.
[Car71]



donde u, v son las componentes de la velocidad media local; ρ es la densidad media local; h_0 es la entalpía de remanso media local ($h_0 = h + u^2/2$); τ es la tensión de rozamiento turbulento; \dot{q} es el flujo específico térmico medio, y ρ_e, u_e son los valores de densidad y velocidad del fluido en $y = \delta$.

Dado el conocimiento insuficiente de τ y \dot{q} en flujo turbulento, la integración de las ecuaciones AII.1 a AII.3) se lleva a cabo, en muchos casos, por métodos aproximados. Estos métodos, inspirados por Prandtl y Von Karman, consisten en integrar las ecuaciones generales sobre el espesor δ y deducir las condiciones que han de satisfacer ciertos parámetros globales que se introducen en el curso de la integración. Estos parámetros son: el *espesor de desplazamiento*, δ^* ; el *espesor de la cantidad de movimiento*, δ^{**} , y el *espesor de energía*, Δ .

Sus definiciones son:



$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy \quad (\text{II.4})$$

$$\delta^{**} = \int \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (\text{II.5})$$

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{h_0}{h_{0e}} - 1 \right) dy \quad (\text{II.6})$$

Para ver el significado de cada uno de estos parámetros y su relación con el espesor de desplazamiento, se integra la ecuación de continuidad:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u Y) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} (\rho v Y) dy = 0$$

y, teniendo en cuenta las condiciones en los límites: $u = v = 0$, $y = 0$; $u = u_e$, $v = v_e$, $y = \delta$, resulta:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u Y) dy + \rho_e v_e Y = 0$$

Como quiera que δ varía con x , el primer término equivale a:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u Y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u Y dy - \rho_e u_e Y \frac{d\delta}{dx} \quad (\text{II.7})$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de δ^* , se obtiene:

$$\frac{v_e}{u_e} = \frac{d\delta^*}{dx} - (\delta - \delta^*) \frac{d}{dx} (\ln \rho_e u_e Y) \quad (\text{II.8})$$

Para interpretar esta condición, obsérvese que el primer miembro representa la pendiente del flujo exterior con respecto a la pared ($\delta\varphi = v_e / u_e$) ($\delta\varphi = v_e / u_e$) en la frontera (δ) de la capa límite.

Conocidos $\delta(x)$, $\delta^*(x)$ y $\rho_e u_e$, la ecuación AII.8 da la condición que ha de cumplir el *flujo exterior no viscoso sobre la línea frontera* (δ) a fin de que se satisfaga la conservación del flujo másico, de modo que, en un cálculo exacto del flujo no viscoso, es preciso sustituir la condición habitual $v = 0$ en la pared por la condición precedente escrita sobre la línea (δ).

En el caso de las capas límites de pequeño espesor, $\delta \ll Y$, la condición anterior es

equivalente a $\frac{v_e}{u_e} = \frac{d\delta^*}{dx}$, escrita sobre $y = \delta^*$.



Para tener en cuenta este efecto, basta con calcular el flujo no viscoso después de haber desplazado la pared hacia el interior el espesor δ^* , tal como se muestra en la figura AII.1c. Esta es la razón por la cual se denomina *efecto de desplazamiento*.

En cuanto a la ecuación integral de las cantidades de movimiento, aplicando la misma técnica de integración, resulta:

$$\frac{1}{Y} \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 Y) dy + (\rho uv)_0^\delta = \int \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} dy + [\tau]_0^\delta$$

Las condiciones en los límites son $\tau = 0$ para $y = \delta$, y $\tau = \tau_p$ para $y = 0$. Integrando, resulta:

$$\frac{1}{Y} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 Y) dy + \rho_e u_e v_e - \rho_e u_e \delta \frac{du_e}{dx} = -\tau_p$$

A partir de la ecuación AII.8 y de la definición de δ^{**} , se obtiene, después de algunas transformaciones, la *condición integral de las cantidades de movimiento*:

$$\frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left[\frac{H+1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{d}{dx} \ln(\rho_e u_e Y) \right] \quad (\text{II.9})$$

donde H es el *factor de forma* del perfil de velocidades y de temperaturas en la capa límite.

La ecuación diferencial ordinaria AII.9 se puede integrar paso a paso a lo largo de la pared si se conocen el flujo externo, el factor de forma H y el coeficiente de rozamiento

$$C_f = \frac{\tau_f}{\frac{1}{2} \rho_e u_e^2}.$$

El mismo método, aplicado a la ecuación de la energía, conduce a la condición integral:

$$\frac{\dot{q}_p}{\rho_e u_e h_{0e}} = \frac{ds}{dx} + \Delta \frac{d}{dx} \ln(\rho_e u_e Y) \quad (\text{II.10})$$

Esta ecuación puede integrarse también paso a paso si se puede expresar el primer miembro en función de otros parámetros de la capa límite.

De hecho, esta ecuación es sustituida con frecuencia por una hipótesis sobre la relación \dot{q} / τ_p .

II.2 Métodos de cálculo

Existen numerosos métodos de cálculo de la capa límite a partir de las ecuaciones precedentes. Todos tienen puntos en común y difieren solo generalmente en las hipótesis empíricas elegidas. Son conocidos como *métodos integrales* y requieren definir el movimiento en la capa límite a través de un perfil de velocidades.



Aparte de estos métodos, hay otros que aportan soluciones elementales, como el propuesto por Crocco y Busemann, o el de Howarth y Stewartson, específico para los flujos con gradientes de presión, en el caso de las capas límites laminares, y los métodos de Eckert,¹ Van Driest,² Sommer y Short,³ entre otros, para la capa límite turbulenta. Por otra parte, dadas la gran capacidad y rapidez de cálculo de los actuales ordenadores, naturalmente son muchos los problemas de capa límite que hallan solución por resolución numérica de las ecuaciones fundamentales a partir de su *discretización numérica por el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método del volumen finito*. Su consideración queda fuera del alcance de este libro.

Por su interés en relación con el diseño de las toberas, exponemos brevemente el método propuesto por R. Michel.⁴

Las hipótesis de partida son las siguientes:

a) El perfil de velocidades en la capa límite es de la forma: $\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$ (II.11)

b) El perfil de temperaturas está relacionado con la distribución de velocidades por la

$$\text{ley de Crocco modificada: } T - T_p = (T_f - T_p) \frac{u}{u_e} + (T_e - T_f) \left(\frac{u}{u_e}\right)^2$$

(II.12)

donde T_f representa la temperatura de equilibrio adiabático de la pared.

c) La ley del coeficiente de rozamiento, que adopta la forma:

$$C_f = \frac{0,0172}{\left(\frac{\rho_e u_e \delta^{**}}{\mu_e}\right)^{1/5}} \cdot g\left(M_e, \frac{T_p}{T_f}\right)$$

(II.13)

La función g se calcula por el método de la temperatura media T' de Eckert, que permite tener en cuenta los efectos de la compresibilidad. Esta función está representada en la figura AII.2.

El método de Eckert consiste en admitir que la capa límite compresible se comporta como una capa límite incompresible de temperatura uniforme T' media, función de T_p, T_f y T_e .

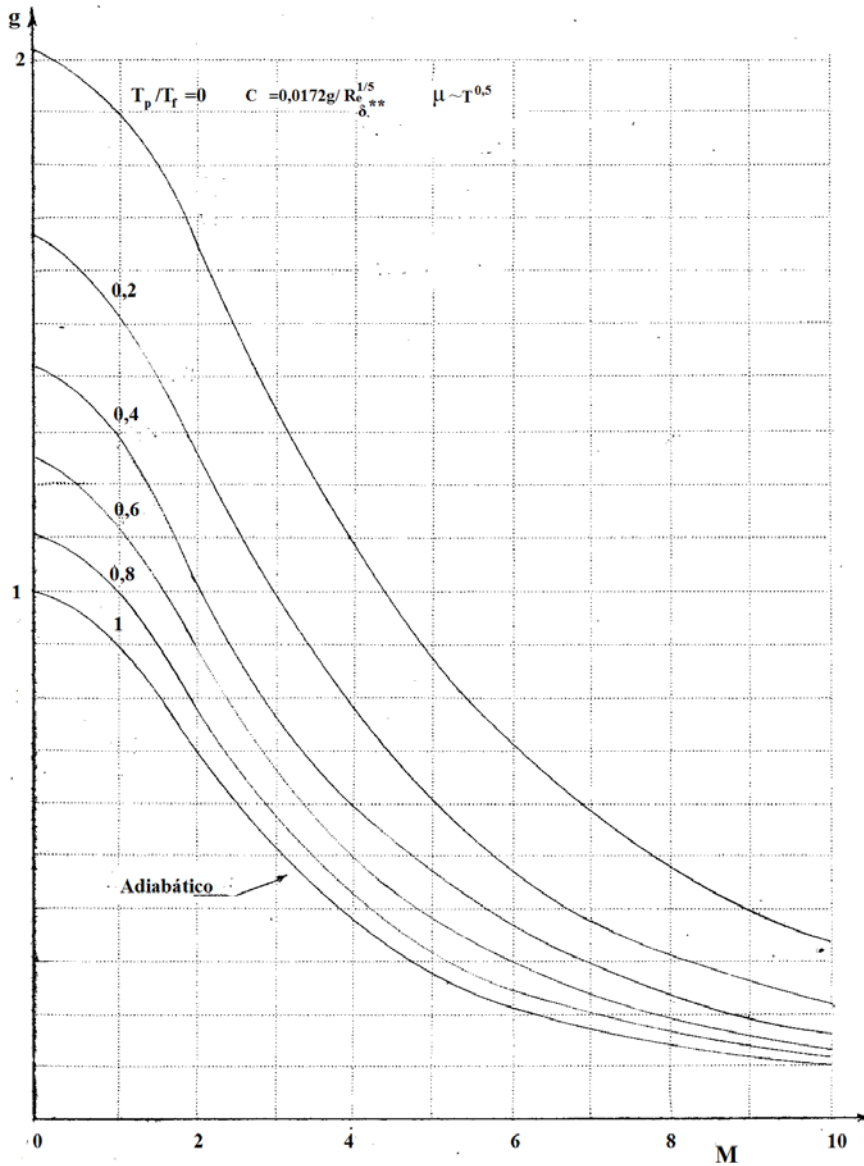
Resulta, pues, necesario conocer la distribución de temperaturas parietales T_p , o sea, para todo x en $y = 0$, $u = 0$.

El flujo de calor en la pared viene dado por

$$\dot{q}_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = \lambda (T_p - T_f) \frac{1}{u_e} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p \quad (\text{II.14})$$



Fig. II.2. Coeficiente de rozamiento turbulento [Car71]



Por otra parte, la experiencia demuestra que, en una capa límite turbulenta, se verifica:

$$T_f = T_e + r \cdot \frac{u_e^2}{2c_p}, \text{ con } r = \sqrt[3]{Pr}$$

donde $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ es el número de Prandtl y r es el factor de recuperación térmica parietal, respectivamente.



Para flujos acelerados ($n \sim 7$), las hipótesis (a) y (b) permiten calcular, aceptando que la capa límite es isóbara, $\rho T = \rho_e T_e$, los espesores δ^* y δ^{**} y su relación H . R. Michel propone la expresión:

$$H = 1,4 + 0,4 M_e^2 + 1,22 \frac{T_p - T_f}{T_e} \quad (\text{II.15})$$

Gracias a las diversas hipótesis, desde el momento en que se conocen el flujo exterior $p_e(x)$ y $u_e(x)$ y la distribución de temperaturas parietales $T_p(x)$, la ecuación integral AII.9 contiene como única incógnita δ^{**} y, por consiguiente, puede ser integrada paso a paso, dando $\delta_e(x)$ y $\delta^*(x) = H \delta^{**}$.

II.3 Efectos de la capa límite sobre el campo de flujo

Los principales efectos de la capa límite sobre el flujo viscoso en contacto con un contorno sólido son el retardo de la velocidad del fluido en la proximidad al contorno, donde deviene cero, y la separación de la corriente. Ambos se traducen en una modificación de las ecuaciones que cuantifican el caudal o el flujo másico, por una parte, y las fuerzas rasantes que se originan en la interfaz fluido-sólido, por otra. El campo de presión dentro de la capa límite no se modifica pero, al quedar modificada la “dimensión efectiva” del cuerpo con el cual el fluido está en contacto, el efecto sobre el campo de presión puede ser notable, como en los casos de flujo transónico e hipersónico.

En caso de cuerpos delgados, la relación de espesor del cuerpo r_e y el número de Mach de la corriente libre definen, por criterios de semejanza, el siguiente coeficiente de presión en un punto de dicho cuerpo:

En caso de régimen transónico:

$$C_p = \frac{r_e^{2/3}}{[M^2(\gamma+1)]^{1/2}} f \left\{ \frac{M^2 - 1}{((\gamma+1)M^2 r_e)^{2/3}} \right\} \quad (\text{II.16})$$

En caso de régimen hipersónico:

$$C_p = r_e^2 f \left(r_e \sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (\text{II.17})$$

La aplicación de las ecuaciones AII.16 y AII. 17 al efecto de desplazamiento de la capa límite sobre una placa plana requiere sustituir r_e por δ^*/l , donde l denota la longitud de la placa y δ^* viene dado por:

$$\delta^* = \alpha \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \left[1 + \beta \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \quad (\text{II.18})$$

donde α y β son constantes que dependen de la ley de viscosidad-temperatura, el número de Prandtl, etc.



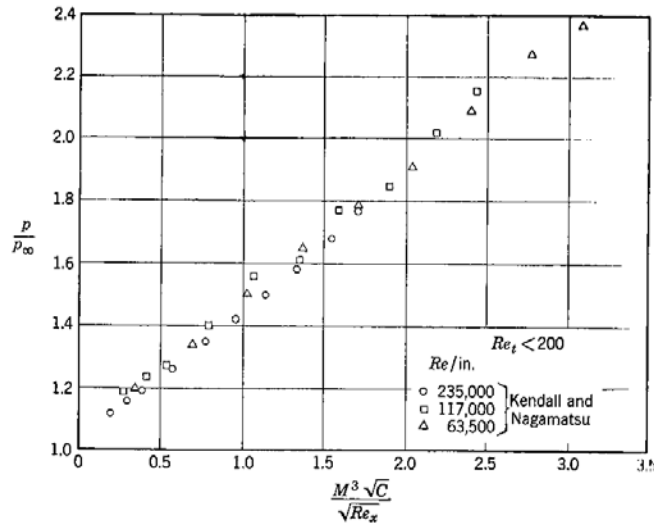
El valor de δ^*/l depende del régimen de flujo. Así, para valores del número de Mach iguales o inferiores a la unidad, se tiene $\delta^*/l = 1/\sqrt{Re}$, mientras que, para $M \gg 1$, la dependencia se expresa $\delta^*/l = (\gamma - 1)M^2/\sqrt{Re}$.

Sustituyendo estos valores de δ^*/l en las correspondientes ecuaciones AII.16 y AII.17, se obtiene:

$$C_p [(\gamma + 1)M^2 Re]^{1/3} = f \left\{ \frac{(M^2 - 1)Re^{1/3}}{[(\gamma + 1)M^2]^{2/3}} \right\}, \text{ para } M \sim 1 \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{C_p Re}{(\gamma - 1)^2 M^4} = f \left\{ \frac{(\gamma - 1)M^3}{\sqrt{Re}} \right\}, \text{ para } M \gg 1 \quad (\text{II.20})$$

Fig.II.3.
Presión parietal inducida, debida al crecimiento de la capa límite cerca del borde de ataque de una placa plana



En la figura AII.3, se muestran algunos resultados de la medición del efecto en un flujo hipersónico. La presión inducida cerca del borde de ataque de una placa plana es considerablemente más alta que su valor en la corriente libre, pero decae corriente abajo prácticamente como $x^{-1/2}$.

No obstante, cuanto ha sido expuesto, conviene tener presente que, en las capas límites que aparecen en los problemas de toberas supersónicas, el flujo se da a números de Reynolds altos (muy turbulentos) cuya capa límite es muy delgada, de modo que, para su espesor de desplazamiento, se puede tomar el valor clásico de la placa plana como una buena aproximación.

La existencia de la capa límite se traduce en un efecto de desplazamiento del flujo no viscoso, de suerte que, en el caso de las toberas, por ejemplo, el cálculo del flujo másico debe realizarse teniendo en cuenta que su diámetro o su ancho está reducido por el valor de dicho espesor, que se ha de calcular por la ecuación AII.19 de Von Karman.



De ello resulta la necesidad de aplicar, a la ecuación del flujo másico, un factor de corrección de la forma $\frac{\delta \dot{m}}{\dot{m}} = -\frac{2\pi r \delta^*}{\pi r^2}$.

II.4 Interacción onda de choque-capa límite

En los flujos supersónicos e hipersónicos, la influencia de la capa límite sobre la corriente externa suele denominarse *interacción onda de choque-capa límite*, ya que la presencia de la capa viscosa provoca la aparición de nuevas ondas de choque o la alteración de las ya existentes. El elevado gradiente de presión que produce la onda de choque altera considerablemente el flujo en la capa límite, particularmente si es laminar.

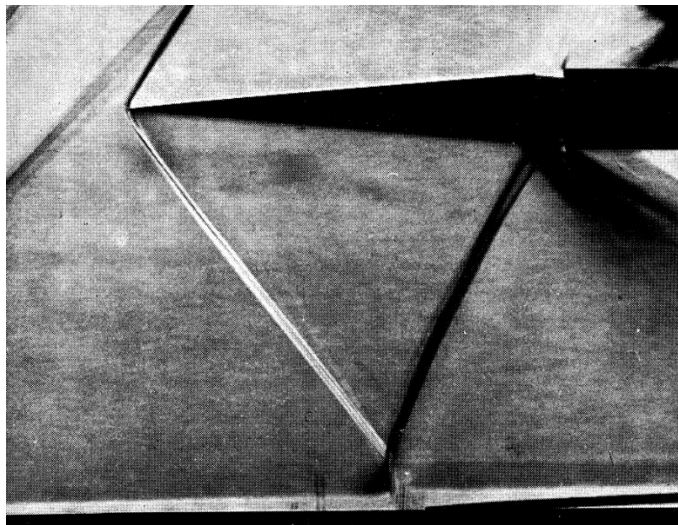
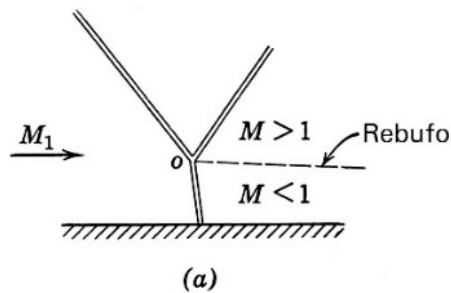


Fig.II.4.
Fotografía Schlieren
de una reflexión de
Mach ($M=1,38$)⁵

La presencia de la capa de cortadura cerca de la pared extiende el salto de presión de la onda de choque a una región considerable que, en algunos casos, llega a ser cincuenta veces el espesor de la capa límite y afecta incluso al flujo corriente arriba.

La figura AII.4 ilustra la reflexión de una onda de choque que surge de una pared con capa límite. Se observa un rebufo que se extiende corriente abajo a partir del punto triple debido a la diferencia de entropía en las líneas de corriente a ambos lados de dicho punto.

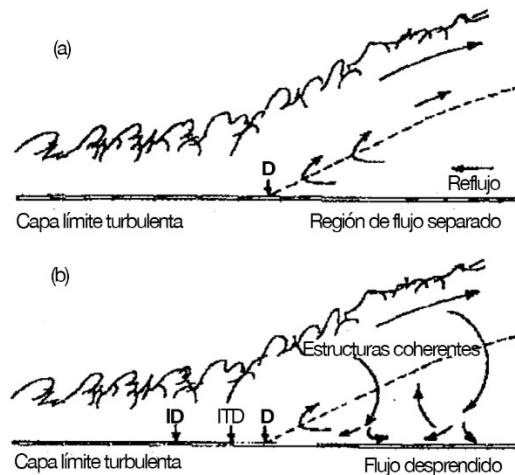
II.5 Separación de la capa límite

Por *separación*, se entiende el alejamiento brusco de la pared de la capa límite de un flujo que antes estaba en contacto con ella. De este alejamiento, resulta una interacción significativa con el flujo de la corriente libre: un aumento brusco del espesor de la región de flujo rotacional próxima a una pared y valores significativos de la componente de velocidad normal a ella. Esta interacción no deseada causa una reducción en las prestaciones de cualquier dispositivo que opera con el flujo que experimenta la separación como, por ejemplo, una pérdida de elevación de la presión del fluido en un difusor.

Para un flujo bidimensional estacionario de corriente libre sobre superficies currentilíneas, la separación empieza de forma intermitente en una localización dada, es decir, la inversión del flujo en dicha región ocurre solo en una fracción del tiempo total.

Definida la fracción del tiempo γ_{pu} como la fracción positiva de una distribución de probabilidad de velocidad en el sentido de la corriente, en función de la correspondiente al flujo que prosigue corriente abajo hay un conjunto de definiciones cuantitativas sobre el estado de desprendimiento cerca de la pared de capas límites turbulentas estacionarias de corriente libre, como: el *desprendimiento estacionario* (ID), que ocurre con un reflujo instantáneo el 1 % del tiempo ($\gamma_{pu} = 0,99$); el *desprendimiento transitorio intermitente* (ITD), que ocurre con un reflujo instantáneo el 20 % del tiempo ($\gamma_{pu} = 0,80$); el *desprendimiento transitorio* (TD), que ocurre con un reflujo instantáneo el 50 % del tiempo ($\gamma_{pu} = 0,50$), y el *desprendimiento* (D), que ocurre donde la tensión de cortadura parietal promediada en el tiempo $\overline{\tau_w}$ es 0. Los datos disponibles indican que TD y D ocurren en la misma localización.

Fig.II.5.
Esquema tradicional
de la capa límite turbu-
lenta separada⁶



La longitud de la región entre los puntos ID, ITD, TD, y D depende de la geometría y del flujo, pero las definiciones de estos puntos son las mismas (v. figura AII.5).

La línea de trazos indica la localización, donde $U = 0$.



Para superficies planas o de pequeña curvatura, el flujo medio corriente arriba de ID obedece a la “ley de la pared” y a la “ley de la estela”, en la medida que la tensión de cortadura máxima $-\rho\bar{u}\bar{u}_{\max}$ es menor que $1,5 \tau_w$.

Cuando es mayor, se aplican la correlación de la velocidad media propuesta por Perry y Schofield, la “ley de la pared” y la ecuación del rozamiento parietal de Ludwig-Tillman.

Sandborn y Kline observaron que una familia de perfil de velocidad media del tipo “ley de potencia” parecía ajustar bien los datos sobre dónde aparecía un reflujo intermitente apreciable.

Esta familia de perfiles tiene por ecuación:

$$h = \frac{H-1}{H} = \left(2 - \frac{\delta^*}{\delta} \right)^{-1} \quad (\text{II.21})$$

donde $H = \delta^* / \theta$ y δ es el espesor de la capa límite, allí donde la velocidad es $0,995 U$.

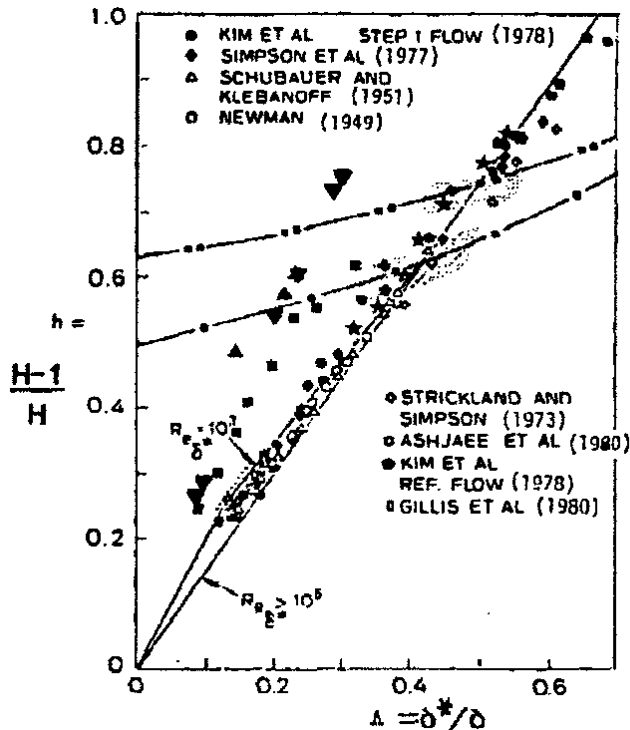


Fig. II.6.
Gráfica de h vs
 δ^* / δ para flujos
con desprendimiento y
readherencia^o

En la figura AII.6, se muestra la relación entre h y δ^* / δ .

A medida que una capa límite turbulenta se enfrenta a un gradiente de presión adversa, el flujo cerca de la pared se desacelera hasta que se produce primero un pequeño reflujo en el desprendimiento incipiente.

Pequeños elementos tridimensionales de flujo se mueven corriente arriba una cierta distancia y, más tarde, son transportados corriente abajo. Estos reflujos ocurren en regiones



de poca energía cinética y son causados por fuerzas que surgen de las estructuras de gran escala y del gradiente de presión adversa.

Cuando $\gamma_{pu} > 0$ y $-\bar{u}\bar{v} \approx 0$ en el reflujo, el perfil de velocidad del tipo “ley de la pared” basado en una tensión de cortadura en la pared deja de ser válido.

Corriente abajo del desprendimiento ($\gamma_{pu} < 0,5$ cerca de la pared), Simpson propone la ecuación:

$$\frac{U}{|U_N|} = A \left(\frac{y}{N} - \ln \left| \frac{y}{N} \right| - 1 \right) - 1 \quad (\text{II.22})$$

donde $A = 0,3$, U_N es la máxima velocidad negativa y N es su distancia a la pared.

Esta ecuación describe bien el perfil de velocidad de la región media del reflujo medio ($0,02 < y/N < 1,0$, donde $N/\delta \leq 0,06$). Para $y/N > 1,0$, la ecuación AII.22) no describe bien el perfil de velocidad media.

Para la fricción parietal en el reflujo, se ha propuesto la ecuación $\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_N^2} \approx 4,5 Re_N^{-1/2}$, en

que $Re = \frac{U_N(L_r - X)}{\nu}$ y $(L_r - X)$ es la distancia corriente arriba de la localización

donde el flujo vuelve a adherirse a la pared.

Por último, conviene tener presente que los efectos de curvatura de pared significativa no están bien descritos cuantitativamente, si bien la mayoría de los fenómenos de separación ocurren sobre superficies curvadas.

El desprendimiento a partir de paredes muy divergentes conduce a un gran ahogo transitorio de difusores y capas de cortadura batientes alrededor de cuerpos encrespados.

(Ver [LR57] [Car71] [SB86] [Sch60]) (Ver ref. 6)







ANEXO III. El método de las características y método de la hodógrafa

III.1 Fundamentos

El método de las características permite calcular el flujo perturbado de un gas ideal, lo cual permite diseñar correctamente los contornos de la tobera para el régimen supersónico, así como determinar los parámetros del flujo supersónico sobre cuerpos bidimensionales y axisimétricos, cuyas ecuaciones de flujo resuelve.

Sea un movimiento bidimensional estacionario de un gas sin efectos de viscosidad. La ecuación diferencial fundamental de la dinámica de gases se escribe:

$$(u_1^2 - a^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + (u_2^2 - a^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{III.1})$$

donde u_1 y u_2 son las componentes de la velocidad del fluido según las direcciones x_1 , x_2 .

Si $(u_1^2 + u_2^2)/a^2 > 1$, las ecuaciones son de tipo hiperbólico y sus soluciones se obtienen numéricamente por el método de las características.

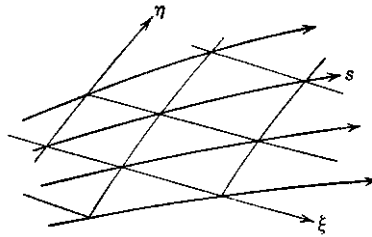
Las características son líneas sobre el plano x_1, x_2 , a lo largo de las cuales se propaga la perturbación y sobre las cuales la derivada normal de las variables dependientes u_1, u_2 puede ser discontinua. Para las ecuaciones del tipo III.1, las características son las líneas de Mach. Sobre las características, o líneas de Mach, las variables dependientes satisfacen una cierta relación, conocida como *relación de compatibilidad*.

Tomemos, por conveniencia, un sistema natural de coordenadas en que la velocidad se expresa en términos de su magnitud y dirección (V, θ), y las variables independientes, por las coordenadas de línea de corriente (s, n) (v. figura III.1). Las ecuaciones combinadas de cantidad de movimiento y de continuidad se expresan así:

$$\frac{\cot^2 \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Fig.III.1.
[LR57]



Aquí, la dirección característica, o de Mach, está introducida explícitamente por la expresión:

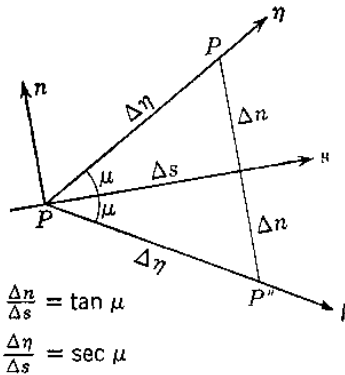
$$\cot^2 \mu = M^2 - 1 \quad (\text{III.4})$$

Introduciendo ahora la función de Prandtl-Meyer, ν , que es una medida adimensional de la velocidad definida por $\nu = \int \frac{\cot \mu}{V} dV$, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial s} - \tan \mu \frac{\partial \theta}{\partial n} &= 0 \\ \tan \mu \frac{\partial \mu}{\partial n} - \frac{\partial \theta}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5})$$

La relación de compatibilidad entre ν y θ se establece volviendo a escribir las ecuaciones anteriores en un sistema coordenado (ξ, η) , que consiste en la red de líneas de Mach que se muestra en la figura III.2. La relación entre ambos conjuntos de coordenadas viene establecida por el hecho de que las líneas de Mach están inclinadas los ángulos $\pm \mu$ con respecto a la línea de corriente.

Fig.III.2.²
[LR57]



Consideremos cualquier función f . Al desplazarnos de P a P' , podemos escribir $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta \eta$, mientras que a lo largo del sistema de coordenadas de la línea de corriente tenemos:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial f}{\partial n} \Delta n = \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\Delta n}{\Delta s} \right) \Delta s$$



Comparando las dos ecuaciones. resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\Delta n}{\Delta s}$$

que, de acuerdo con la geometría mostrada en la figura, se puede escribir de la forma:

$$\sec \mu \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial s} + \tan \mu \frac{\partial f}{\partial n} \quad (\text{III.6})$$

y, en la otra dirección (de P a P''):

$$\sec \mu \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial s} - \tan \mu \frac{\partial f}{\partial n} \quad (\text{III.7})$$

Las ecuaciones III.6 y III.7 aportan las reglas que relacionan las derivadas de cualquier función f en los dos sistemas de coordenadas. Añadiendo y sustrayendo las ecuaciones III.5, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(\nu - \theta) + \tan \mu \frac{\partial}{\partial n}(\mu - \theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial s}(\nu + \theta) - \tan \mu \frac{\partial}{\partial n}(\nu + \theta) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Comparándolas con las reglas de derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\nu - \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(\nu + \theta) = 0$$

cuya integración da:

$$\nu - \theta = R, \text{ constante a lo largo de la característica } \eta \quad (\text{III.8})$$

$$\nu + \theta = Q, \text{ constante a lo largo de la característica } \xi$$

Estas son las relaciones de compatibilidad entre ν y θ . Q y R reciben el nombre de invariantes de Riemann.

Las relaciones de compatibilidad, en general, se obtienen de forma diferencial y no siempre pueden ser integradas de forma tan conveniente como la anterior.

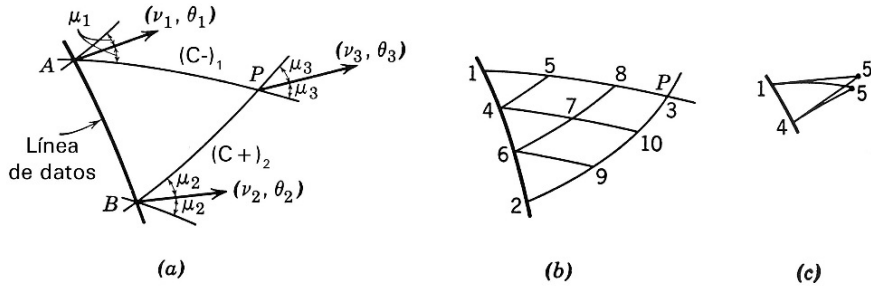
(Ver [CH56] y [LR57])

III.2 El método de cálculo

El método de cálculo se ilustra en la figura III.3. Como quiera que el problema de las características se ha formulado en términos de la función ν de Prandtl-Meyer, para encontrar las soluciones es conveniente trabajar con ν , en lugar de V . Una vez resuelto el problema, se pueden convertir los valores de ν en M , μ , V/a^* , P/P_0 o cualquier otra variable del flujo supersónico (v. tabla A1.5).



Fig.III.3.
Redes de carac-
terísticas [LR57]



La figura III.3 ilustra el método de cálculo. Véase, por ejemplo, cómo se calculan las condiciones en un punto arbitrario P a partir de una curva de datos tal como A, B.

Por el punto P, pasan dos características, ξ, η , que cortan la curva de datos en los puntos A, B, respectivamente. En dichos puntos, se conocen M, θ (curva de datos) y, por tanto, Q y R. Es evidente que, en A y P, $Q_3 = Q_1$ y, en B y P, $R_3 = R_2$, de lo cual resulta:

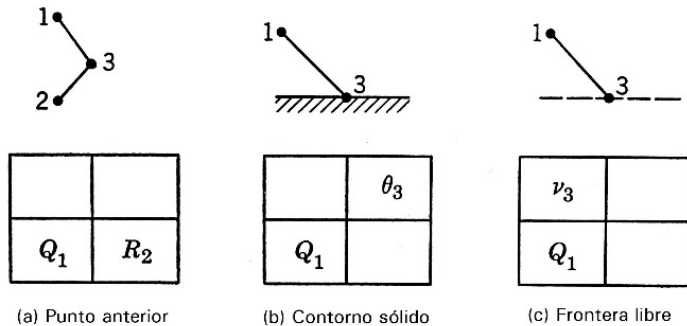
$$\left. \begin{aligned} \nu_3 + \theta_3 &= \nu_1 + \theta_1 & \nu_3 &= \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) & \nu &= \frac{1}{2}(Q + R) \\ \nu_3 - \theta_3 &= \nu_2 - \theta_2 & \theta_3 &= \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) & \theta &= \frac{1}{2}(Q - R) \end{aligned} \right\}$$

Esto sería suficiente si los puntos A, B, P estuviesen muy próximos, pues de lo contrario la solución todavía no es completa, ya que la localización de las características no se conoce de antemano.

La exactitud de la construcción depende del tamaño de la malla, que conviene que sea el mínimo posible sin que se requiera un número excesivo de iteraciones. En el caso de la figura, se muestra cómo se llega a caracterizar el punto P con mayor precisión a base de determinar las características que pasan por los puntos 1, 5, 8, por una parte, y 2, 9, 10, por otra. Se trata de un cálculo que prosigue hacia fuera a partir de la curva de datos.

Hasta aquí se ha considerado el caso en que se parte de una curva de datos; sin embargo, son otras muchas las condiciones que pueden presentarse: punto interior, contorno sólido, contorno libre y presencia de choque, entre otras (v. figura III.4).

Fig.III.4.
[LR57]





En el caso de un contorno sólido el valor de Q se obtiene a partir del punto 1 y el valor de θ_3 viene dado. En el caso de frontera libre, viene dado el valor de V . Cuando aparecen choques, se requiere calcular las características en un punto detrás del choque, por ejemplo el 3 (v. figura III.5).

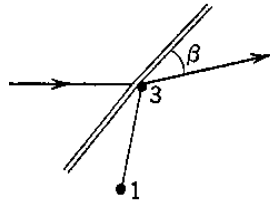
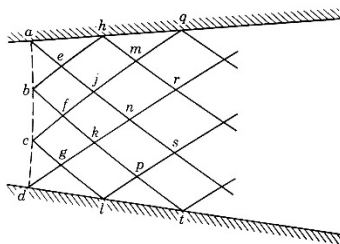


Fig.III.5.
[LR57]

A partir del punto 1, se obtiene la magnitud R ; la otra está determinada por las ecuaciones de choque como relación entre v_3 y θ_3 .

Determinadas las condiciones en el punto 3, se calcula el ángulo de la onda de choque, β , que se utiliza para trazar el siguiente segmento de la onda de choque.

La figura III.6 es un ejemplo de construcción de las características en un canal plano recto divergente 12° en que el flujo es radial, con un número de Mach 1,436.



$$\begin{aligned} Q &= v + \theta \\ R &= v - \theta \\ v &= \frac{1}{2}(Q + R) \\ \theta &= \frac{1}{2}(Q - R) \end{aligned}$$

Condiciones de contorno					
Datos				Derivadas	
Point	M	v	θ	Q	R
a	1.436	10°	6°	16	4
b		10	2	12	8
c		10	-2	8	12
d		10	-6	4	16
h			6		
q			6		

Punto e	Punto h
$Q_e = Q_a = 16$ $R_e = R_b = 8$	$R_h = R_e = 8$ $\theta_h = 6$
$v_e = \frac{1}{2}(16 + 8) = 12$ $\theta_e = \frac{1}{2}(16 - 8) = 4$	$v_h = R_h + \theta_h = 14$ $Q_h = v_h + \theta_h = 20$

Fig.III.6.
[LR57]

III.2.1 Flujo plano

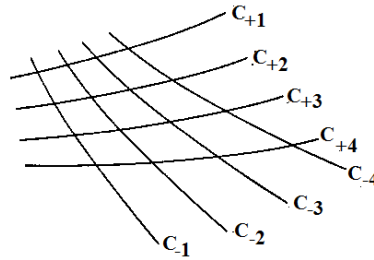
Para el flujo plano supersónico, las relaciones de compatibilidad son:

$$\begin{aligned} v + \theta &= Q, \text{ sobre las características } \xi \\ v - \theta &= R, \text{ sobre las características } \eta \end{aligned}$$



Estas relaciones son independientes de la geometría específica del flujo, ya sea de región general o no simple, región simple—algunas veces denominada *onda*—o región uniforme, o bien de estado constante.

Fig.III.7.
Características en una
región no simple



En la región general, o no simple (v. figura III.7), las características son curvas, y cada una corresponde a un valor de R o bien Q .

El valor de v y θ en la intersección de dos características cualesquiera se encuentra como solución de las ecuaciones:

$$v = \frac{1}{2}(Q + R) ; \theta = \frac{1}{2}(Q - R)s$$

A lo largo de una característica η , R es constante, de manera que los cambios en v y θ dependen únicamente de los cambios en Q , que se deben al cruce de características ξ .

Así:

$$\Delta v = \frac{1}{2} \Delta Q = \Delta \theta$$

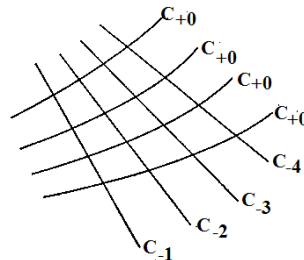
Análogamente, siguiendo una característica ξ , se tiene $\Delta v = \frac{1}{2} \Delta R = -\Delta \theta$. En resumen:

los cambios que experimenta el flujo pueden determinarse fácilmente una vez conocidos los valores de R y Q sobre las características.

Los otros casos son:

Región simple, o bien *onda simple*, definida por la condición de que uno de los invariantes, Q o bien R , es constante en toda la región (v. figura III.8). Si, por ejemplo, todas las características η tienen el mismo valor R_0 , v y θ son individualmente constantes a lo largo de una característica ξ y, por tanto, ha de ser recta. Los cambios que experimenta el flujo al atravesar las características rectas están relacionados por $\Delta v = \pm \Delta \theta$.

Fig.III.8.
Características en
una región simple





Región uniforme, definida por valores constantes de Q y de R . Entonces, v y θ son uniformes y ambos conjuntos de características son líneas rectas que forman una red paralela (v. figura III.9).

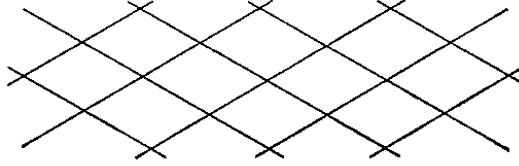


Fig.III.9.
Características en una
una región de flujo
uniforme

III.2.2 Flujo axisimétrico

El flujo axisimétrico está definido en términos de solo dos variables independientes y dos dependientes.

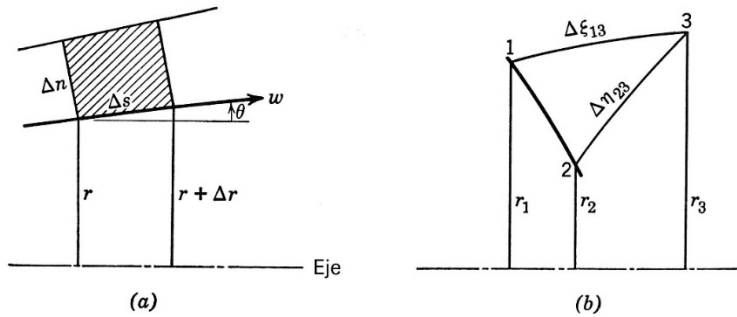


Fig.III.10.
Coordenadas para
flujo axisimétrico:
(a) coordenadas natu-
rales, (b) red de ca-
racterísticas
[LR57]

La figura III.10 muestra una célula del campo de flujo axisimétrico en coordenadas naturales (a) y la red de características (b).

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{\cot^2 \mu}{w} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \theta}{\partial s} = 0$$

Una vez transformadas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (v - \theta) = -\sin \mu \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (v + \theta) = \sin \mu \frac{\sin \theta}{r}$$

(III.9) Las ecuaciones III.9 solo pueden integrarse

numéricamente puesto que está implicada la geometría del flujo a través de la variable r . No obstante, si la malla es pequeña, cabe aceptar, la solución siguiente:



$$\begin{aligned}
 (v_3 - \theta_3) - (v_2 - \theta_2) &= \text{sen} \mu_2 \frac{\text{sen} \theta_2}{r_2} \Delta \eta_{23} \\
 (v_3 + \theta_3) - (v_1 + \theta_1) &= \text{sen} \mu_1 \frac{\text{sen} \theta_1}{r_1} \Delta \eta_{13}
 \end{aligned}$$

donde $\Delta \eta_{23}$ y $\Delta \theta_{13}$ son longitudes de segmento a lo largo de las características η y ξ .

La solución de las dos ecuaciones es:

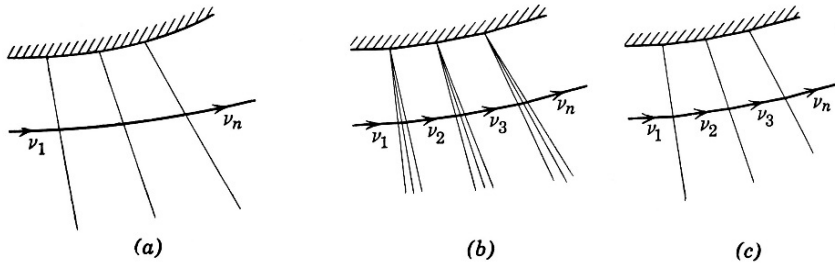
$$\begin{aligned}
 v_3 &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2) - \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \left(\text{sen} \mu_1 \frac{\text{sen} \theta_1}{r_1} \Delta \xi_{13} + \text{sen} \mu_2 \frac{\text{sen} \theta_2}{r_2} \Delta \eta_{23} \right) \\
 \theta_3 &= \frac{1}{2} (v_1 - v_2) + \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} \left(\text{sen} \mu_1 \frac{\text{sen} \theta_1}{r_1} \Delta \xi_{13} - \text{sen} \mu_2 \frac{\text{sen} \theta_2}{r_2} \Delta \eta_{23} \right)
 \end{aligned}$$

La aplicación de estas ecuaciones requiere un conocimiento de las distancias radiales de los puntos en cuestión y las longitudes de los lados de malla.

III.2.3 Cálculo con ondas finitas, débiles

En otro capítulo, se ha explicado cómo se analizan los flujos supersónicos utilizando ondas; aquí se expone cómo, si la onda es débil, el método de cálculo con ondas puede sustituir el método de las características. Ahora bien, si los métodos son equivalentes bien es verdad que son algo diferentes; en particular, hay que tener presente que las características no son ondas, y al revés. La diferencia y la semejanza entre ellas se ilustran en la figura III.11.

Fig.III.11.
[LR57]



El método de ondas débiles consiste en sustituir el contorno o una línea de corriente continua por una serie de segmentos uniformes en escalón. Los abanicos de expansión, que se originan en las esquinas, dividen el campo en segmentos de flujo uniformes. Como son ondas simples, los cambios en el flujo a través de ellas están relacionados, de manera que se satisface $\Delta v = \pm \Delta \theta$. Una aproximación consiste en sustituir el abanico por una simple línea: la central.



III.2.4 Interacción de ondas

La utilización de ondas débiles finitas para la construcción del campo de flujos planos es válida siempre que la desviación del flujo $\Delta\theta$ que la onda produce no se vea afectada por la intersección con otras ondas. La figura III.9 ilustra esta condición: la intersección de una onda con otras no cambia su dirección original.

Si no es así, en cada una de las celdas del campo de flujo constituida por intersección de ondas de distinto signo hay que calcular la desviación del flujo producida por la intersección con otra (v. figura III.12). Si m es el número de intersecciones de una onda de dirección η con ondas de dirección ξ y n el número de intersecciones de una onda de dirección ξ con ondas de dirección η , el desvío hacia abajo del flujo viene dado por:

$$\theta = \theta_1 + \sum_{i=1}^m \delta_{\xi i} - \sum_{i=1}^n \delta_{\eta i}$$

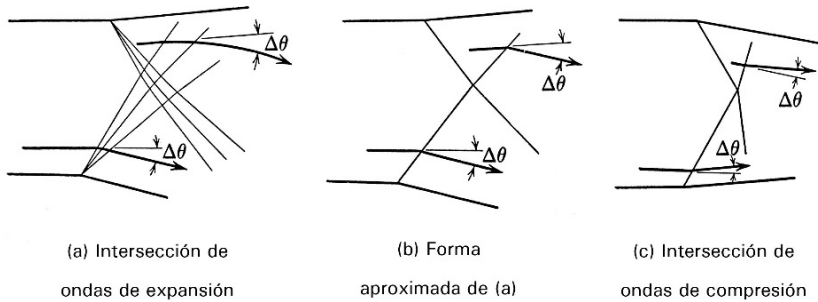


Fig.III.12.
[LR57]

A su vez, se incrementa v en la cuantía $v = v_1 + \sum_{i=1}^m \delta_{\xi i} + \sum_{i=1}^n \delta_{\eta i}$.

Si todas las ondas son de la misma intensidad, es decir, $\delta_i = 1^\circ$, entonces:

$$\theta - \theta_1 = m - n ; \quad v - v_1 = m + n$$

Si se han de incluir ondas de compresión, es necesario introducir una notación adicional. Por ejemplo, si el flujo cruza k ondas de compresión del tipo ξ y l del tipo η , entonces los resultados anteriores son:

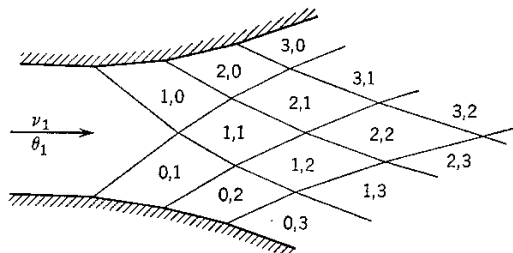


Fig.III.13.
[LR57]

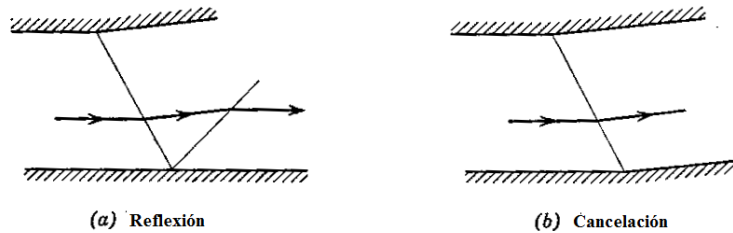


$$\theta - \theta_1 = m - n - k + l$$

$$v - v_1 = m + n - k - l$$

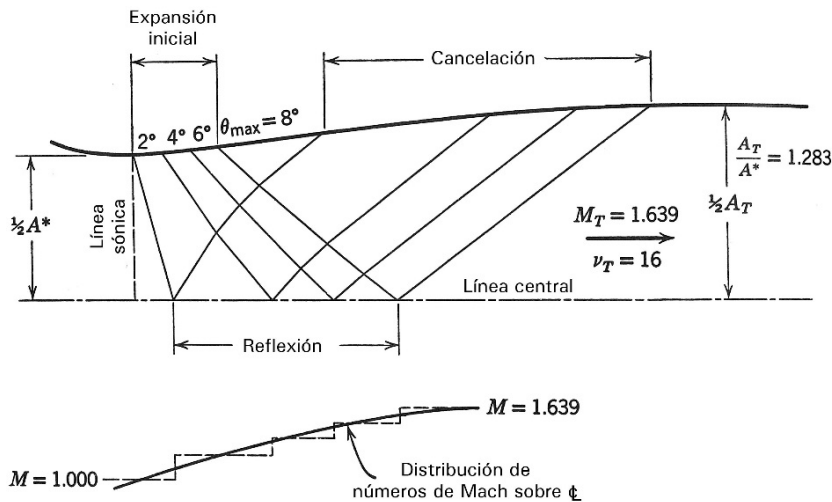
Otros criterios necesarios para construir la red de flujo son la reflexión y la cancelación de onda. La figura III.14 ilustra cómo se producen la reflexión de onda y la cancelación. En la reflexión, una onda de tipo ξ cambia a onda del tipo η con la misma intensidad de giro para mantener la misma dirección de flujo, mientras que, en la cancelación, el giro asegura que la dirección del flujo sea paralela al contorno.

Fig. III.14.
[LR57]



En la figura III.15, se muestra la aplicación del método de cálculo con ondas débiles al diseño de una tobera supersónica con la condición de que, en la sección final del difusor divergente, el flujo sea uniforme y paralelo a la dirección del eje.

Fig. III.15.
[LR57]



(Ver [LR57])

III.3 Desarrollo simplificado del método de las características

En una tobera de perfil determinado, es raro que el flujo en la salida satisfaga la teoría unidimensional. El cálculo exacto del empuje requiere entonces un estudio del flujo en la tobera por el método de las características, teniendo en cuenta los efectos de la capa límite. A continuación, explicamos brevemente en qué consiste este método de cálculo, que limitamos al caso de gas real en equilibrio.



Las ecuaciones generales en los ejes ortogonales $\overline{x_1}$, $\overline{y_1}$, respectivamente paralelo y normal a la velocidad \vec{V} (v. figura III.16), se escriben así:

Continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho V) + \rho V \left(\frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \frac{\sin \theta}{y} \right) = 0 \quad (\text{III.10})$$

Cantidad de movimiento axial:

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Cantidad de movimiento transversal:

$$\rho V^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0 \quad (\text{III.12})$$

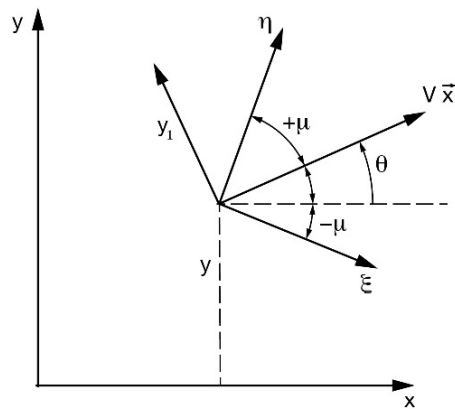


Fig. III.16.
[Car71]

Por otra parte, al tratarse de un flujo isentrópico:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 0 \quad \text{y} \quad h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

Entre las ecuaciones III.10 y III.11, se puede eliminar la derivada $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ y, como

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s=Cte} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_1}}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}}, \text{ se puede poner:}$$

$$a^2 = \gamma(P, \rho) \frac{P}{\rho} \quad (\text{III.13})$$

A su vez, la transformación de ejes ortogonales a líneas de características se expresa así:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \cos \mu \frac{\partial}{\partial x_1} - \operatorname{sen} \mu \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \cos \mu \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{sen} \mu \frac{\partial}{\partial y_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.14})$$

Combinando las ecuaciones III.10, III.11, III.12 y III.13, e introduciendo el número de Mach, se obtiene:

$$\frac{(M^2 - 1)}{\gamma P M^2} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{y} = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{1}{\gamma P M^2} \frac{\partial P}{\partial y_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{III.17})$$

Aplicando la transformación III.14, donde ξ y η representan las direcciones de las líneas de Mach, se pasa a las denominadas *ecuaciones de las características*:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma P M^2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{M y} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma P M^2} \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{M y} \quad (\text{III.19})$$

La ecuación III.18 da la relación entre P y ρ al desplazarse $\delta \eta$ sobre la característica considerada, o sea:

$$c(\eta), \quad \frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} + \delta \theta = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{M y} \delta \eta \quad (\text{III.20})$$

$$c(\xi), \quad \frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - \delta \theta = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{M y} \delta \xi \quad (\text{III.21})$$

En general, se puede aceptar que el flujo en una tobera es, en su conjunto, isentrópico por lo que P es una función solo de M . Por tanto, se puede poner:

$$d \Pi = \frac{dP}{P} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} \quad (\text{III.22})$$

III.3.1 Método de cálculo

Las operaciones que se realizan normalmente para determinar las características puntuales del flujo en una tobera son las siguientes:

Operación (N), Operación (C), Operación (A), Operación (P)



Operación (N)

Si se conocen P y θ , en primer lugar se deducen los valores de la entalpía $h(P, s)$ y de la velocidad $V = \sqrt{2(h_0 - h)}$. Sea mediante las ecuaciones de gas perfecto, sea también

por la tabla de Mollier, se conoce, pues, $\mu_j = \arcsen\left(\frac{a}{V}\right)_j$ y μ_k .

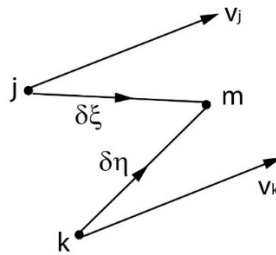


Fig.III.17.

Así pues, se puede determinar el punto interior m como intersección de las líneas (ξ) , que sale de j , y (η) , que sale de k , asimiladas a su tangente inicial. Conocidos $\delta\xi$ y $\delta\eta$ (v. fig. III.17), las relaciones lineales $C(\xi)$ y $C(\eta)$ dan P_m y θ_m en los puntos j y k .

Operación (C)

Si se conocen P y θ en un punto k próximo a la pared (C) (v. figura III.18), se calcula μ_k como antes; después se prolonga la línea de Mach (η) , que sale de k hasta el contorno que corta en C. Se calcula $\delta\eta = \overline{kc}$ y se determina θ de acuerdo con la ecuación del contorno; se tiene, pues, $\delta\theta = \theta_c - \theta_k$, y la ecuación III.19 aplicada de k a c da $\delta P = P_c - P_k$, de donde se obtiene P_c .

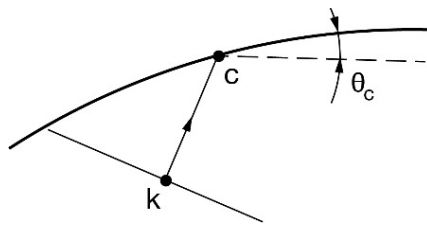


Fig.III.18.

Operación (A)

En este caso, los cálculos se realizan por iteración, utilizando en cada paso los valores medios de $(\mu + \theta)$, $(\mu - \theta)$ para las construcciones geométricas de η y ξ , y de

$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2}$ para los cálculos de P y de θ .



Si una línea de Mach encuentra el eje, el valor de $\frac{\sin \theta}{y}$ resulta indeterminado $\left(\frac{0}{0}\right)$, pues y es la distancia al eje desde dicho punto y θ es el ángulo que forma la dirección del vector velocidad con respecto al eje de la tobera, que es cero. En el caso de la característica (ξ) , se ha de partir de la aproximación $\frac{\sin \theta}{y} \approx \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{\xi}$, o sea:

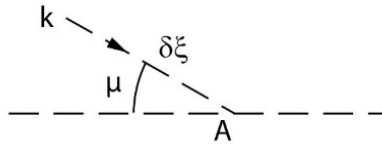
$$\delta y = -\sin(\mu) \delta \xi = -\frac{\delta \xi}{M}$$

Por consiguiente, para la condición $c(\xi)_A$, se tiene $\frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - \delta \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)_{\xi}$.

$\delta \xi = \delta \theta$, lo cual evita la indeterminación y da $\frac{\delta P}{P} \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\gamma M^2} - 2\delta \theta = 0$.

Como en el eje $\theta_A = 0$, obtenemos: $\ln P_A = \ln P_k - \frac{2\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \theta_k$

Fig.III.19.

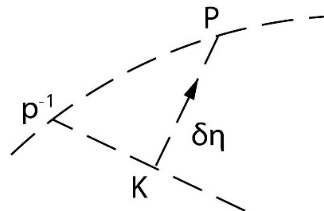


Operación (P)

Consideremos, por ejemplo, una línea de Mach que encuentra en el punto P una línea de chorro a lo largo de la cual se conoce a priori la presión. El cálculo de k en P (desconocido) se lleva a cabo como en la operación (C), salvo que se conozca P en el punto P y que la incógnita allí sea θ .

El punto P se obtiene por intersección de (η) y de la línea de corriente extrapolada a partir del punto P^{-1} precedente (v. figura III.20).

Fig.III.20.





Caso no isentrópico

En este caso, el cálculo debe dar, en cada punto, las tres variables P , θ , s . Pero, como s permanece constante a lo largo de cada línea de corriente, viene dado inmediatamente en las operaciones (C), (A) y (P).

En la operación (N), s se interpolará entre las dos líneas de corriente que salen de j y de k . Obsérvese aquí que s interviene en el cálculo de $h = h(P, s)$.

(Ver [Car71])

III.4 Hodógrafa

Por hodógrafa se entiende el lugar geométrico de los extremos de los vectores representativos de la velocidad de un punto que recorre una trayectoria cualquiera. La hodógrafa se obtiene situando los vectores velocidad ordenadamente con relación al tiempo, con un mismo origen O en el espacio. El sistema de coordenadas en que las componentes de la velocidad son las variables independientes es el *plano de hodógrafa*. En este sistema de coordenadas, algunos problemas que son no lineales en el plano físico devienen lineales cuando son reformulados en el plano de hodógrafa. En el análisis del flujo isentrópico bidimensional plano estacionario, se puede hacer una transformación que intercambia el papel de las variables independientes (x y y) y las variables dependientes (u y v). La transformación conduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de x e y como funciones de u y v . Esta transformación es conocida como *transformación hodógrafa*.

A título de ejemplo, la figura siguiente ilustra la representación de soluciones antes de choque oblicuo, de expansión y en el plano de hodógrafa. La figura III.21a muestra el plano físico; la figura III.21b, el plano de hodógrafa.

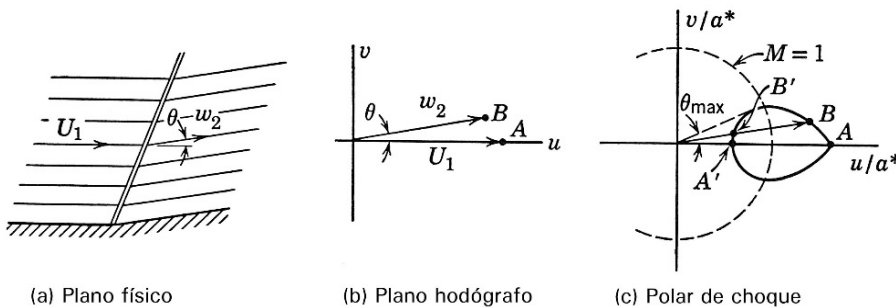
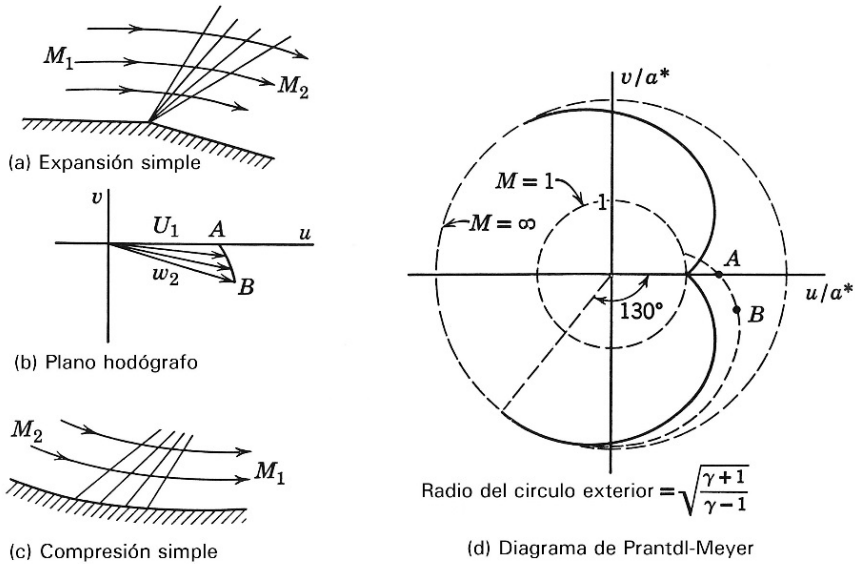


Fig.III.21.
Representación de
soluciones de cho-
que oblicuo en el
plano hodógrafo
[LR57]

Un punto en el plano físico está localizado en el plano de hodógrafa representando sus componentes de velocidad (u , v). Así, un vector en el plano de hodógrafa, trazado desde el origen hasta el punto en cuestión, es el vector de velocidad correspondiente. Se observa, pues, que, en este caso, el campo total de flujo corriente arriba del choque está representado por el punto único A , mientras que el campo de flujo corriente abajo lo está por el punto B . Si modificamos el ángulo de desviación de la corriente θ sin variar las características del flujo corriente arriba del choque (U_1, M_1), el punto B describe un lugar geométrico, conocido como *polar de choque* (v. figura III.21c).



Fig.III.22.
Representación de
la expansión de
Prantdl-Meyer en el
plano hodógrafo
[LR57]



Considérese el movimiento bidimensional $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v$, de modo que $u = V \cos \theta$, $v = V \sin \theta$.

Supóngase que existe un potencial de velocidades θ y definimos una función de corriente ψ de la forma:

$$\frac{\rho u}{\rho_0} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho v}{\rho_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{III.23})$$

Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = V \cos \theta dx + V \sin \theta dy \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\rho}{\rho_0} V \sin \theta dx + \frac{\rho}{\rho_0} V \cos \theta dy \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.24})$$

Supóngase, además, que las x y las y se pueden expresar como funciones continuas de V y de θ . Entonces:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial V} dV + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial V} dV + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{III.25})$$

Combinando adecuadamente las ecuaciones anteriores y suponiendo que las derivadas de x , y , ϕ con respecto de V , θ son permutables (por ejemplo,

$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)$), se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0 V}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial V} \quad (\text{III.26})$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = - \frac{\rho_0 (1 - M^2)}{\rho V} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{III.27})$$

Derivando la ecuación III.26 con respecto a V y la ecuación III.27 con respecto a θ , y teniendo en cuenta la invariancia en cuanto a la permutación de las derivadas cruzadas, resulta:

$$V(1 + M^2) \frac{\partial \psi}{\partial V} + V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial V^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III.28})$$

Esta es la ecuación hodógrafa de la función de corriente, que, en ocasiones, se escribe también así:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{(1 - M^2)} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\rho_0 V}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial V} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III.29})$$

La ecuación III.29 admite una simplificación que es *la aproximación de gas tangente*, definido por la ecuación $P = A - B/\rho$, que describe el comportamiento de un gas ficticio cuya variación de P , ρ es similar a la del gas real, siempre que P y ρ no difieran demasiado de sus valores de corriente libre. En estas condiciones, resulta:

$$\frac{V}{\sqrt{1 - M^2}} \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{\sqrt{1 - M^2}} \frac{\partial \psi}{\partial V} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III.30})$$

(Ver [LR57])

III.5 Estudio del flujo con ondas de dos familias

Considérese el flujo entre dos paredes curvas tal como el que se ilustra en la figura III.23. Las líneas de Mach generadas por ambas paredes han de intersectarse; por ello, se denomina *flujo con ondas de dos familias*. Un problema que puede plantearse es este: dadas la magnitud y la dirección de la velocidad a lo largo de la línea ab , y la forma de las paredes bc y ad , hallar la magnitud y la dirección de la velocidad en la región entre ambas paredes.

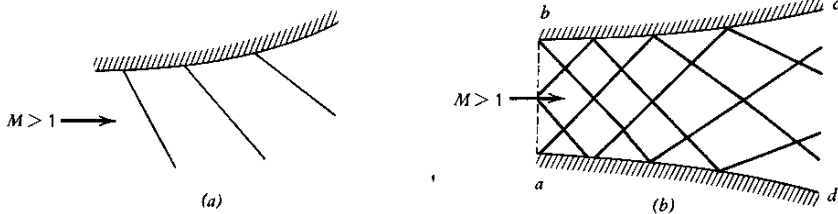


Fig.III.23.
Flujo con ondas
de una y dos fa-
milias
[SCh82]

Se supone entropía y entalpía de remanso constantes, y la última es conocida. El problema se puede resolver numéricamente y gráficamente, o mediante una combinación de



ambos métodos. Se consideran primero los métodos gráficos, tanto de características como de plano de hodógrafa.

La velocidad adimensional M^* se define como $M^* = V/a^*$. Esta velocidad adimensional está relacionada con el número de Mach de la corriente por la ecuación:

$$M^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1} M^{*2}}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^{*2}} \quad (\text{III.31})$$

Sustituyendo la ecuación III.31 en la ecuación de Prandtl-Meyer, se obtiene:

$$\theta(M^*) = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{M^{*2}-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - M^{*2}}} - \arctan \sqrt{\frac{M^{*2}-1}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^{*2}}} \right\} + Cte \quad (\text{III.32})$$

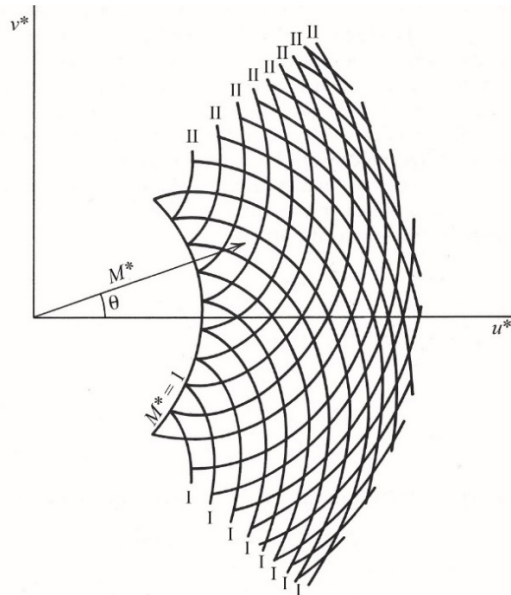
Esta ecuación resulta también de integrar la ecuación de la pendiente de características de hodógrafa:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} = \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \mp \tan \mu$$

La ecuación III.32 está representada en el plano de hodógrafa para diferentes valores de la constante de integración (v. figura III.24). En esta representación:

$$u^* = u/a^*, v^* = v/a^*, \vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v$$

Fig.III.24.
Características de
hodógrafa
[Sch82]





Las curvas marcadas “I” corresponden al signo menos (-) frente a la llave en la ecuación III.32; las curvas marcadas “II” corresponden al signo más (+). Todas las curvas acaban en el círculo $M^* = 1$, pues el método es válido solo para flujo subsónico. Todo vector trazado del origen a un punto particular en el plano de hodógrafa representa la magnitud y la dirección de la velocidad en el punto correspondiente en el plano físico, dividida por a^* .

Veamos ahora cómo se utiliza la figura III.24 para resolver el problema de la figura III.23b.

Supóngase, para simplificar el problema, que el flujo es simétrico, lo cual permite limitar el cálculo a la mitad del canal (v. figura III.25).

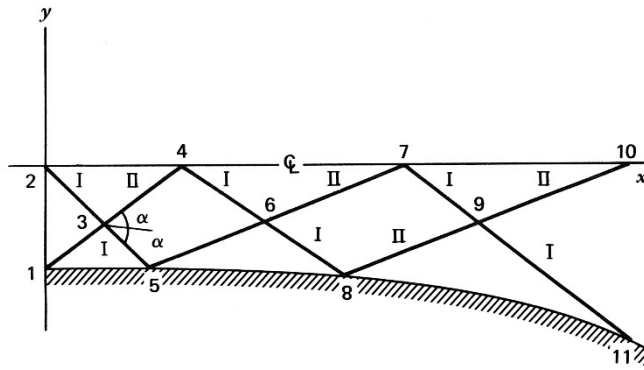


Fig.III.25.
Características físicas en tobera divergente (mitad)
[Sch82]

En un principio, en la figura III.25, se han trazado aproximadamente las características físicas, habida cuenta de que no se conocen todavía ni las localizaciones precisas de los puntos numerados ni las pendientes de las características en dichos puntos.

La pendiente de la característica I viene dada por:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I = -\operatorname{tg} \mu = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

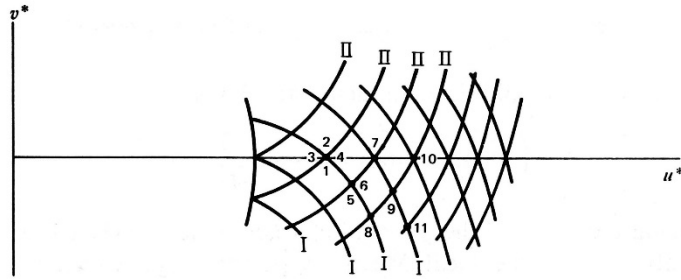
(AIII.33) Análogamente, si se usa el signo + en las características físicas, resulta el signo + frente a la llave en la ecuación III.32 para $\theta(M^*)$, que está representada por la curva marcada “II” en el plano de hodógrafa. Se demuestra fácilmente que una característica física de la familia I es perpendicular a la característica de hodógrafa de la familia “II”.

Supóngase ahora que, a lo largo de la línea 1-2 en el plano físico, el flujo es uniforme y paralelo.

En este caso, el flujo a lo largo de esta línea queda representado por un solo punto en el plano de hodógrafa; o sea, el punto 1 (v. figura III.26). Para llegar al punto 3 a partir del punto 2 en el plano físico, se debe seguir una línea de la familia I. Por consiguiente, en el plano de hodógrafa, deberá seguirse también una línea de la familia I. Para llegar al punto 3 a partir del punto 1 en el plano físico, debe seguirse una línea de la familia II.



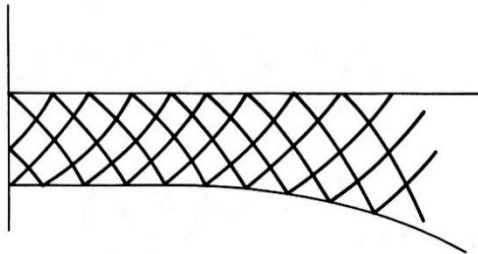
Fig. III.26.
Características de
hodógrafa en una
tobera divergente
[Sch82]



En el plano de hodógrafa, deberá seguirse también una línea de la familia II. Y así sucesivamente. Puesto que los puntos 1 y 2 coinciden en el plano de hodógrafa, también han de coincidir allí los puntos 3 y 4. (No sería así si la velocidad en los puntos 1 y 2 fuera diferente.)

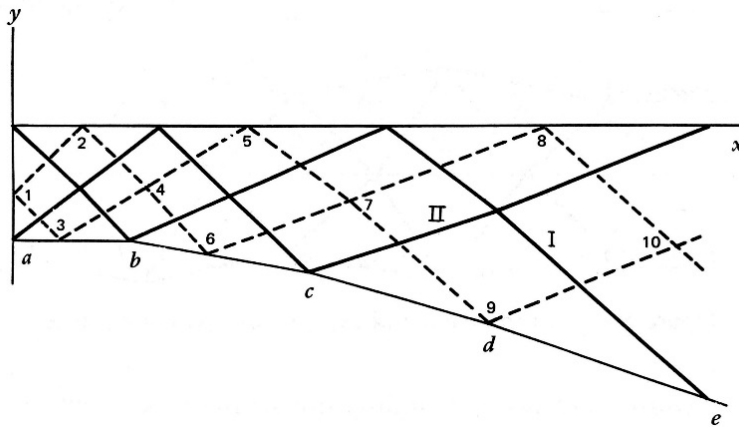
Habida cuenta de que la pendiente de las características físicas se ha considerado constante entre puntos, la exactitud de la solución dependerá de la finura de la malla. La figura III.27 ilustra el resultado de utilizar una malla más fina.

Fig. III.27.
Características físicas en una malla más fina
[Sch82]



El método descrito es conocido como *método de punto de celosía*. Un método alternativo es el denominado *método de campo* (v. figura III.28). En esta aproximación, se supone que el flujo tiene propiedades constantes en cada uno de los campos 1, 2, 3, 4, etc., limitados por las características físicas indicadas por las líneas continuas.

Fig. III.28.
Método de campo
vs. método de
punto de celosía
en tobera divergente
[Sch82]



Al utilizar el método de campo, la pared curvada es sustituida por una serie de líneas rectas desde aab, bac, cad, etc. Entonces, la inclinación del flujo en la región 3 se toma paralelo a la línea ab, en la región 6 paralelo a la línea bc, etc.



Al pasar de una región o *campo* a otro, se atraviesa una línea característica, mientras que, en el método de punto de celosía, se va de un punto al próximo a lo largo de una línea característica

A la vista de la figura III.28, se constata que pasar a través de una línea característica de la familia II es equivalente a ir a lo largo de una línea característica de la familia I, y viceversa.

Si bien en el ejemplo tomado el método de campo no es tan bueno como el método de punto de celosía, en el caso de un chorro libre el método de campo es superior.

En la figura III.29, se muestran las características de hodógrafa en tobera divergente, según el método de campo.

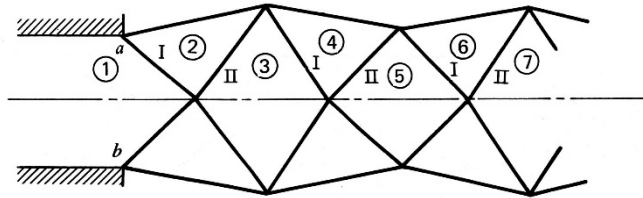


Fig. III.29.
Características de
hodógrafa en to-
bera divergente
(método de
campo)
[Sch82]

Sea el chorro libre que se muestra en la figura III.30 procedente de una tobera supersónica sub-expansionada. La presión en la región 1 es ligeramente superior a la presión externa P_a . En la región 2, la presión ha de ser igual a P_a , ya que, a través de una frontera libre, no son posibles discontinuidades de presión. Por tanto, las regiones 1 y 2 están separadas por una onda de expansión.

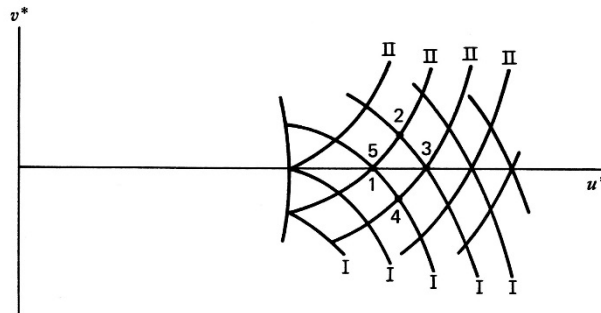


Fig. III.30.
Ondas de comp-
resión y expan-
sión en un
chorro libre
[Sch82]

En general, en los puntos *a* y *b* ocurrirá una expansión de Prandtl-Meyer. No obstante, si la diferencia de presión a través del abanico es pequeña, el abanico puede ser sustituido por una simple onda de expansión inclinada un ángulo de Mach determinado por el flujo en la región 1.

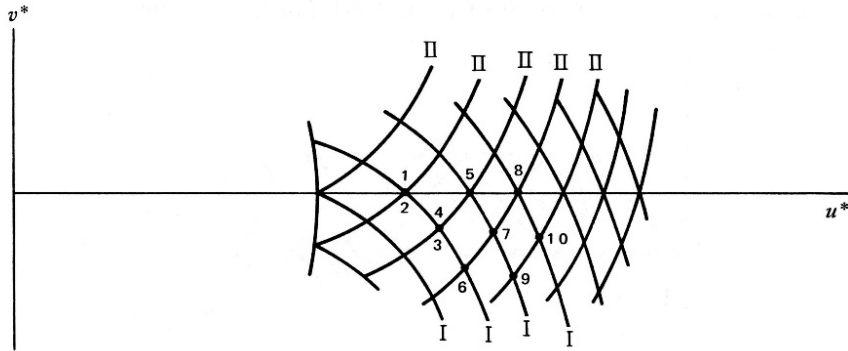
Por tanto, las ecuaciones:

$$\theta = \theta(M) \quad , \quad P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (12)$$

fijan el número de Mach y la dirección de flujo en la región 2. Calculado el valor de *M*, la dirección de la corriente θ se puede encontrar a partir de la figura III.31.



Fig. III.31.
Características
de hodógrafo del
chorro libre
[Sch82]



Para el trazado de los diagramas, se ha de aplicar la simple regla siguiente: las ondas de expansión producen el giro de la corriente alejándola del plano de onda; las ondas de compresión la acercan al plano de onda. Además, las ondas se reflejan con el mismo signo en los contornos sólidos y cambian de signo en las fronteras libres. (Por ejemplo, en una frontera libre, una onda de compresión se refleja como onda de expansión, y a la inversa.)

Si un contorno sólido cambia de orientación en un punto en que toca una onda y lo hace en la misma magnitud que la línea de corriente, no hay reflexión. Esta técnica se utiliza a veces para diseñar toberas supersónicas con flujo uniforme en la salida.

(Ver [LR57])







Bibliografía

- [Abr63] Abramovich, G.N., *Theory of Turbulent Jets*. The M.I.T Press 1963.
- [AK93] Avo, T. Koivula, K. *Learning from experiences with industrial ventilation*. CADDET 1993
- [Alt75] Altshul, A. D.; Kiselev, P. G. *Hydraulics and Aerodynamics*. 2^a ed. Stroisdat Publishing House, 1975.
- [An13] Anderson, J.D. *Modern Compressible Flow, Series in Aeronautical and Aerospace Engineering*. Mc-Graw Hill. 2013
- [As03] ASME. *Gas Transmission and Distribution Piping Systems*. B31.8-2003.
- [Ash01] *ASHRAE Fundamentals Handbook*. Atlanta, GA: American Society of Heating, Refrigerating and Air-conditioning Engineers, Inc., 2001.
- [ASH89] ASHRAE Handbook: Fundamentals, 1988
- [ASHRAE] Transactions
- [ASTM99] E779-99 *Standard Test Method for Determining Air Leakage Rate by Fan Pressurization*. American Society for Testing and Materials. 1999.
- [Awb91] H.B. Awbi, *Ventilation of Buildings*. Chapman & Hall. 1991.
- [Ba67] Batchelor, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [Bat76] Baturin, V.V. *Fundamentos de ventilación industrial*. Ed.Labor S.A. 1976.
- [BCh74] Beer, J.M. y N.A. Chigier “*Combustion Aerodynamics*”, Applied Science Publishers Ltd. Londres. 1974.
- [Be80] Benedict, R. P. *Fundamentals of Pipe Flow*. Wiley, 1980.



- [Bg--] British Gas. U.K. Publications.
- [BH90] Beaton, C. F.; Hewitt, G. F. *Physical Properties Data for the Design Engineer*. Hemisphere Publishing, 1990.
- [BH93] Burghard, M. D; Harbach, J. A. *Thermodynamics with Applications*. 4^a ed. Harper Collins, 1993.
- [BMW03] Batchelor, G. K.; Moffatt, H. K.; Worster, M. G. *Perspectives in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [Buc85] Buckmaster, J.D., *The Mathematics of Combustion, Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM, 1985.
- [Ca71] Carriere, P. *Aerodynamique interne des reacteurs: Tuyeres et jets*. ENSA 1971.
- [Ca72] Carrière, P. *Aérodynamique interne des réacteurs. Tuyeres et jets*. École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. Toulouse, 1972.
- [CB11] Cengel, Y. A.; Boles, M. A. *Thermodynamics: An Engineering Approach*. 7^a ed. McGraw-Hill, 2011.
- [CF48] Courant, R.; Friedrichs, K. O. *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience, 1948.
- [ChCh66] Chigier, N.A. and Chervinsky, A. "Experimental investigation of swirling vortex motions in jets", 1966, University Minnesota.
- [ChM93] Chevray, R.; Mathieu, J. *Topics in Fluid Mechanics*. Cambridge University Press, 1993.
- [De98] J.Delery, Tuyères et Arrière-Corps, *Cours de l'ENSAE*, Paris, 1998.
- [Dr99] Dremin, A.N., *Toward Detonation Theory*, Springer Verlag, 1999.
- [EDM79] Edwards, D. K.; Denny, V. E.; Mills, A. F. *Transfer Processes: An introduction to diffusion, convection, and radiation*. Hemisphere Publishing, 1979.
- [Em86] Emanuel, G., *Gasdynamics: Theory and applications*. AIAA Education Series, 1986.
- [Fe61] Ferri, A. *Fundamental data obtained from shock tube experiments*. Pergamon Press, 1961.
- [GH63] Gaydon, A.G., Hurle, I.R. *The shock tube in high-temperature chemical physics*. Chapman and Hall LTD. 1963.
- [Goo85] Goodfellow, H.D. *Advanced design of ventilation systems for contaminant control*. Elsevier, 1985.
- [He91] Heinsohn, R. J. *Industrial Ventilation: Engineering Principles*. John Wiley & Sons, 1991.



- [Her75] Herning, F. *Transporte de fluidos por tuberías*. Editorial Labor, 1975.
- [Ho53] Howarth, L. *Modern development in fluid dynamics, high speed flow*. Oxford, 1953.
- [HP92] P.G.Hill,R.Peterson, *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Addison-Wesley Publishing Co. 1992.
- [Id86] Idelchik, I. E. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Hemisphere Publishing Co., 1986.
- [Kar93] von Karman, Th. *Advanced design of ventilation systems: Lecture Series 1993-07*. von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1993
- [Kat59] Katz, D. L. *Handbook of Natural Gas Engineering*. McGraw-Hill, 1959.
- [KK45] Keenan, J. H.; Kaye, J. *Gas Tables*. Wiley, 1945.
- [KL59] Kaye, G. W. C.; Laby, T. H. *Tables of Physical and Chemical Constants*. Wilwy, 1959.
- [LE61] Lewis, B., von Elbe, G., *Combustion, Flames and Explosion of Gases*, Academic Press, 1961.
- [Lee08] Lee, J.H.S. *The detonation phenomena*. Cambridge, 2008.
- [Lef89] Lefebvre, A.H., *Atomization and Sprays*. Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [Li91] Liñan, A. *El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión*. Real Academia de Ciencias Físicas y Naturales, Madrid 1991
- [Lin99] Linden, P.F. *The fluid mechanics of natural ventilation. Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 31
- [LR57] Liepmann, H.W., Roshko, A. *Elements of gasdynamics*. John Wiley and Sons, 1957.
- [Me88] Melvin, A. *Natural Gas: Basic Science and Technology*. British Gas, 1988.
- [Men05] Menen, E. *Gas Pipeline Hydraulics*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2005.
- [Mi90] Miller, D. S. *Internal Flow Systems*. BHRA, 1990.
- [MU86] Morse, P. M.; Uno Ingard, K. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- [NC14] Nasr, G. G.; Connor, N. E. *Natural Gas Engineering and Safety Challenges: Downstream Process, Analysis, Utilization and Safety*. Springer International Publications Switzerland, 2014.
- [Os52] Oswatitsch, K. *Gasdynamik*. Springer, 1952.
- [Ow64] Owczarek, J.A. *Fundamentals of gas dynamics*. International Text Book Co. 1964.



- [PG84] Perry, R. H.; Green, D. *Perry's Chemical Engineers' Handbook*. McGraw Hill, 1984.
- [PR85] U.G.Piumov, G.S.Roslyakov, *Gas Flow in Nozzles*, Springer-Verlag, 1985.
- [Raj76] N.Rajaratnam. *Turbulent Jets*. Elsevier, (1976).
- [Ray45] Rayleigh, J. W. S. *The Theory of Sound*. Dover, 1945.
- [Re79] Reynolds, W. C. *Thermodynamic Properties in SI*. Stanford, CA: Stanford University, Department of Mechanical Engineering, 1979.
- [Rod82] Rodi, W., *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*, Pergamon Press, 1982.
- [RPSH77] Reid, R. C.; Prausnitz, J. M.; Sherwood, T. K. *The Properties of Gases and Liquids*. McGraw Hill, 1977
- [Sa85] Saad, M.A., *Compressible Fluid Flow*, Prentice- Hall, 1985
- [SB86] Smith, F.T., Brown, S.N. *Boundary layer separation*. Springer-Verlag, 1986.
- [SC58] chaaf, S.A., P.L.Chambre *Fundamental of Gas Dynamic*, Edit. By H.Emmons, Princeton University Press, Princeton,N.J. 1958
- [SC73] Spalding, D. B.; Cole, E. H. *Elements of Gas Dynamics*. 3^a ed. Edwar Arnold, 1973.
- [SC79] Spalding, D. B.; Cole, E. H. *Engineering Thermodynamics*. 3^a ed. Edward Arnold, 1979.
- [Sc82] Schreier, S. *Compressible Flow*, John Wiley & Sons, 1982.
- [Sch60] Schlichting, H. *Boundary Layer Theory*. 4^a ed. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1960.
- [Sch80] Schetz, J.A. *Injection and Mixing in Turbukent Flow*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol.68, 1980.
- [Sch82] Schreier, S. *Compressible Flow*. John Wiley & Sons, 1982.
- [Sch82] Schlichting, H. *Boundary layer theory*. McGraw-Hill, 1982.
- [Se--] SEDIGAS. *Manual de canalizaciones de distribución de gas. Manual de transporte*. <<http://www.sedigas.es>>
- [Sh53] Shapiro, A.H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald, New York, 1953.
- [Ski94] Skistad, H. *Displacement ventilation*. John Wiley & Sons 1994.
- [SL55] Sage, B. H.; Lacey, W. N. *Some Properties of Lighter Hydrocarbons, Hydrogen Sulfide and Carbon Dioxide*. API Research Project, American Petroleum Institute, 1955.



- [St73] Starling, K. E. *Fluid Thermodynamic Properties of Light Hydrocarbons Systems*. Texas: Gulf Publishing Co., 1973.
- [Std77] Standing, M. B. *Volumetric and Phase Behavior of Oil Field Hydrocarbons Systems*. Dallas, TX: Society of Petroleum Engineers of AIME, 1977.
- [Ta91] Tabor, D. *Gases, Liquids and Solids*. 3^a ed. Cambridge University Press, 1991.
- [TL74] Tennekes, H., Lumley, J.L. *A first course in turbulence*. The MIT Press, 1974
- [Tow76] Townsend, A. A. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. 2^a ed. Cambridge University Press, 1976.
- [US08] U.S. Energy Information Administration. *Natural Gas Pipeline. Network Configuration and System Design*. 2007/2008.
- [VA68] Vukalovich, V. V.; Altunin, M. P. *Thermophysical Properties of Carbon Dioxide*. Londres: Collet's, 1968.
- [Va83] Vargaftik, N. B. *Handbook of Physical Properties of Liquids and Gases*. 2^a ed. Hemisphere Publishing Corporation, 1983.
- [VDI88] *VDI-Wärmeatlas*. 5^a ed. VDI-Verlag, 1988.
- [Vi93] Virto, L. *Mecánica de fluidos: Problemas resueltos*. Edicions UPC, 1993.
- [Vin89] Vincent, J.H. *Ventilation'88. Proceedings of The Second International Symposium for contaminant control*. Pergamon Press, 1989.
- [Wa00] Waitz, I. A. *Thermodynamics: Course Introduction*. Unified Engineering Lecture Outlines, 2000.
- [Wh08] White, F. *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill, 2008.
- [WS80] Ward-Smith, A. *Internal Fluid Flow. The Fluid Dynamics of Flow in Pipes and Ducts*. Oxford University Press, 1980.
- [ZH76] Zucrow, M. J.; Hoffman, J. D. *Gas Dynamics*, vol. I. John Wiley & Sons, 1976.
- [ZH77] Zucrow, M.J., Hoffman, J.D. *Gas Dynamics, Vol.2*. John Wiley & Sons 1977.
- [ZR02] Zeldovich Ya. B., Raizer, Yu.P. *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena*. Dover Publication Inc. 2002
- [Zu64] Zucroff M.J., *Aircraft and Missile Propulsion*, Wiley, 1964.



Documentos referenciados

Capítulo 1

- (1) Hansen, C. F. Approximations for the Thermodynamics and Transport Properties of High Temperature Air. NASA, TR R-50, 1959.
- (2) Kennard, E. H. Kinetic Theory of Gases. McGraw-Hill, 1938.
- (3) Ellenwood, F. O.; Kulik, N.; Gay, N. R. "The specific heats of certain gases over wide ranges of pressures and temperatures". Bulletin, 30. Cornell University Engineering Experiment Station, 1942.
- (4) Carriere, P. Aérodynamique interne des réacteurs. Tuyères et jets. École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1972.
- (5) Roe, D. R. Tesis doctoral. London University, 1972.
- (6) Dewerd, F. Paper C4-82. International Gas Union. Fifteenth World Gas Conference. GERG Committee on Thermodynamics Properties, 1982.
- (7) Moeckel, W. E.; Weston, K. C. "Composition and thermodynamic properties of air in chemical equilibrium". NACA TN 4265, 1958.
- (8) Stull, D. R.; Prophet, H. et al. JANAF Thermochemical Tables. NSRDS-NBS 37. National Bureau of Standards, 1971.

Capítulo 2

- (1) Owens, E. J.; Thodos, G. "Thermal conductivity correlation for ethylene and its application to gaseous aliphatic hydrocarbons and their derivatives at moderate pressure". *AIChE Journal*, vol. 6, 1960.
- (2) Schaefer, C. A.; Thodos, G. "Thermal conductivity of diatomic gases, liquids and gaseous states". *AIChE Journal*, vol. 5, nº 3, 1959.
- (3) Stiel, L.; Thodos, G. "The thermal conductivity of non-polar substances in the dense gaseous liquid regions". *AIChE Journal*, vol. 10, nº 1, 1964.
- (4) Lucas, K. "Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Viskosität von Gasen und Gasgemischen". *Chem. Ing. Tech.*, vol. 46, nº 4, 1974.
- (5) Bromley, L.A.; Wilke, C. R. "Viscosity Behavior of Gases". *Ind. Eng. Chem.*, vol. 43, 1951.
- (6) Dawson, R.; Khoury, F.; Kobayashi, R. "Diffusion Coefficients". *AIChE Journal*, vol. 16, 1970.
- (7) Herning, F.; Zipper, L. "Gases Hydrocarbons". *Gas-u-Wasserfach*, vol. 79, 1936.



- (8) Hirschfelder, J. O. "Heat transfer in chemically reacting mixtures", *Ind. J. Chem. Phys.*, vol. 36, 1957.
- (9) Hanssen, C.F. "Approximation for the thermodynamic and transport properties of high temperatures air". *NASA TR R-50*, 1959.
- (10) Burler, J. N.; Broken, R. S. "Thermal Conductivity of Gas Mixtures in Chemical Equilibrium". *J. Chem. Phys.*, vol. 20, 1957.

Capítulo 3

- (1) Hansen, C.F. Approximations for the Thermodynamics and Transport Properties of High-temperature Air. *NASA TR R-50*, 1959.
- (2) Virto, S. L. Mecánica de fluidos. Problemas resueltos. Edicions UPC, 1993.

Capítulo 4

- (1) Euler, L. "Principes généraux du mouvement des fluides". *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1755.
- (2) Navier, M. "Mémoire sur les lois du mouvement des fluides". *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 1822.
- (3) Stokes, G. G. "On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids". *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1844-1849.
- (4) Newton, J. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society London, 1687.
- (5) Driest van, E. R. "Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids". *Jour. Aero. Sci.*, 18, 1951.
- (6) Boussinesq, J. "Théorie de l'écoulement tourbillonnant". *Mem. Pre. par div. Sav. Paris*, 1877.
- (7) Karman von, Th.; Millikan, C. B. *On the Theory of Laminar Boundary Layer Involving Separation*. NACA Rep. No. 504, 1934.
- (8) Idelchik, I. E. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Hemisphere Publishing Co., 1975.
- (9) Miller, D. S. *Internal Flow Systems*. BHRA, 1990.
- (10) ASHRAE. *HVAC Duct Fitting Data Base*. Research Project 574-RP, Atlanta, GA, 1994.
- (11) Schlichting, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, 1960.
- (12) Michel, R. *Couches limites turbulentes et calcul pratique des couches limites en fluide compressible*. ONERA TP n° 25, 1963.



- (13) Driest van, E. R. *The Turbulent Boundary Layer with Variable Prandtl Number*. Tollimen and Görtler, eds., 1955.
- (14) Karman von, Th. “Turbulence and Skin Friction”. *J. Aero. Sci.*, 1, 1934.
- (15) Eckert, H. U. “Characteristics of the Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate in Compressible Flow from Measurements of Friction in Pipes. *J. Aero. Sci.*, 17, 1950.
- (16) Sommer, S. C.; Short, B. J. *Free Fly Measurements of Turbulent Boundary Layer Skin Friction in the Presence of Severe Aerodynamic Heating at Mach Numbers from 2.8 to 7.0*. NACA TN, 3391, 1955.
- (17) Coles, D. “The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer”. *J. Fluid. Mech.*, 1, 1956.

Capítulo 5

- (1) Weymouth, T. R. “Problems in Natural Gas Engineering”. *Transactions of the ASME*, vol. 34, p. 185, 1912.
- (2) Renouard, M. P. “Nouvelles règles à calcul pour la détermination des pertes de charge dans les conduits de gaz”. *Journal des usines à gaz*. Octubre de 1952, pp. 337-339.
- (3) SEDIGAS. <<http://www.sedigas.es>>
- (4) Idelchik, I. E. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Hemisphere Publishing Co., 1975.
- (5) Miller, D. S. *Internal Flow Systems*. BHRA, 1988.
- (6) ASHRAE. “HVAC Duct Fitting Data Base” *Research Project*. 574-RP. Atlanta: GA, 1994.
- (7) SEDIGAS. *Manual del transporte*. 2010.
- (8) Brooks, P. J. “Duct Design Fundamentals”. *ASHRAE Journal*, 37(4): 69-76, 1995.
- (9) *ASHRAE Fundamentals Handbook*. Atlanta, GA: American Society of Heating, Refrigerating and Air-conditioning Engineers Inc., 2001.
- (10) Heinsohn, R. J. *Industrial Ventilation: Engineering Principles*. John Wiley & Sons Inc., 1991.
- (11) Tsal, R. J.; Behls, H. F. “Using the T-Method for Duct System Design”. *ASHRAE Journal*, 32, 1990.
- (12) Tsal, R. J.; Behls, H. F.; Mangel, R. “T-Method Duct Design. Parts I and II”. *ASHRAE Transactions*, 94(2), 1988.
- (13) Tsal, R. J.; Behls, H. F. “Evaluation of Duct Design Methods”. *ASHRAE Transactions*, 92(1A), 1986.



- (14) Coelho, P. M.; Pinho, C. "Considerations about Equations for Steady State Flow in Natural Gas Pipeline". *Soc. Mech. Sci. & Eng.*, 29(3), 2007.
- (15) Idelchik, I. E.; Steinberg, M. O. *Handbook of Hydraulic Resistance*. 3^a ed. Begell House Inc., 1996.
- (16) Tsal, R. J.; Behls, H. F.; Mangel, R. "T-Method Duct Design. Part I: Optimization Theory". *ASHRAE Transactions*, 94(2): 90-111, 1988a.
- (17) Kim, T.; Spitler, J. D.; Delahoussage, R. D. "Optimum Duct Design for Variable Air Volume Systems. Part 1: Problem Domain Analysis of VAV Duct Systems". *ASHRAE Transactions*, 108(1), 2002.
- (18) Tsal, R. J.; Behls, H. F.; Mangel, R. "T-Method Duct Design. Part III: Simulation". *ASHRAE Transactions*, 96(2): 3, 1990.
- (19) Netsal & Associates. *T-Duct Computer Program Manual*. 1994.
- (20) Osiadacz, A. J. *Simulation and Analysis of Gas Network*. Londres: E & FN Spon.
- (21) Ferguson, J. A. "Gas Flow in Long Pipeline". *Chemical Engineering*, 56(11): 112-135, 2002.
- (22) Hain, H. A. "How to Determine the Maximum Capability of a Complex Pipe System". *Pipe-Line News*, 9, 1968.
- (23) Van den Hende, A. "Résolution graphique des problèmes de perte de charge dans les canalisations". *L'Industrie Chimique*, 7, 1969.
- (24) Cross, H. "Analysis of Flow in Networks of Conduits and Conductors". *Bulletin*, 286. University of Illinois, 1936.
- (25) Stoner, M. A. "A New Way to Design Natural Gas Systems". *Pipe-Line Industry*, 2, 1970.
- (26) Stoner, M. A. *Sensitive Analysis Applied to a Steady-State Model of Natural Gas Transportation Systems*. SPE Preprint 3056, 1971.
- (27) Stoner, M. A. "Sensitive Analysis Applied to a Steady-State Model of Natural Gas Transportation Systems". *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1972.
- (28) PSIG-Pipeline Simulation Interest Group. <www.psig.org>
- (29) Banda, M. K.; Herty, M.; Klar, A. "Gas Flow in Pipeline Networks". *AIMS Journals 2006*. <<http://AIMsciences.org>>

"Coupling Conditions for Gas Networks Governed by the Isothermal Euler Equations". *Networks and Heterogeneous Media*, 1(2), 2006.
- (30) Herty, M.; Mohring, J.; Sachers, V. "A New Model for Gas Flow in Pipe Networks". *Math. Meth. Appl. Sci.*, 33, 2010.



- (31) Osiadacz, A. J. "Different Transient Models. Limitations, advantages and disadvantages". 28th Annual Meeting of PSIG. San Francisco, CA, 1996.
- (32) Kim, T.; Spittler, J. D.; Delahoussage, R. D. "Optimum Duct Design for Variable Air Volume Systems. Part 1: Problem Domain Analysis of VAV Duct Systems". *ASHRAE Transactions*, 108(1), 2002.
- (33) Kim, T.; Spittler, J. D.; Delahoussage, R. D. "Part 2: Optimization of VAV Duct Systems". *ASHRAE Transactions*, 108(1), 2002.
- (34) Netsal & Associates. *T-Duct Computer Program Manual*. 1994.
- (35) Herty, M. "Modelling, Simulation and Optimization of Gas Networks with Compressors". *Networks and Heterogeneous Media*, 2(1): 733-750, 2007.
- (36) Chen, N. H. "An Explicit Equation for Friction Factor in Pipe". *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. 1979.

Capítulo 6

- (1) Rott, N. "Jakob Ackeret and the History of the Mach Number", *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 17, 1985.
- (2) Von Karman, T. "Compressibility Effects in Aerodynamics", *J. Aero. Sci.*, 8, 1947.
- (3) Rankine, W. J. M. "On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbances". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 160, 1870.
- (4) Hugoniot, H. "Mémoire sur la propagation des mouvements dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits". *Journal de l'École Polytechnique*, vol. 57 y 58, 1887, 1889. 1^a y 2^a partes.
- (5) Taylor, Sir G. I. "The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion". *Proc. Roy. Soc. Londres*, serie A201, 1950.
- (6) Brinkley, S. R.; Kirkwood, J. G. "Theory of the Propagation of Shock Waves". *Phys. Rev.*, 7, 1974.
- (7) Linzer, M.; Hornig, D. F. "Structure of Shock Fronts in Argon and Nitrogen". *Physics of Fluids*, vol. 6, nº 1, 1963.

Capítulo 7

- (1) www.princeton.edu/cefr/Files/.../pLecture11.pdf
- (2) [http://en.wikipedia.org/wiki/Shock tube](http://en.wikipedia.org/wiki/Shock_tube)
- (3) Glass, I. I., Patterson, G. N. *J. Aeronaut. Sc.* 22. 1955



- (4) Brun, R. Shock tubes and shock tunnels: Design and experiments. NATO, RTO-EN-AVT-162
- (5) Hugoniot, H., Mémoire sur la propagation des mouvements dans les corps et spécialement dans le gaz parfaits (1^a y 2^a parte), *Journal de l'École Polytechnique*, vols 57 y 58, 1887, 1889
- (6) Chapman, D.L. On the rate of explosion in gases, *Philos. Mag.*, 47, 1899
- (7) Jouguet, E., On the propagation of chemical reactions in gases, *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7, 1905 y 2, 1906
- (8) Mallard, E. y Le Chatelier, H.L., Recherches expérimentales et théoriques sur la combustion de mélanges gazeux explosifs- mémoire I, température d'inflammation des mélanges gazeux, *Ann. Des Mines*, 4, 1883
- (9) Berthelot, V y Vieille, P., L'Onde explosive, *Ann. de Chem. et de Phys.*, 28, 1883
- (10) Michelson, V.A., On the normal ignition velocity of explosive gaseous mixtures, *Scientific Transactions Of Imperial Moscow University of Mathematics and Physics*, 10, 1893
- (11) Zeldovich, Y.B., On the Theory of the Propagation of Detonation in Gaseous
- (12) Zeldovich, Y.B. y Raizer, Y.P., *Physics of Shock Waves and High Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, 1967 *Systems, Journal of Experimental and Theoretical Physics (USSR)*, Vol. 10
- (13) Von Neumann, J., *Theory of Detonation Waves*, OSRD Report 549, 1942. (Traducido como NACA TM 1261, 1950)
- (14) Döring, W. Über der detonation verging in gasen. *Ann. Phy.* 43(5), 1943
- (15) Belles, F.E., *Detonability and Chemical Kinetics: Prediction of Limits of Detonability of Hydrogen*, Seventh Symposium (International) on Combustion, Butterworths, 1959
- (16) Frank-Kamenetskii, D.A., *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Nauka, Moskva, 1987 Zeldovich [Ze40], Frank-Kamenetskii [FK87] y Semenov [Se42] aportan conocimientos que contribuyen a establecer un razonable acuerdo entre teoría y experimentos
- (17) Semenov, N.N., *Thermal Theory of Combustion and Explosion. III-Theory of Normal Flame Propagation*, *Progress in Physical Sciences (USSR)*, Vol. 24 (Traducido como NACA TM 1026, 1942)
- (18) Owczarek, J.A. *Fundamentals of gas dynamics*. International Textbook Co. 1964



Capítulo 8

- (1) Donaldson, C. Note of the importance of imperfect-gas effect and variation of heat capacities on the isentropic flow of gases. *NACA RM No. L8J14*, 1948
- (2) Thornock, R.L., E.F. Brown, "An Experimental Study of Compressible Flow Through Convergent-Conical Nozzles, Including a Comparison with Theoretical Results", *Journal of Basic Engineering, Transactions ASME, Vol. 94, Series D, No 4*, 1972
- (3) Summerfield, M., C.R. Foster and W.G. Swan, "Flow Separation in Overexpanded Supersonic Exhaust Nozzles". *Institute of Fluid Mechanics and Heat Transfer, Jet Propulsion*, 1954
- (4) Byinfon, C.M. and J.D. Hoffman, "Effects of Base Pressure on Conical Thrust Nozzle Optimization" *Journal of Spacecraft and Rockets* Vol. 7, No. 3, 1970

Capítulo 9

- (1) Grashof, F., Theoretische Maschinenlehre, *Leipzig, Germany*, 1875
- (2) Zeuner, G., Technical Thermodynamics, *Leipzig, Germany*, 1900
- (3) Stodola, A., Steam and Gas turbines, *McGraw-Hill Book Co.* 1927
- (4) Frössel, W., Flow in Smooth Straight Pipes at Velocities above and below Sound Velocity, *NACA TM, No 844*, 1938
- (5) Keenan, J.H. and Neumann, E.P., Measurements of Friction in a Pipe for Subsonic and Supersonic Flow of Air, *Journal of Applied Mechanics*, June, A01-A91-A100, 1946

Capítulo 10

- (1) Foa, J.V. y G. Rudinger, On the Addition of Heat to a Gas Flowing in a Pipe at Subsonic Speed. *J. of the Inst. Of Aeronautical Sciences*, 1949
- (2) Hicks, B.L. y Wasserman, R.H., The One-Dimensional Theory of Steady Compressible Fluid Flow in Ducts with Friction and Heat Addition. *Journal of Applied Physics*, 1947
- (3) Hodge, B.K. y F. Young, "Mass Addition Processes in One-Dimensional Compressible Flow", *AIAA 93-0487, 31st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, 1993, Reno, NV
- (4) Cantwell, B.J., "Solid Propellant Rockets", web.stanford.edu/.../ch.10
- (5) Kuenzmann, P., "Introduction to Solid Rocket Propulsion", *RTO-EN-023 NATO*, 2004
- (6) Williams, F.A., "Combustion Theory" 2^a Ed. *Benjamin Cummings*, 1985
- (7) Liñan, A. "El papel de la mecánica de fluidos en los procesos de combustión", *Real Academia d Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 1991



Capítulo 11

- (1) Crow, S.C. y F.H. Champagne (1971). Orderly structure in jet turbulence. *J.Fluid Mech.* 48, 1971
- (2) Whermann, O. , y R. Wille (1957). En H. Görtler (Ed.) Boundary Layer Research. *IUTAM Symposium, Freiburg.*
- (3) Grant, A.J. (1974). A numerical model of instability in axisymmetric jets. *J.Fluid Mech.*,66
- (4) Becker, H.A. y T.A. Massaro (1968). Vortex evolution in a round jet. *J.Fluid Mech.*, 31
- (5) De Gortari, J.C. y V.W.Goldschmidt (1981). The Apparent Flapping Motion of a Turbulent Plane Jet-Further Experimental Results. *Journal of Fluid Engineering*, Vol.103, No 1
- (6) Antonia, R.A., A.J. Chambers, y A.K.M.F. Husain (1980) Errors in simultaneous measurements of temperature and velocity in the outer part of a heated jet. *Phys. Fluids*,
- (7) Townsend, A.A.(1976) The structure of turbulent shear flow. *Cambridge University Press*,
- (8) Rodi, W., 1982,Turbulent Buoyant Jets and plumes, *Pergamon Press*
- (9) Chen, C.J. y W. Rodi (1980). Vertical turbulent buoyant jets: A review of experimental data. HMT Vol.4, Pergamob Press, Oxford
- (10) Abramovich, G.N., 1963. Theory of Turbulent Jets, G.N. Abramovich. *The M.I.T Pres*
- (11) Goldschmidt, V.W., y P. Bradschaw Flapping of a plane jet. *Phys. Fluid*, 16(1), 1973
- (12) Kotsovinos, N.E. (1976). A note on the spreading rate and virtual origin of a plane turbulent jet. *J.Fluid Mech.*81
- (13) Knystautas, R. (1964). The turbulent jet from a series of holes in a line. *Aeronaut. Quart.*,15
- (14) Kotsovinos, N.E. y E.J. List (1977). Plane turbulent buoyant jets: Part 1-Integral properties. *J.Fluid Mech.*,81
- (15) Tennekes, H., J.L.Lumley. 1977. A first course in turbulence. *MIT Press*
- (16) Launder, B., 1995. "Turbulence and Transition Modelling" Lectures. *Proceedings of ERCOFTAC/IUTAM Summer School. Ed. Hallbäck, Estocolmo. Suecia*
- (17) Launder, B. y W. Rodi (1983) The turbulent wall jet-measurement and modeling. *Annual Review of Fluid Mechanics Vol.15*
- (18) Barenblatt, G.I., A.J. Chorin, y V.M. Prostokishin, 2005. The turbulent wall jet: A triple-layer structure and incomplete similarity. *PNAS, Vol.102,No 25*



- (19) Karlsson, R.I. y otros, 1991, ERCOFTAC Database Collection of Univ of Surrey
- (20) Eriksson, J., 2003. Experimental studies of the plane turbulent wall jet. *Technical report from Royal Institute of Technology. Department of Mechanics. Estocolmo, Suecia*
- (21) George, W.K., H. Abrahamsson, J. Eriksson, B. Karlsson, L. Löfhal y M. Wosnik, (2000). A similarity theory for the turbulent plane wall jet without external stream. *J.Fluid Mech. Vol. 425, pp367-411*
- (22) Abrahamsson, H., B. Jhonson y L. LÖfdahl (1994). A Turbulent Plane Two-Dimensional Wall Jet in a Quiescent Surrounding. *European Journal of Mechanics B.Fluids. Vol.13, No 5*
- (23) Wignanski, I., Y. Katz y F. Horev (1992). On the Applicability of Various Scaling Laws to the Turbulent Wall Jet. *J.Fluid Mech. Vol.234*
- (24) Harsha, P.T., (1971) Free Turbulent Mixing: A Critical Evaluation of Theory and Experiment. *Turbulent Shear Flows, AGARD CP-93*
- (25) Antonia, R.A. y Bilger, R.W. (1973). An Experimental Investigation of an Axisymmetric Jet in a Co-flowing Air Stream. *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 61.Pt.4*
- (26) Weinstein, A.S., J.F.Osterle y W. Forstall (1956) Momentum Diffusion from a Slot Jet into a Moving Secondary. *Journal of Applied mechanics, Sept*
- (27) Everit, K.W y A.G. Robins (1978) The Development and Structure of Turbulent Plane jets. *Journal of Fluid Mechanics, Vol.88, Pt.3*
- (28) AGARD (1998) A selection of test cases for the validation of large-eddy simulations of turbulent flows. *Advisory Rep. 345*
- (29) Jimenez, J., (2000) Turbulence. Cap. en “Perspectives in Fluid Dynamics” Ed. Por G.K Batchelor, H.K.Moffat y M.G. Worster. *Cambridge University Press (2003)*
- (30) Bradbury, I.J.S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. *Journal of fluid mechanics, Vol.23.1965*

Capítulo 12

- (1) Thring, M.W. y M.P.Newby, (1953) “Combustion length of enclosed turbulent jet flames” *Fourth Symposium on Combustion*, Williams and Wilkins, Baltimore
- (2) Craya, A. y R. Curtet.(1955) “Sur l’évolution d’un jet en espace confiné”. *C.R.Acad.Sci. Paris 241, 621*
- (3) Barchilon, M. y R. Curtet, (1964) “Some details of the structure on an axisymmetric confined jet with backflow” *Journal of Basic Engineering*,
- (4) Spalding, D.B. y F.P. Ricou, (1961). *J. Fluid Mech. 11,21*



- (5) Field, M.A., D.W. Gill, B.B. Morgan, y P.G.W. Hawksley. (1967) "Combustion of Pulverized Coal" *BCURA*
- (6) Becker, H.A., H.C. Hottel, y G.C. Williams (1962) "Mixing and flow in ducted turbulent jets". *Proc. Combust. Institute* 9,7
- (7) Squire, H.B., y J. Trowner, (1944) Round jets in a general stream. *Aeronautical Research Council, Rep. No 1974*
- (8) Forstall, W y A.H. Shapiro. (1950), Momentum and mass transfer in coaxial gas jets. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 72
- (9) Alpinieri, L.J., (1964) Turbulent mixing of co-axial jets. *AIAA* 2,9
- (10) F. Landis, F y A.H. Shapiro, (1951) The turbulent mixing of co-axial *Heat Transfer Fluid Mechanics. Inst. Berkeley*
- (11) Patrick, M.A., (1965) *Sheffield Univ. Fuel Soc. J. 16, pp 46-61*
- (12) Campbell, J.F. y J.A. Shetz, (1973) Analysis of Injection of a Heated Turbulent Jet into a Cross Flow, *NASA TR R-413*
- (13) Keffer, J.F. y W.D. Baines, (1963) The Round Turbulent Jet in a Cross-Wind. *Journal of Fluid Mechanics, Vol. 14, part 4*
- (14) Pratte, B. D. y W.D. Baines, (1967). Profiles of the Round Turbulent Jets in a Cross Flow. *Proceedings of ASCE. Journal of the Hydraulic Division, Nov. pp 56-63*
- (15) Chan, W.T. y N.W.M. Ko. (1978) Coherent structures in the outer mixing region of annular jets. *J. Fluid Mech. 89, pp 515-553*
- (16) Chigier, N.A. y J.M. Beer (1964) The flow region near the nozzle in double concentric jets. *J. Basic Eng., Trans ASME* 86 797
- (17) Williams T.J., M.R.M.H. Ali y J.S. Anderson (1969) Noise and flow characteristics of coaxial jets. *J. Fluid Mech. 11 133-142*
- (18) Chigier, N.A. y J.M. Beér (1964). Velocity and static pressure distribution in swirling air jets issuing from annular and divergent nozzles. *Trans ASME 86D, J. Basic Eng., 4*
- (19) Leuckel, W., (1968). Swirl intensities, swirl types and energy losses of different swirl generating devices. *Doc. No. GO2/a/16. International Flame Foundation, Ijmuiden. Holanda*
- (20) Beér, J.M. y N.A. Chigier (1974) Combustion Aerodynamics. *Applied Science Publishers*
- (21) Chigier, N.A. y A. Chervinsky, (1967), Experimental investigation of swirling vortex motion in jets. *J. Appld Mech, 34 pp 443-451*
- (22) Dombrowski, N. (1968). *Biochemical and Biological Engineering Science, Vol. 2 Ch. 16 Academic Press*



- (23) Sanchez, A.L., J.Urza y A. Liñan (2015). The role of separation of scales in the description of spray combustion. *Proceedings of the Combustion Institute*, (35)
- (24) Beér, J.M. y K.B. Lee (1965) Tenth Symposium on Combustion. *The Combustion Institute*
- (25) Gupta, A.K., D.G. Lilley y N. Syred. (1984), Swirl Flow. *Abacus Press*
- (26) Sarpkaya, T. (1971). *J.Fluid Mech.*45, p-545
- (27) Fader, J.H. y S. Leibovich. (1977), *The Physics of Fluids*, 20, 9 , p-1385
- (28) Martinez-Ruiz, D.,J. Urza, A.J. Sanchez, A. Liñan (2013). *J.Fluid Mech.*734, pp387-423
- (29) Suzuki, T., H.H. Chiu (1971). *Proceedings of the Ninth International Symposium on Space Technology and science*,pp-145-154
- (30) Fujii, S. (1981). Swirling Jets with and without Combustion, *AIAA Journal*, Vol.19, No 11, AIAA 81-4294

Capítulo 13

- (1) Morton, B., G.I. Taylor, y J.S. Turner (1956). Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc.Roy.Soc.,A234*, 1-23
- (2) Turner, J.S. (1962). The “starting plume” in neutral surrounding. *J. Fluid Mech.*, 13, 356-368
- (3) Delichatsios, M.A. (1979). Time similarity analysis of unsteady buoyant plumes. *J. Fluid Mech.*, 93, 241-250
- (4) Chen, C.J., y W. Rodi (1980). Vertical turbulent buoyant jets: A review of experimental data. *Pergamon Press, Oxford*
- (5) Kotsovinos, N.E.(1975). A study of the entrainment and turbulence in a plane buoyant jet. *Ph.D Thesis. California Institute of Technology, Pasadena, CA*
- (6) Kotsovinos, N.E. y E.J. List (1977). Plane turbulent buoyant jets: Part 1-Integral properties. *J.Fluid Mech.*, 81, 25-44
- (7) Beuther, F.D. (1980). Experimental investigation of the turbulent axisymmetric plume. *Ph.D. Dissertation. SUNY (Buffalo)*
- (8) Chen, C.J. y W. Rodi (1978). A review of experimental data of vertical turbulent buoyant jets.*The Science and Applications of Heat and Mass Transfer, Vol.II Ed. D.B Spalding. Pergamon Press,Oxford*
- (9) Priestley, C.H.B. y F.K. Ball (1955). Continuous convection from a isolated source of heat. *Quart. J.Roy.Met.Soc.*, 81 (348)



- (10) List, E.J. y J. Imberger (1973). Turbulent entrainment in buoyant jets. *Proc. ASCE, J.Hyd. Div.*, 99.
- (11) Crabb, D., Durão, D.F.G y Whitelaw, J.H. (1981). A round jet normal to a cross-flow. *Trans ASME J. Fluid Eng.* 103
- (12) Schatzmann, M. (1979) An integral model of plume rise. *Atmos. Env.* 11
- (13) Luti, F.M. y T.A. Brzustowski (1977). Flow due to a two-dimensional heat source with cross flow in the atmosphere. *Comb.Sci. Tech.*, 16
- (14) Ricou, F.P. y Spalding, D.B. Measurements of entrainment for axisymmetric turbulent jets. *J.Fluid Mechanics*, 11, 1961

Capítulo 14

- (1) Liquefaction Lecture_2 University of Wisconsin (Madison)
- (2) Tecnología de la licuefacción de gas natural. M. Bendjemil, *Tecnol. Ciencia Ed. Vol. 1, n° 2*, 1986
- (3) MT LNG, *Akademia Morska, Szczecin*

Capítulo 15

- (1) Yilmaz, M.; Kaya, M.; Karagoz, S.; Erdogan, S. "A Review on Design Criteria for Vortex Tube". *Heat Mass Transfer*, 45, pp. 613-632, 2009.
- (2) Ranque, G. H. "Expériences sur la détente giratoire avec production simultanées d'un échappement d'air chaud et d'air froid". *Journal de Physique et le Radium*, IV, pp. 112-114, 1933.
- (3) Hilsch, R. "The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as a Cooling Process". *Review of Scientific Instruments*, vol. 18, n° 2, 1947.
- (4) *Scientific American*, noviembre de 1958, p. 145.
- (5) Gao, C. *Experimental Study on the Ranque-Hilsch Vortex Tube*. Technische Universiteit Eindhoven, 2005.
- (6) Takahama, H. "Studies on Vortex Tubes". *Bull. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, 8(31): 433-440, 1965.
- (7) Westley, R. *Optimum Design of a Vortex Tube for Achieving Larger Temperature Drop Ratio*. Cranfield College Note, 30. College of Aeronautics, 1955.
- (8) Camiré, J. *Experimental Investigation of Vortex Tube Concepts*. The University of British Columbia, 1995.



- (9) Shannak, B. A. "Temperature Separation and Friction Loses in Vortex Tube". *Heat Mass Transfer*, 40, pp. 779-785, 2004.
- (10) Xue, Y. "A Critical Review of Temperature Separation in a Vortex Tube". *Exper. Therm. Fluid Science*, 34, pp. 13-67, 2010.
- (11) Eiamsa-ard, S.; Promvonge, P. "Review of Ranque-Hilsch Effects in Vortex Tubes". *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 12, 2008.
- (12) Ahlborn, B.; Keller, J. U.; Staudt, R.; Treitz, G.; Rebhan, E. "Limits of Temperature Separation in a Vortex Tube". *Journal of Physics D: Applied Physics*, 27, pp. 1-90, 1994.
- (13) Takahama, H.; Yokosawa, H. "Energy Separation in Vortex Tube with a Divergent Chamber". *Trans ASME J. Heat Transfer*, 103, pp. 196-203, 1981.
- (14) Negm, M. I. M.; Serag, A. Z.; Abdel, S. M. "Generalized Correlations for the Process of Energy Separation in Vortex Tubes". *Modelling, Simulation & Control*, B, vol. 14, ASME Press, 1988.
- (15) Lewins, J.; Bejan, A. "Vortex Tube Optimization Theory". *Energy*, 24, 1999.
- (16) Promvonge, P.; Eiamsa-ard, S. "Investigation on the Vortex Thermal Separation in a Vortex Tube Refrigerator". *Science Asia J.*, 31(3): 215-223, 2005.
- (17) Promvonge, P. "Numerical Simulation of Turbulent Compressible Vortex Tube Flow". The Third ASME/JSME Joint Fluid Engineering Conference. San Francisco, 1999.
- (18) Skye, H. M.; Nellis, G. F.; Klein, S. A. "Comparison of CFD Analysis to Empirical Data in a Commercial Vortex Tube". *Int. J. Refrig.*, 29, 2006.
- (19) Eiamsa-ard, S.; Promvonge, P. "Numerical Prediction of Vortex Flow and Thermal Separation in a Subsonic Vortex Tube". *J. Zhejiang Univ. Sci. Int. Appl. Phys. Eng. J.* 7/8, 2006.
- (20) Farouk, T.; Farouk, B. "Large Eddy Simulation of the Flow Field and Temperature Separation in the Ranque-Hilsch Vortex Tube". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50, pp. 4724-4735, 2007.
- (21) Linderstrøm-Lang, C. U. "Gas Separation in the Ranque-Hilsch Vortex Tube". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7, pp. 1195-1206, 1964.
- (22) Marshall, J. "Effect of Operating Conditions, Physical Size, and Fluid Characteristics on the Gas Separation Performance of a Linderstrom-Lang Vortex Tube". *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 20, 1977.

Capítulo 16

- (1) Sirén, K (2003) Technical dimensioning of a vertically upwards-blowing air curtain. Part 1 *Energy and Buildings*, X



- (2) Hayes, F.C. y Stoecker, W.F., Design data for air curtains. *ASHRAE Trans.* 2121
- (3) Liddament, M.W. (1986) Air infiltration calculation techniques- An application guide. *Air Infiltration and Ventilation Centre*
- (4) Orme, M.S. (1999) Applicable models for air infiltration and ventilation calculations Technical Note 51. *Air Infiltration and Ventilation Centre*
- (5) Lajos, T. L. Preszler (1975) Untersuchung von Torluftschleieranlage-Teil1. *HLH vol.26, No5*
- (6) Goodfellow, H.D. (1985) Advanced design of ventilation systems for contaminant control. *Elsevier. Amsterdam*
- (7) Tamm, M., (1975) Zur Berechnung von Luftschleiern. Dissertation. *Stuttgart University*
- (8) Valkeapää, A., Siren, K., Raappana, I. (2006) Air leakage through horizontal air curtains-an experimental study. *Finish Institute of Occupational Health. Finland*
- (9) Hayes, F.C. y Stoecker, W.F. (1969) Heat transfer characteristics of the air curtains *ASHRAE Journal, Vol.11(6)*
- (10) Stoecker, W.F. y Hayes, F.C. (1969) Design data for air curtains. *ASHRAE Journal, Vol 11(6)*
- (11) **Giráldez, H., Pérez Segarra, C.D., Rodríguez, I., Oliva, A.** (2013) Improved semi-analytical method for air curtains prediction. *Energy and Buildings* 66
- (12) Jaramillo, J.E., Pérez-Segarra, C.D., Oliva, A., Oliet, C. (2009) Analysis of the dynamic behaviour of refrigerated space using air curtains. *Numerical Heat Transfer. Part A* 55(6)
- (13) Howell, R.H. y Shibata, M., (1980) Optimum heat transfer through recirculated plane air curtains. *ASHRAE, LA-2567*

Capítulo 17

- (1) M.LeBlanck (1923) Steam ejector apparatus. *US Patent No 146447*
- (2) J.García del Valle (2014) Eyectores para aplicaciones frigoríficas. *Tesis Doctoral- Universidad de Valladolid*
- (3) J.Fabri y R. Siestrunk (1958) Supersonic air eyectors. *Advances in Applied Mechanics, 61:1-34*
- (4) K.Matsuo, K.Sasaguchi, Y.Kiyotoki y H.Mochizuki.(1982) Investigation of supersonic air eyectors. Part 2: Effects of throat area ratio on eyector performance. *Bulletin of the JSME, 25*
- (5) K.Matsuo, K.Sagaguchi, T.Tasaki, y H.Mochizuki.(1981) Investigation of supersonic air eyectors. Part 1: Performance in the case of zero secondary flow. *Bulletin of the JSME, 24*



Capítulo 18

- (1) Parmentier, E.M., Greenberg, R.A. Supersonic Flow Aerodynamics Windows of High-Power Users. *AIAA Journal*, Vol.11 (1973)
- (2) De Laval, C.G.P. *Encyclopaedia Britannica* 16:680g;18:766f
- (3) Liepmann, H.W., Roshko, A Elements of Gasdynamics. *John Wiley & Sons, Inc.* (1957)
- (4) Howarth, L. (ed) Modern Development in Fluid Dynamics, High Speed Flow. *Oxford* (1953)
- (5) Aupoix, B., Casalis, G., Jouet, C., Regard, D., Reijasse, P. Etude des phénomènes de décollement et des efforts latéraux dans les tuyères surdétendues. *Onera, RT 76/5005.70* (1995)
- (6) Sodola, A., Steam and gas turbines, Vol.1 *McGraw-Hill* (1927)
- (7) Green, L., Flow separation in rocket nozzles. *Journal of the American Rocket Society* (1953)
- (8) Saltzman, J.M., Losses and real effects in nozzles. *Georgia Tech. College of Engineering AE6450 Rocket Propulsion*
- (9) Rothe, D.E. *AIAA J.*, 9, 1976
- (10) Masure, B., Effects de la viscosité et effets de virile sur la mesure des débits par colsonique. *Res. Aér.* 1967
- (11) Bartz, D.R., Turbulent boundary layer heat transfer from rapidly accelerating flow of no combustion gases and of heated air advances in heat transfer. *Ac.Press* 1965
- (12) Herbert, M.V. Centre-Body nozzles for supersonic transport Aircraft. *Journ.Roy.Aero.Soc.*, n° 673, 1967
- (13) Bourgeois, J.P., Chiche, P. Quelques problèmes aérodynamiques liés à la propulsion d'un avion hyperonique. *AFITAE-ONERA-TP n° 416*, 1966

Capítulo 19

- (1) Sauer, R. General Characteristics of the Flow through Nozzles at Near Critical Speeds. *NACA TM No 1147*, 1947

Capítulo 20

- (1) Swami, M.V., Chandra, S. Procedures for calculating natural ventilation airflow rates in buildings. *FSEC-163-86*, 1987



- (2) **Holmes, J.D.** Wind loads on low rise buildings: The structure and environmental effects of wind on buildings and structures. *Faculty of Engineering. Monach University. Melbourne, 1986*
- (3) **Linke.** Natural ventilation. *Link Springer.com*

Capítulo 21

- (1) Manual de Cálculo de Altura de Chimeneas Industriales. *Ministerio sw Industria, Comercio y Turismo, Centro de Publicaciones (1992)*
- (2) Recommended Guide for Prediction of the Dispersion of Airborne Effluents. 3th Edition. *ASME (1979)*
- (3) Instrucción Técnica-07 (IT-07) ALTURA DE CHIMENEAS. Orden de 11 de julio de 2012 dictada por el Gobierno Vasco
- (4) Technische Auleitung zur Reinhaltung del Luft-TA Luft. Julio 2002

Anexo II

- (1) Eckert, H.U. Characteristics of the turbulent boundary layer on a flat plate in compressible flow from measurements of friction in pipes. *J. Aeronaut. Sci., 17, 1950*
- (2) Driest (van) E.R. On the boundary layer with variable Prandtl number. *Jarbuch der W.G. für Luftfahrt. 1954*
- (3) Sommer, S.C., Short, B.J. Free flight measurements of turbulent boundary layer skin friction in the preence of severe aerodynamic heating at Mach numbers from 2,8 to 7,0. *NACA TN 3391, 1955*
- (4) Michel, R. Couches limites turbulentes et calcul pratique des couches limites en fluide compressible. *ONERA TP 25, 1963*
- (5) Griffith, W. Shock tube studies on transonic flow on wedge profiles. *J. Aeronaut. Sci. 19, 1952*
- (6) Simpson, R.L. Turbulent boundary layer separation. *Ann. Rev. Fluid Mech, 1989*

